Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα

Εξεταστική Περίοδος Φεβρουαρίου Ακαδ. Έτος 2008-2009

Θέματα:

1. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} \lambda x - y + z &= 3 \\ x + y + \lambda z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= \lambda \end{cases}$

2. Αν $\vec{v}_1$=(1,1,1), $\vec{v}_2$=(1,2,3), και $\vec{v}_3 = (\alpha, \alpha^3, \alpha^5)$ είναι τρία στοιχεία του $\mathbb{R}^3$:

   (α΄) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε τα $\vec{v_1},\ \vec{v_1},\ \vec{v_3}$ να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

   (β΄) Για τις τιμές του α που θα βρείτε, να εξετάσετε αν ένα οποιόδηποτε διάνυσμα $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\vec{v_1},\ \vec{v_1},\ \vec{v_3}$.

3. Να βρεθεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, οι ιδιοτιμές, τα ιδιοδιανύσματα και ο πίνακας που αντιστοιχεί στην διαγωνοποίηση του $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

4. Να δειχθεί ότι για δύο μη συγραμμικά διανύσματα $\vec{u},\ \vec{v}$ το $||\vec{u} \times \vec{v}||$ εκφράζει το εμβαδό του παραλληλογράμμου που ορίζουν τα αντίστοιχα διανύσματα. Στη συνέχεια να δειχθεί ότι για ένα τρίτο μη συγραμμικό ως προς τα $\vec{u},\ \vec{v}$ διάνυσμα, έστω $\vec{z}$ το $||\vec{z} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})||$ εκφράζει τον όγκο του αντιστοίχου παραλληλεπιπέδου.

5. Έστω ένας διανυσματικός χώρος V και δύο διανυσματικοί υποχώροι του $U,\ W$. Να αποδειχθεί ο συνολικός αριθμός των υποχώρων του V.

Να γράφετε τέσσερα (4) από τα πέντε (5) θέματα θεωρώντας τα (1), (2) και (3) ως υποχρεωτικά και επιλέγοντας ένα εκ των (4), (5)

Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα.

Διάρκεια τρεις (3) ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ