# Ο μετασχηματισμός Fourier

Ο μετασχηματισμός Fourier είναι από τα διαδεδομένα εργαλεία μετατροπής δεδομένων και συναρτήσεων (μιας ή περισσοτέρων διαστάσεων) από αυτό που ονομάζεται *περιοχή χρόνου (time domain)* στην *περιοχή συχνότητας (frequency domain)*. Οι εφαρμογές του περιλαμβάνουν το σχεδιασμό φίλτρων για την ελαχιστοποίηση του θορύβου σε ακουστικά σήματα (π.χ. μουσική ή λόγος), ως τον ταχύ πολλαπλασιασμό πολυωνύμων.

# Ο μετασχηματισμός Fourier
## α. συναρτήσεις ως συνδυασμοί ημιτονοειδών

Κάθε συνεχής, περιοδική συνάρτηση μπορεί να περιγραφεί ως γραμμικός συνδυασμός ημιτόνων και συνημιτόνων. Το ημίτονο είναι μια συνάρτηση της μορφής Asin(2πωt+φ), όπου το A είναι το *μέγεθος*, ω είναι η συχνότητα σε κύκλους (ή περιόδους) ανα sec, και φ είναι η *φάση*, η οποία χρησιμοποιείται για να αποφεύγουμε την τιμή 0 για t=0. Αντίστοιχα το συνημίτονο έχει ακριβώς τους ίδιους όρους και μπορεί να θεωρηθεί ως μετατιτεθεμένο ημίτονο (ή καλύτερα ως ημίτονο με *φάση* π/2).

# Ο μετασχηματισμός Fourier
## α. συναρτήσεις ως συνδυασμοί ημιτονοειδών

Έτσι μια συνάρτηση f(t) μπορούμε να τη γράψουμε (ή τουλάχιστο να την προσεγγίσουμε) για κάποια n ως:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n}(A_k cos(2\pi\omega_k t) + B_k sin(2\pi\omega_k t))$$

Χρησιμοποίειται ο συνδυασμός ημιτόνων-συνημιτόνων, και όχι μόνο ημιτόνων, έτσι ώστε να είναι δυνατή η έκφραση συναρτήσεων για τις οποιές f(0)≠0, με τέτοιο τρόπο ώστε να αποφύγουμε την προσθήκη φάσης στο ημίτονο.

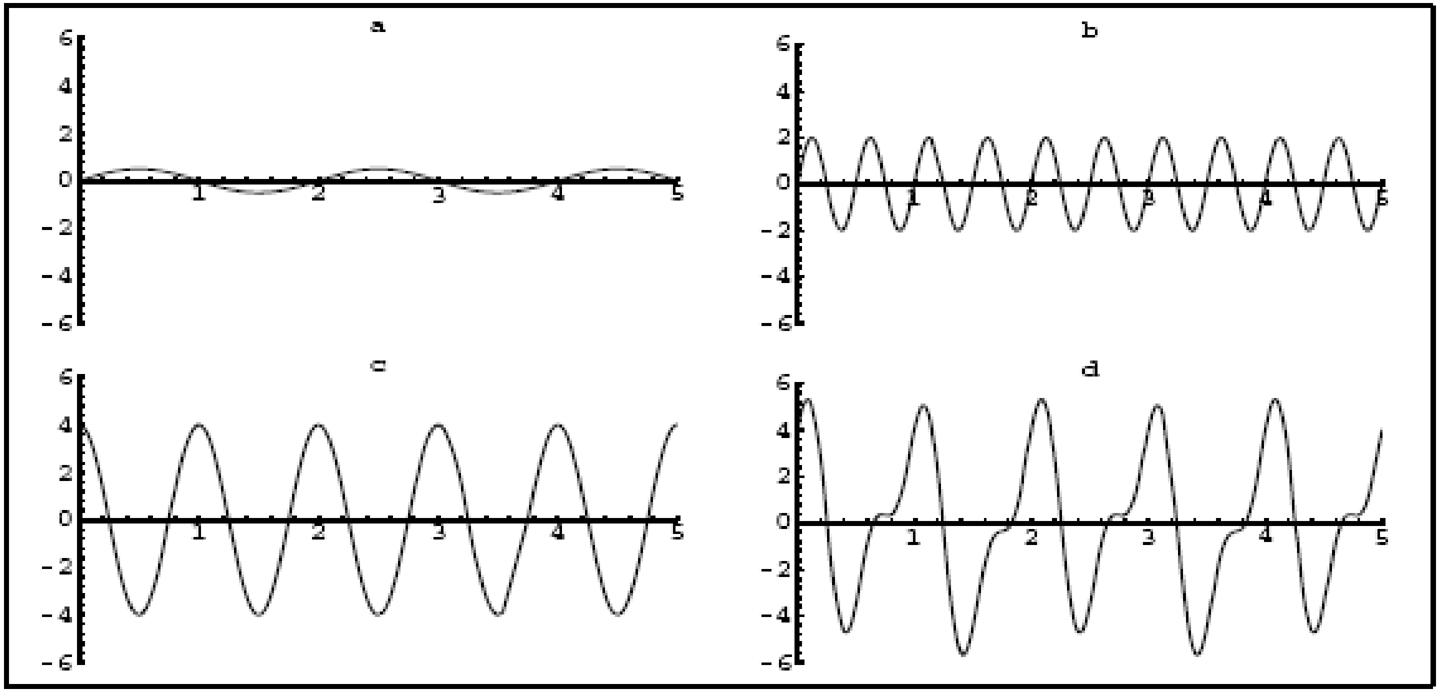
# Ο μετασχηματισμός Fourier

## α. συναρτήσεις ως συνδυασμοί ημιτονοειδών

Ώς μια τέτοια προσεγγιση θεωρήστε τον παρακάτω συνδυασμό:

$$f_1(t) = 0.5sin\pi t + 2sin4\pi t + 4cos2\pi t$$

Η γραφική απεικόνιση των παραπάνω συναρτήσεων είναι (για t=0.5):



# Ο μετασχηματισμός Fourier

## α. συναρτήσεις ως συνδυασμοί ημιτονοειδών

Και η ανάλυση των συχνοτήτων της $f_1(t)$ δίνεται στον παρακάτω πίνακα:

| $k$ | Frequency ($\omega_k$) | Cosine Amplitude ($A_k$) | Sine Amplitude ($B_k$) |
|---|---|---|---|
| 1 | 1/2 | 0 | 1/2 |
| 2 | 2 | 0 | 2 |
| 3 | 1 | 4 | 0 |

Η αναπαράσταση μιας περιοδικής συνάρτησης ως γρ. συνδυασμός ημιτόνω και συνημιτόνων, είναι γνωστή ως *ανάπτυγμα σειράς Fourier* της συνάρτησης. Ο μετασχηματισμός Fourier είναι ένα εργαλείο για να υπολογίζουμε μεγέθη όπως αυτά του παραπάνω πίνακα για σειρές και συναρτήσεις, που δεν είναι υποχρεωτικά περιοδικές (οι σειρές είναι ειδικές περιπτώσεις συναρτήσεων...).

# Ο μετασχηματισμός Fourier

## β. Προσαρμογή σε μιγαδικούς και εκθετικά

Ένας άλλος τρόπος έκφρασης των τριγωνομετρικών συναρτήσεων βασίζεται στο παρακάτω:

$$e^{i\theta} = cos(\theta) + isin(\theta) \qquad e^{-i\theta} = cos(\theta) - isin(\theta)$$

Και οι δύο προκύπτουν από το ανάπτυγμα Taylor για το cos, sin, και $e^{\theta}$. Με απλές πράξεις προκύπτει:

$$cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \qquad sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}$$

Οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{A_k}{2}(e^{2\pi\omega_k t} + e^{-2\pi\omega_k t}) + \frac{B_k}{2i}(e^{2\pi\omega_k t} - e^{-2\pi\omega_k t})\right]$$
$$C_k = \frac{A_k - iB_k}{2},\ k > 0$$
$$C_k = \frac{A_k + iB_k}{2},\ k < 0$$
$$C_0 = 0$$
$$\omega_k = -\omega_{-k}$$
$$f(t) = \sum_{k=-n}^{n} \left[C_k e^{2\pi i\omega_k t}\right]$$

# Ο μετασχηματισμός Fourier

## β. Προσαρμογή σε μιγαδικούς και εκθετικά

Το ανάπτυγμα Taylor για το cos, sin, και $e^{\theta}$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad -\infty < x < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad -\infty < x < \infty$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} \cdots + \frac{2^{2n}\left(2^{2n}-1\right)B_n x^{2n-1}}{(2n)!} + \cdots \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \cdots + \frac{E_n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\csc x = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} + \frac{31x^5}{15120} + \cdots + \frac{2\left(2^{2n-1}-1\right)B_n x^{2n-1}}{(2n)!} + \cdots \quad 0 < |x| < \pi$$

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \cdots - \frac{2^{2n} B_n x^{2n-1}}{(2n)!} - \cdots \quad 0 < |x| < \pi$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad -\infty < x < \infty$$

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \cdots \quad -\infty < x < \infty$$

$$a^x = e^{x \ln a} = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \frac{(x \ln a)^3}{3!} + \cdots \quad -\infty < x < \infty$$

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{15} + \cdots \quad -\infty < x < \infty$$

$$e^{\cos x} = e\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{31x^6}{720} + \cdots\right) \quad -\infty < x < \infty$$

$$e^{\tan x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{3x^4}{8} + \cdots \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$e^x \sin x = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{90} + \cdots + \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) x^n}{n!} + \cdots \quad -\infty < x < \infty$$

$$e^x \cos x = 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + \cdots + \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) x^n}{n!} + \cdots \quad -\infty < x < \infty$$

# Ο μετασχηματισμός Fourier

## β. Προσαρμογή σε μιγαδικούς και εκθετικά

Και ο προηγούμενος πίνακας γίνεται:

| $k$ | Frequency $(\omega_k)$ | $C_k$ |
|---|---|---|
| $-3$ | $-1$ | $2$ |
| $-2$ | $-2$ | $2i$ |
| $-1$ | $-1/2$ | $i/4$ |
| $0$ | $0$ | $0$ |
| $1$ | $1/2$ | $-i/4$ |
| $2$ | $2$ | $-2i$ |
| $3$ | $1$ | $-2$ |

περαιτέρω μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες για τους μιγαδικούς αριθμούς:

$$x + iy = r(cos(\theta) + isin(\theta)) = re^{i\theta},\ \kappa\alpha\iota$$
$$r = absx + iy = \sqrt{x^2 + y^2}, tan(\theta) = \frac{y}{x}$$

# Ο μετασχηματισμός Fourier

## β. Προσαρμογή σε μιγαδικούς και εκθετικά

Οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$C_k e^{2\pi i\omega_k t} = r_k e^{i\phi_k} e^{2\pi\omega_k t} = r_k e^{i(2\pi\omega_k t+\phi_k)}$$

$$r_k = \left(\frac{A_k^2+B_k^2}{4}\right) \qquad tan(\phi_k) = \begin{cases} \frac{-B_k}{A_k} & k>0 \\ \frac{B_k}{A_k} & k<0 \end{cases}$$

και τελικά

$$f(t) = \sum_{k=-n}^{n} r_k e^{i(2\pi\omega_k t+\phi_k)}$$

οι όροι στην τελευταία συνάρτηση είναι: $\omega_k$ η *κ-ιοστή συχνότητα*, *rk* είναι το*μέγεθος*, και $\varphi_k$ είναι η *φάση*.

# Ο μετασχηματισμός Fourier

## γ. Ο συνεχής μετασχηματισμός Fourier

Ο συνεχής μετασχηματισμός Fourier μια συνάρτησης f(t) ορίζεται ως:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \omega t} dt$$
$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{2\pi i \omega t} dt$$

όπου η τελευταία συνάρτηση έχει οριστεί στην προηγούμενη παράγραφο, και είναι γνωστή ως *αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier*. Από την πρώτη συνάρτηση μπορεί να βρεθεί το *μέγεθος* για κάθε συχνότητα *ω*, υπό την προυπόθεση ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει. Το αποτέλεσμα του μετασχηματισμού μιας συνάρτησης ονομάζεται *φάσμα συχνότητας* ή *δυναμικό φάσμα* ή απλούστερα *φάσμα.*

# Ο μετασχηματισμός Fourier

## γ. Ο συνεχής μετασχηματισμός Fourier

**Παράδειγμα** Η συνάρτηση *παλμός* ορίζεται ως $p_{1/n} = \begin{cases} \frac{n}{2} & |t| \leq \frac{1}{n} \\ 0 & otherwise \end{cases}$

Ο μετασχηματισμός Fourier αυτής της συνάρτησης είναι μια συνάρτηση sinc με μορφή:

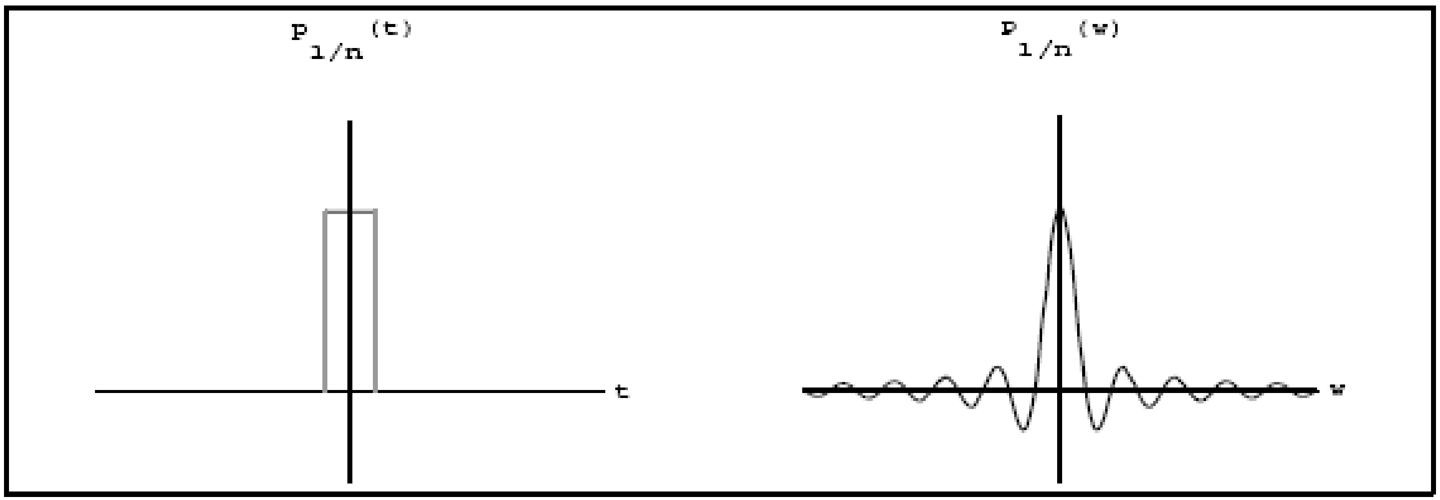
$$P_{1/n}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{1/n}(t) e^{-2\pi i\omega t} dt =$$
$$= \int_{-1/n}^{1/n} n/2 e^{-2\pi i\omega t} dt = \frac{n}{2} \frac{e^{2\pi i\omega/n} - e^{-2\pi i\omega/n}}{2\pi i\omega} =$$
$$= \frac{sin(2\pi\omega/n)}{2\pi\omega/n} = sinc(2\pi\omega/n)$$

# Ο μετασχηματισμός Fourier

## γ. Ο συνεχής μετασχηματισμός Fourier

**Παράδειγμα** Η συνάρτηση *παλμός* ορίζεται ως $p_{1/n} = \begin{cases} \frac{n}{2} & |t| \leq \frac{1}{n} \\ 0 & otherwise \end{cases}$

(...συνέχεια) και η γραφική απεικόνισή τους είναι:



# Ο μετασχηματισμός Fourier
## γ. Ο συνεχής μετασχηματισμός Fourier

**Παράδειγμα** Η συνάρτηση *δ* ορίζεται ως: $\delta(t) = \lim_{n\to\infty} p_{1/n}(t)$

Είναι επίσης γνωστή ως *συνάρτηση δέλτα του Dirac*. Είναι 0 για όλα τα t, εκτός t=0, και *δ(0)=∞.*

Ο μετασχηματισμός της είναι:

$$\Delta(\omega) = \lim_{n\to\infty} P(\omega) = \lim_{n\to\infty} \frac{sin(2\pi\omega/n)}{2\pi\omega/n} = 1$$

# Ο μετασχηματισμός Fourier

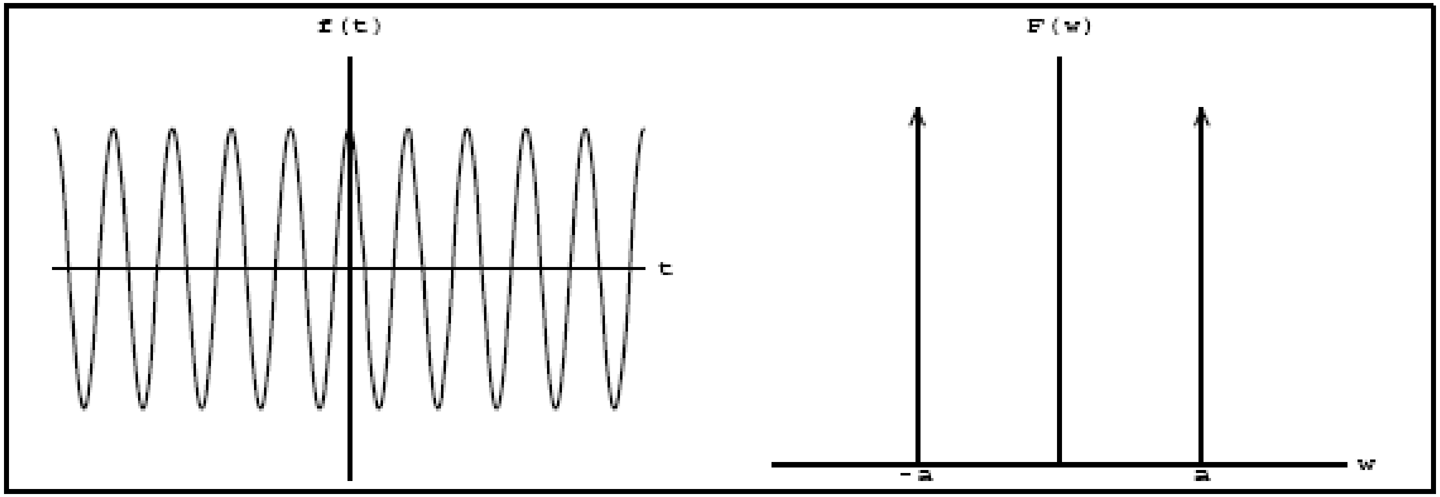
## γ. Ο συνεχής μετασχηματισμός Fourier

**Example 3** Let $f(t)$ be some simple cosine function: $f(t) = cos(2\pi at)$

Its Fourier transform is:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} cos(2\pi at)e^{-2\pi i\omega t}dt = \frac{\delta(\omega + a) + \delta(\omega - a)}{2}$$

The respective graphs for $f(t)$ and $F(\omega)$ are shown in Figure 3.



# Ο μετασχηματισμός Fourier

## γ. Ο συνεχής μετασχηματισμός Fourier

Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε κάποιες από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier οι οποίες τον καθιστούν χρήσιμο στην πράξη,

| | **Property** | $f(t)$ | $F(\omega)$ |
|---|---|---|---|
| 1. | Linearity | $af_1(t)+bf_2(t)$ | $aF_1(\omega)+bF_2(\omega)$ |
| 2. | Convolution[1] Theorem | $f_1(t)*f_2(t)$ | $F_1(\omega)F_2(\omega)$ |
| 3. | Product Theorem | $f_1(t)f_2(t)$ | $F_1(\omega)*F_2(\omega)$ |
| 4. | Time Shifting | $f(t-t_0)$ | $F(\omega)e^{-2\pi i\omega t_0}$ |
| 5. | Frequency Shifting | $f(t)e^{-2\pi i\omega_0 t}$ | $F(\omega-\omega_0)$ |
| 6. | Scaling[2] | $f(at)$ | $\lvert a\rvert^{-1}F(\omega/a)$ |
| 7. | Parseval's Theorem | $\int_{-\infty}^{\infty}\lvert f(t)\rvert^2dt=\int_{-\infty}^{\infty}\lvert F(\omega)\rvert^2d\omega$ | |

# Ο μετασχηματισμός Fourier

## γ. Ο συνεχής μετασχηματισμός Fourier

Η συνέλιξη εκφράζει το:

$$\text{The } \textit{convolution} \text{ of } f(x),\ g(x) \text{ is } f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) f(x-\xi) d\xi$$

στον παραπάνωπίνακα σημαίνει ότι η συνέλιξη στην περιοχή χρόνου αντιστοιχεί στον πολλαπλασιασμό των συντελεστών στην περιοχή συχνοτήτων, και αντίστροφα. Αυτό είναι μία από τις πιο χρήσιμες ιδιότητες του μετασχηματισμού και χρησιμοποιείται στον σχεδιασμό φίλτρων, στην αιτιολόγηση σειριακής συμπεριφοράς καθώς και στον ταχύ πολλαπλασιασμό πολυωνύμων.

Η ιδιότητα 4 ορίζει ότι μετατόπιση της συνάρτησης στο χρόνο αντιστοιχεί σε μια αλλαγή της φάσης των ημιτονοειδών που συνθέτουν την συνάρτηση. Όμοια η ιδιότητα 5 ορίζει ότι η ημιτονοειδής μετατροπή στη συνάρτηση αντιστοιχεί σε μια μετάθεση φάσης στη συχνότητα.

Το θεώρημα του Parseval ορίζει ότι η ολική ενέργεια ενός σήματος είναι ίδια στην περιοχή χρόνου και συχνότητας.

# Ο μετασχηματισμός Fourier

## γ. Ο συνεχής μετασχηματισμός Fourier

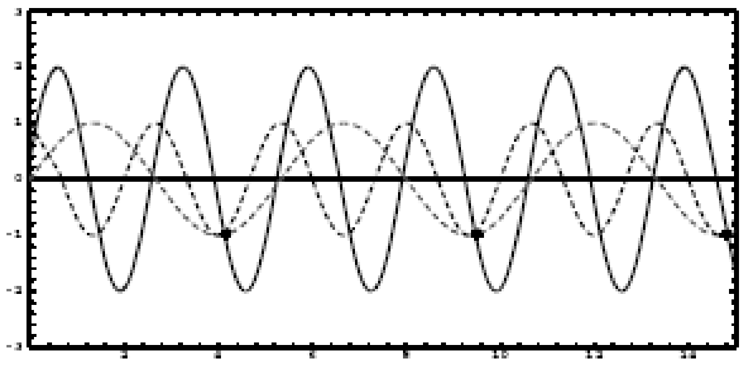
Από τη στιγμή που τα περισσότερα φυσικά σήματα, από ραδιοκύματα μέχρι τα σεισμικά φαινόμενα, είναι συνεχή, και έχουν ένα συνεχές φάσμα τιμών συχνοτήτων, οι συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται στην μοντελοποίησή τους είναι συνεχής αλλά και είναι επιθυμητό ο μετασχηματισμός να οδηγεί σε συνεχής. Παρόλα αυτά σε αρκετές περιπτώσεις η συνάρτηση που περιγράφει ένα φαινόμενο δεν είναι γνωστή. Για αυτό θα πρέπει τα αντίστοιχα δεδομένα να συγκεντρωθούν και να αναλυθούν περισσότερο. Ακόμη περισσότερο, διακριτές τιμές σε διάφορα χρονικά σημεία είναι σχετικώς εύκολο να υπολογιστούν. Για αυτόν τον λόγο μας ενδιαφέρει σε έναν μετασχηματισμό από την *διακριτή περιοχή χρόνου* στην *διακριτή περιοχή συχνοτήτων*, καθώς και ένας αντίστροφος μετασχηματισμός να οδηγεί προς την αντίθετη κατεύθυνση.

# Ο μετασχηματισμός Fourier

## δ. δειγματοληψία

Τα διακριτά σήματα εμφανίζονται (συνήθως) ως διακριτές αλληλουχίες. Και λαμβάνονται με περιοδικές δειγματοληψίες του σήματος.

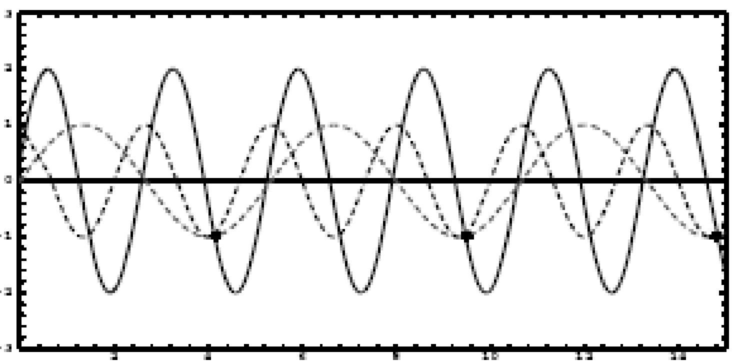
Μια σωστή επιλογή των διαστήματων δειγματοληψίας είναι απαραίτητη έτσι ώστε να έχουμε μια αξιόπιστη παρουσιάση του ακριβούς σήματος. Έστω για παράδειγμα τα τρία ημιτονοειδή του σχήματος:



# Ο μετασχηματισμός Fourier

## δ. δειγματοληψία

Έστω ότι παίρνομε δείγματα μόνο στα σημεία που ορίζονται από τα μαύρα στίγματα. Είναι φανερό ότι αυτά τα σημεία δεν έχουν αρκετή πληροφορία για να ξεχωρίσουν το ένα από τα άλλα. Για αυτό αν μας ζητούταν να επανακατασκευάσουμε τα σήματα το πολύ ένα θα ήταν σωστό.



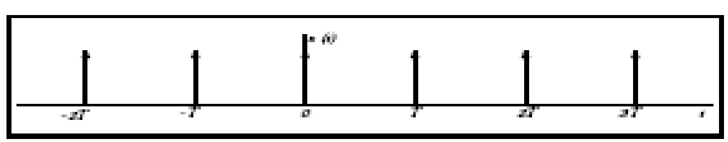
# Ο μετασχηματισμός Fourier
## δ. δειγματοληψία

Για ένα συνεχές σήμα $x_c(t)$, θέτουμε ένα χρονικό διάστημα μήκους Τ και λαμβάνουμε ένα διακριτό σήμα $x[n]=x_c(nT)$ για $-\infty<n<\infty$. Τ είναι η *περίοδος δειγματοληψίας* και $\omega_s=1/T$ είναι η *συχνότητα δειγματοληψίας*.

Η διακριτή ακολουθία x[n] μπορεί να ειδωθεί ώως μια συνεχής ακολουθία $x_s(t)$ με τιμή 0 για όλα τα $t\neq nT$ και τιμή x[n] για t=nT. Σύμφωνα με αυτά που έχουμε δει το προηγούμενο μπορεί να γραφεί ως:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \; and \; x_s(t) = x_c(t)s(t)$$

όπου *δ* είναι η συνάρτηση του Dirac. Έτσι, $x_s(t)$ είναι το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού του πρωτότυπου συνεχούς σήματος $x_c(t)$ και μιας συνάρτησης δειγματοληψίας s(t) (ή *impulse train*, ή *συνάρτηση Shah*.



# Ο μετασχηματισμός Fourier
## δ. δειγματοληψία

Από το θεώρημα γινομένου του πίνακα της προηγούμενης ενότητας, γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier του $x_s(t)$ είναι ο ίδιος με τη *συνέλιξη* των μετασχηματισμών Fourier των $x_c(t)$ και s(t), τα οποία τα ονομάζουμε $X_c(\omega)$ και S(ω), αντίστοιχα. Η S(ω) είναι ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης δειγματοληψίας, που είναι επίσης μια συνάρτηση δειγματοληψίας, και ορίζεται ως:

$$S(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

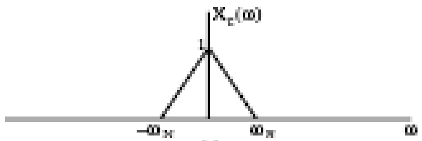
και για αυτό προκύπτει το παρακάτω:

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(\omega - k\omega_s)$$

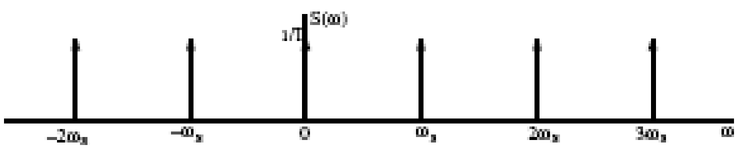
Η σχέση μεταξύ των $X_c(\omega)$ και $X_s(\omega)$ φαίνεται στο επόμενο σχήμα.

# Ο μετασχηματισμός Fourier
## δ. δειγματοληψία

Το (a) παριστάνει τον μετασχηματισμό Fourier του πρωτοτύπου σήματος, και το (b) της συνάρτησης δειγματοληψίας.



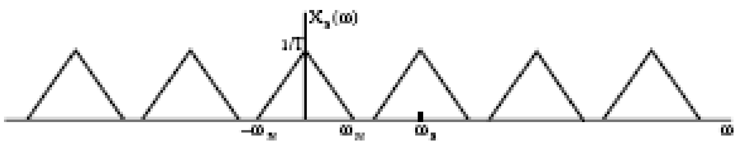
(a)



(b)

# Ο μετασχηματισμός Fourier
## δ. δειγματοληψία

Το αποτέλεσμα της συνέλιξής τους αντιστοιχεί στον μετασχηματισμό Fourier του σήματος που προκύπτει από την δειγματοληψία και παριστάνεται στο (c):



(c)

Έτσι όταν παίρνουμε δείγματα από ένα σήμα $x_c(t)$ στην περιοχή χρόνου, αυτό συνεπάγεται στον διπλασιασμό του φάσματος του πρωτοτύπου δείγματος στην περιοχή συχνότητας, $X_c(\omega)$, γύρω από ακέραια πολλαπλάσια της συχνότητας δειγματοληψίας $\omega_s$.Για να ανακτήσουμε το πρωτότυπο συνεχές σήμα από αυτό που έχει προκύψει από την δειγματοληψία, πρέπει να ξεφορτωθούμε τις συχνότητες που προέρχονται από την δειγματοληψία (που αντιστοιχούν στους διπλασιασμούς), και να κρατήσουμε μόνο τις συχνότητες γύρω από το 0, οι οποίες είναι οι πρωτότυπες συχνότητες (για τα τρίγωνα του σχήματος, πρέπει να διαγράψουμε όλα τα τρίγωνα εκτός από αυτό που είναι στο 0, για να πάρουμε το φάσμα του $x_c(t)$).

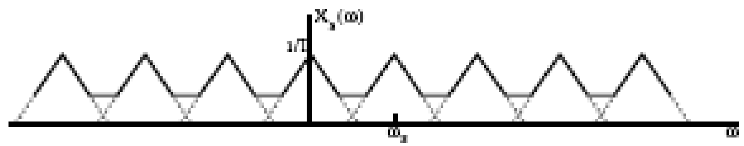
# Ο μετασχηματισμός Fourier
## δ. δειγματοληψία

Αυτό μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας ένα low-pass φίλτρο για το $x_s(t)$. Ένα τέτοιο φίλτρο δέχεται ως είσοδο ένα σήμα x(t), και διαγράφει όλες τις συχνότητες των οποίων η απόλυτη τιμή είναι μεγαλύτερη από κάποιο κατώφλι $\omega_f$. Οπότε παράγεται ένα σήμα y(t) του οποίου το φάσμα είναι όμοιομε του x(t) για όλες τις συχνότητες στο διάστημα $[-\omega_f,\omega_f]$, ενώ δεν υπάρχει καμιά άλλη συχνότητα.

Εφαρμόζοντας ένα τέτοιο φίλτρο με $\omega_N \leq \omega_f \leq (\omega_s-\omega_N)$ στο σήμα που προέκυψε από την δειγματοληψία, λαμβάνουμε το πρωτότυπο σήμα, υπό την προυπόθεση της συχνής δειγματοληψίας, έτσι ώστε $\omega_N \leq (\omega_s-\omega_N)$ ή ισοδύναμα $2\omega_N \leq \omega_s$.

# Ο μετασχηματισμός Fourier
## δ. δειγματοληψία

Στο σχήμα (d) φαίνεται τι συμβαίνει όταν αυτό δεν ικανοποιείται. Μπορούμε να δούμε (διακεκομένες γραμμές) ότι οι διπλασιασμοί του φάσματος του $x_c$ επικαλύπτονται, το οποίο σημαίνει ότι το σήμα από τη δειγματοληψία (συνεχής γραμμή) περιέχει περιέχει “τεχνητές” συχνότητες, ενώ οι πρωτότυπες έχουν χαθεί. Αυτό τοφαινόμενο είναι γνωστό ως *aliasing*.



(d)

Το γεγονός ότι η συχνότητα δειγματοληψίας $\omega_s$ πρέπει να είναι τουλαχιστο διπλάσια από την υψηλότερη συχνότητα του πρωτότυπου σήματος, $\omega_N$, προκειμένου να είμαστε σε θέση να παράξουμε ένα αξιόπιστο αντίγραφο του σήματος, αποτελεί το *θεώρημα Nyquist*, και η αντίστοιχη συχνότητα $\omega_s=\omega_N$ είναι η *συχνότητα Nyquist*.

# Ο μετασχηματισμός Fourier

## δ. δειγματοληψία

Λαμβάνοντας δείγματα από ένα σήμα είναι προφανές ότι καταλήγουμε σε μια *διακριτή* αλληλουχία η οποία χαρακτηρίζεται ως αξίοπιστη ή όχι ανάλογα με τη συχνότητα διενέργειάς της. Σε κάθε περίπτωση μια διακριτή ακολουθία απαιτεί διακριτές μεθόδους.

# Ο μετασχηματισμός Fourier
## ε. Ο διακριτός μετασχηματισμός (DFT)

Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier (Discrete Fourier Transform, DFT) αντιστοιχεί μια διακριτή περιοδική συνάρτηση f[k] (όπου το k είναι ακέραιος, και η περίοδος είναι N), σε μια άλλη διακριτή αλληλουχία F(j), με συντελεστές συχνότητες. Ορίζεται ως

$$F[j] = \sum_{k=0}^{N-1} f[k] e^{-2\pi kj/N} \qquad 0 \le j \le N-1$$
$$f[k] = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} F[j] e^{2\pi kj/N} \qquad 0 \le k \le N-1$$

Οι εξισώσεις αυτές ερμηνεύονται ως: στο σημείο k η τιμή f[k] είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των τιμών N ημιτονοειδών, $e^0$, ..., $e^{(2\pi/N)k(N-1)}$. Οι συντελεστές των ημιτονοειδών είναι F[0], ..., F[N-1] αντίστοιχα, και οι συχνότητές τους είναι j/N κύκλοι ανά δείγμα ή 2πj/N ακτίνια ανά δείγμα (0≤j ≤(N-1)). Σημειώνεται ότι

$$e^{-2\pi ikj/N} = e^{-2\pi ik(j+N)/N}$$

# Ο μετασχηματισμός Fourier

## ε. Ο διακριτός μετασχηματισμός (DFT)

Οπότε η συνάρτηση F[j], όπως η πρωτότυπη f[k], είναι περιοδική με περίοδο N, οπότε μας ενδιαφέρουν οι συχνότητες στο διάστημα 0-2π ακτίνια/δείγμα ή 0-N κύκλοι/δείγμα.

Αξίζει να σημειωθεί ότι για κάθε συχνότητα άλλη από τις j/N, ένα διακριτό ημιτονοειδές δεν είναι περιοδικό. Για να είναι διακριτό  συνημιτονοειδές (ημιτονοειδές) $f[k]=A\cos(2\pi\omega_0 k)$ περιοδικό με περίοδο N, θα πρέπει:

$$Acos(2\pi\omega_0(k+N)) = Acos(2\pi\omega_0 k)$$

δηλαδή: $2\pi\omega_0 N=2\pi j$ ή $\omega_0 N=j$, για κάποιο ακέραιο j.

# Ο μετασχηματισμός Fourier
## ε. Ο διακριτός μετασχηματισμός (DFT)

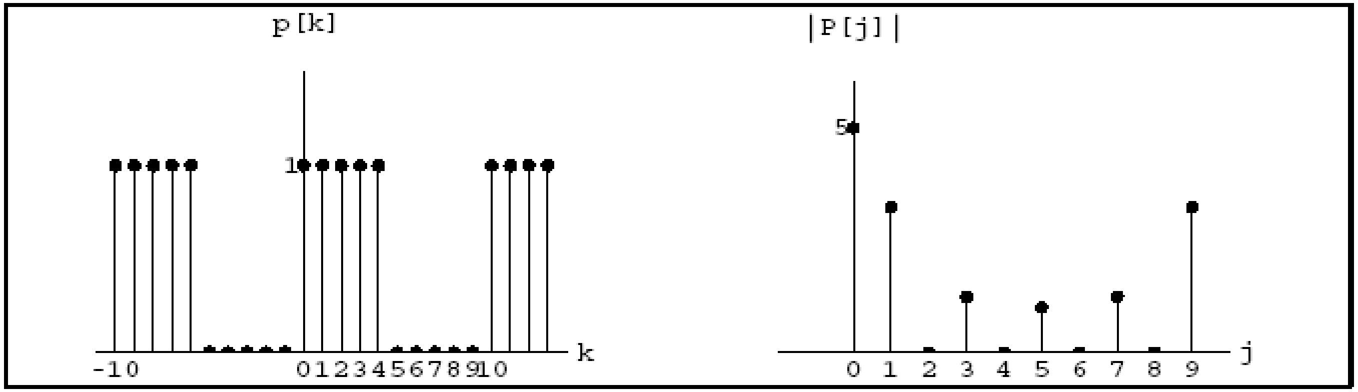
**Παράδειγμα** Έστω ο διακριτός παλμός p[k], με περιοδικότητα 10, που ορίζεται ως:

$$p[k] = \begin{cases} 1 & 0+10m \leq k \leq 4+10m \quad for\ some\ integer\ m \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

ο μετασχηματισμός του είναι:

$$P[j] = \sum_{k=0}^{9} p[k] e^{-2\pi ijk/10} = \sum_{k=0}^{4} e^{-2\pi ijk/10} = e^{-4\pi ij/10} \frac{sin(\pi j/2)}{sin(\pi j/10)}$$

και η γραφική τους παράσταση:



# Ο μετασχηματισμός Fourier

## ε. Ο διακριτός μετασχηματισμός (DFT)

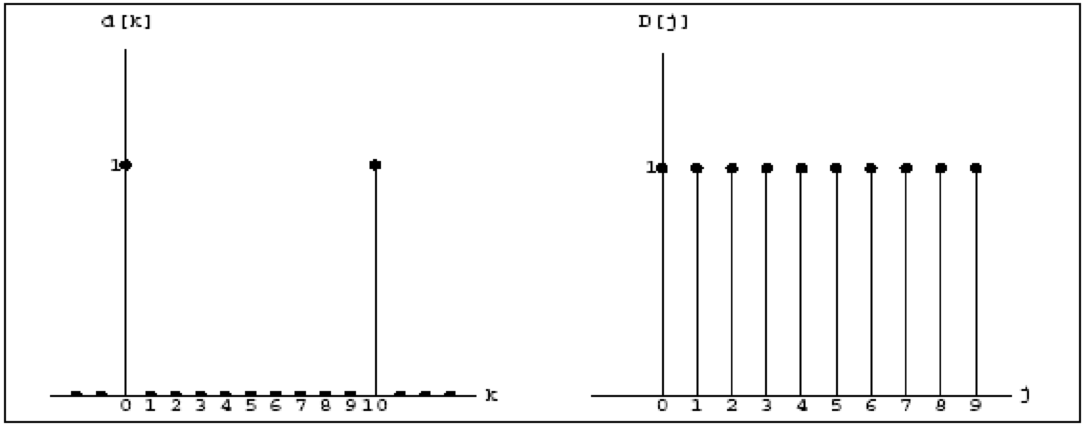
**Παράδειγμα** Η *διακριτή δ* συνάρτηση, για N=10 ορίζεται ως:

$$\delta[k] = \begin{cases} 1 & k = 0 + 10m \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

ο μετασχηματισμός της είναι:

$$\Delta[j] = \sum_{k=0}^{9} \delta[k] e^{-2\pi i jk/10} = e^0 = 1$$

και η γραφική τους παράσταση:



# Ο μετασχηματισμός Fourier
## ε. Ο διακριτός μετασχηματισμός (DFT)

Για απλοποίηση των παραστάσεων θέτουμε: $e^{2\pi i/N} = W_N$
και προκύπτουν οι:

$$F[j] = \sum_{k=0}^{N-1} f[k](W_N)^{-kj}$$
$$f[k] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F[j](W_N)^{kj}$$

Το $W_N$ καλείται η κύρια N-ιοστή ρίζα της μονάδας γιατί:

$$(W_N)^N = e^{2\pi i} = cos(2\pi) + isin(2\pi) = 1$$

όμοια το $(W_N)^k$ με $0 \le k \le N-1$ είναι όλες οι N μιγαδικές ρίζες της μονάδας.

# Ο μετασχηματισμός Fourier
## στ. Ο ταχύς μετασχηματισμός (FFT)

Ένα από τα πιο ελκυστικά γνωρίσματα του DFT είναι η ύπαρξη μιας αποτελεσματικής διαδικασίας υπολογισμού του, με χρήση O(NlogN) μιγαδικών πράξεων, αντί για τις $O(N^2)$ που απαιτούνται για τον αρχικό αλγόριθμο.

Ο αλγόριθμος για τον ταχύ DFT, είναι γνωστός ως FFT (Fast Fourier Transform). Εκμεταλεύεται την συμμετρία των μιγαδικών ριζών της μονάδας (βλ. Προηγούμενη διαφάνεια) όπως επίσης και επαναλαμβανόμενο έξυπνο διαχωρισμό της αλληλουχίας εισόδου σε δύο ισομήκης υποαλληλουχίες, κάθε μία από τις οποίες την επεξεργάζεται ξεχωριστά και γρήγορα. Για την πλήρη αξιοποίηση αυτής της τεχνικής (δλδ διαχωρισμού) θα πρέπει η πρωτότυπη αλληλουχία να είναι μήκους ή περιοδικότητάςδυνάμεων του 2 (αλλιώς εμφανίζονται τα μηδενικά).