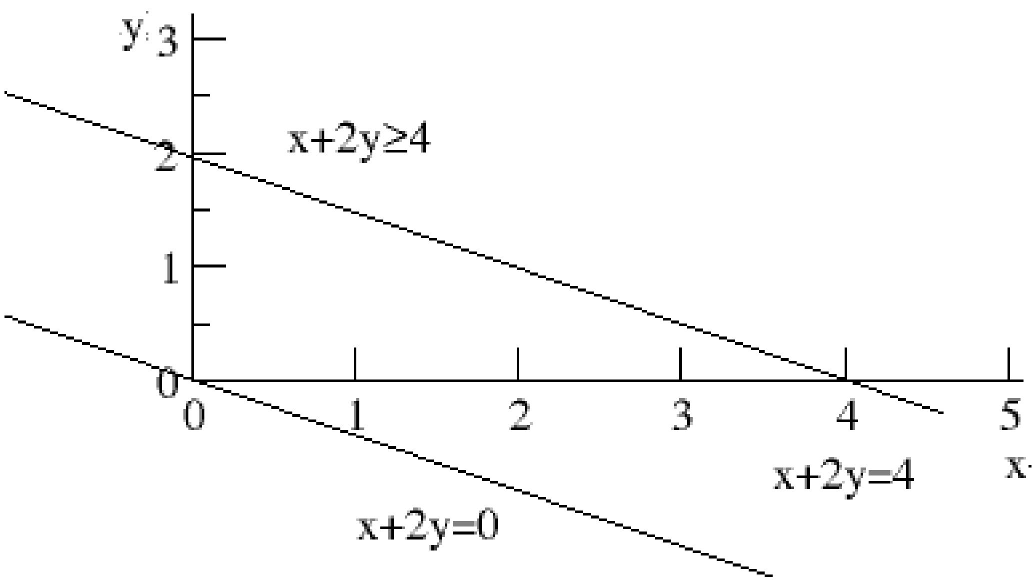
Γραμμικός Προγραμματισμός και θεωρία Παιγνίων

Σε αυτό το κεφάλαιο θα χρησιμοποιήσουμε πίνακες οι οποίοι δεν θα είναι γραμμικές εξισώσεις. Θα πρέπει λοιπόν να δούμε την γεωμετρική ερμηνεία των ανισώσεων. Μια ανίσωση διαιρεί τον n-διάστατο χώρο σε δύο *ημιχώρους*, έναν στον οποίο ικανοποιείται η ανίσωση και έναν στον οποίο δεν ικανοποιείται. Για παράδειγμα η ανίσωση x+2y≥4. Το σύνορο των δύο ημιχώρων είναι η ευθεία 2x+y=4:Πάνω από την ευθεία ικανοποιείται, κάτω παραβιάζεται.

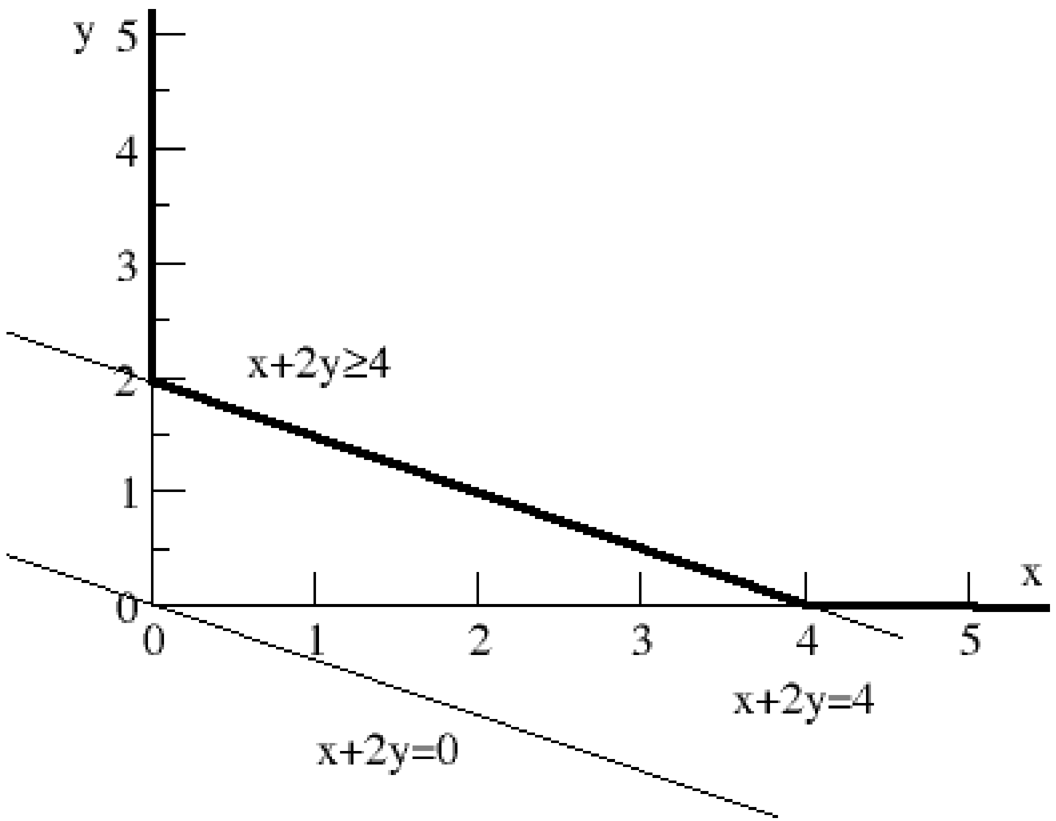


Γραμμικός Προγραμματισμός και θεωρία Παιγνίων

Το ίδιο θα συνέβαινε και στον χώρο για την $x+2y+z\geq4$, μόνο που το όριο θα είναι ένα επίπεδο (γενικός ορισμός για το όριο n-1 διαστάσεων).

Ένας θεμελιώδης περιορισμός είναι και το γεγονός ότι τα x, y πρέπει να είναι πάντα *μη αρνητικά*. Οπότε εισάγουμε ακόμη δύο ημιχώρους, δηλαδή $x\geq0$ & $y\geq0$.

Προφανώς αυτό που ενδιαφέρει είναι η συναλήθευση και των τριών ανισοτήτων (βλ. Σχήμα που περικλείεται μέσα στις έντονες γραμμές)



Γραμμικός Προγραμματισμός και θεωρία Παιγνίων

Ο χώρος που περικλείεται σε αυτές τις γραμμές είναι απλά αυτό που στον γραμμικό προγραμματισμό ονομάζεται *εφικτό σύνολο*. Όπως γίνεται εύκολα κατανοητό αποτελεί το σύνολο των λύσεων όλων των ανισώσεων.

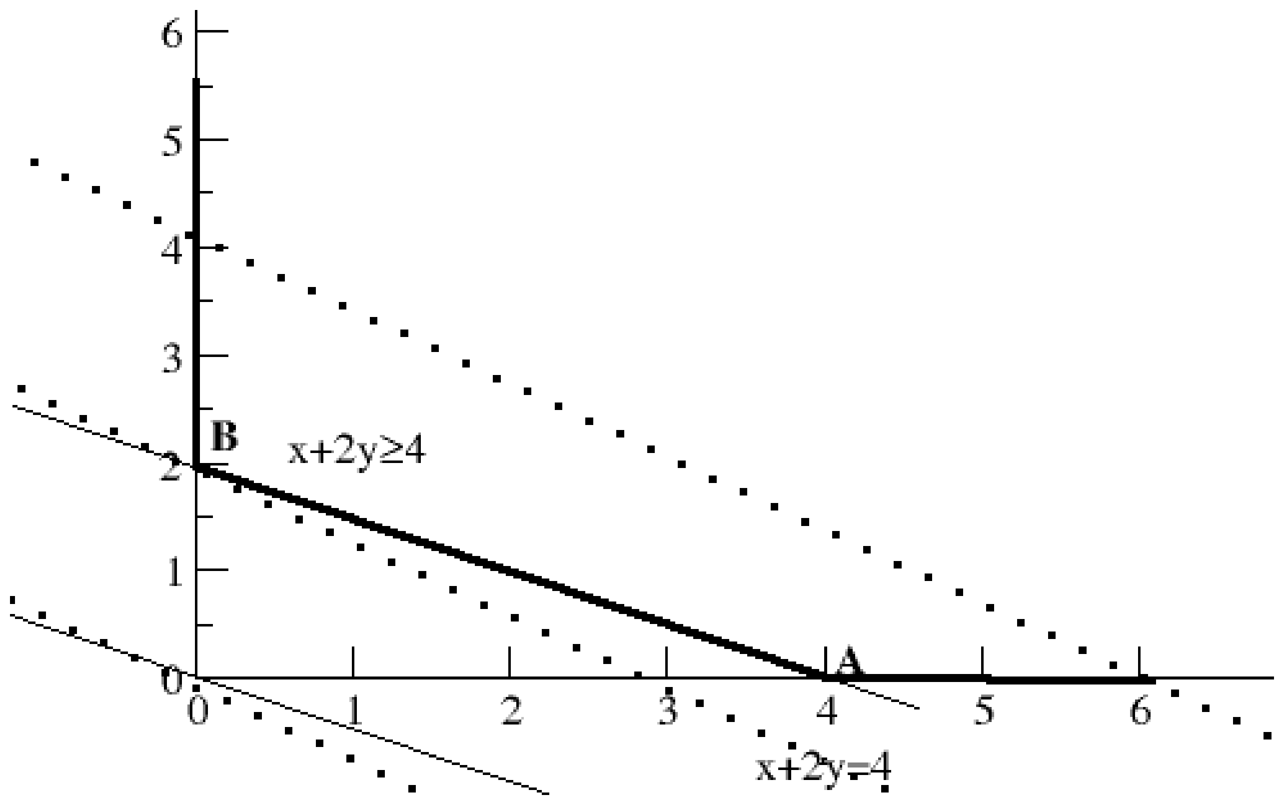
Το σύστημα Ax=B με *m* εξισώσεις και *n* αγνώστους περιγράφει την τομή *m* επιπέδων ένα για κάθε εξίσωση (όταν m=n τότε η λύση είναι $x=A^{-1}B$). Κατ' αναλογία η τομή *m* ανισώσεων Ax≥B περιγράφει την τομή *m* ημιχώρων. Αν θέσουμε και x ≥ 0, τότε προσθέτουμε άλλους *n* ημιχώρους. Γενικά αυξάνοντας τους περιορισμούς τόσο περιορίζουμε το εφικτό σύνολο.

Γραμμικός Προγραμματισμός και θεωρία Παιγνίων

Βέβαια θα πρέπει να τονίσουμε ότι μας ενδιαφέρει *όχι όλο το σύνολο των εφικτών σημείων, αλλά ένα ειδικό σημείο του που ελαχιστοποιεί ή μεγιστοποιεί μια ορισμένη* ***συνάρτηση κόστους***. Στο προηγούμενο παράδειγμα προσθέτουμε τη συνάρτηση κόστους (ή αντικειμενική συνάρτηση) 2x+3y. Το πρόβλημα πλέον γίνεται: Να βρείτε το σημείο x,y που περιέχεται στο ***εφικτό σύνολο*** και ***ελαχιστοποιεί το κόστος.***

Γραμμικός Προγραμματισμός και θεωρία Παιγνίων

Η γεωμετρική ερμηνεία του προβλήματος φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η οικογένεια κόστους 2x+3y ορίζει ένα σύνολο από παράλληλες ευθείες και θέλουμε να βρούμε το ελάχιστο κόστος δηλαδή την πρώτη ευθεία που τέμνει το εφικτό σύνολο. Μία τέτοια λύση είναι το σημείο B όπου (x*, y*)=(0,2) και το ελάχιστο κόστος είναι το 6. Αυτά τα βέλτιστα (αυτά που ελαχιστοποιούν τη συνάρτηση) θα τα συμβολίζουμε με αστερίσκο (*).



Γραμμικός Προγραμματισμός και θεωρία Παιγνίων

Παρατηρείτε ότι το βέλτιστο διάνυσμα βρίσκεται σε μια κορυφή του εφικτού συνόλου. Αυτό εξασφαλίζεται από τη γεωμετρία, διότι οι ευθείες που δίνουν τη συνάρτηση κόστους (ή τα επίπεδα για περισσότερες μεταβλητές) μετακινούνται συνεχώς προς τα πάνω μέχρι να τμήσουν το εφικτό σύνολο. Άρα η πρώτη επαφή πρέπει να συμβεί κατά μήκος του συνόρου. Η μέθοδος ***simplex*** παραμένει σε αυτό το σύνορο, μεταβαίνοντας από την μια κορυφή στην άλλη μέχρι να βρεί αυτή με το μικρότερο κόστος. Αντίθετα η μέθοδος του ***Karmarkar*** προσεγγίζει τη βέλτιστη λύση από το εσωτερικό του εφικτού συνόλου.

Γραμμικός Προγραμματισμός και θεωρία Παιγνίων

Σημείωση: Για μια διαφορετική συνάρτηση κόστους, η τομή μπορεί να μην είναι ένα μεμονωμένο σημείο: Αν πχ το κόστος ήταν $x+2y$, τότε όλη η ακμή AB θα έτεμνε ταυτόχρονα το εφικτό σύνολο και θα υπήρχε μια απειρία βέλτιστων διανυσμάτων. Βέβαι η τιμή θα ήταν μοναδική ($x^*+2y^*=4$). Αντίθετα το πρόβλημα μεγιστοποίησης δε θα έχει λύση. Τότε θα μπορούσαμε να αντιστρέφαμε το κόστος σε $-x-2y$ και να ζητάμε την ελαχιστοποιήση. Τότε το ελάχιστο είναι το $-\infty$. Γενικά κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού ανήκει σε μια από τις κατηγορίες:

α) Το εφικτό σύνολο είναι κενό
β) Η συνάρτηση κόστους είναι μη φραγμένη στο εφικτό σύνολο
γ) Το κόστος έχει ένα ελάχιστο (ή μέγιστο) στο εφικτό σύνολο.

Οι (α) και (β) δεν έχουν θέση (λογικά...) σε ένα οικονομικό ή τεχνικό πρόβλημα.

Γραμμικός Προγραμματισμός και θεωρία Παιγνίων

Υπάρχει ένας τρόπος μετατροπής του ανισοτικού περιορισμού σε εξίσωση, εισάγοντας τη *χαλαρή* μεταβλητή $w=x+2y-4$. Οπότε ο περιορισμός $x+2y\geq 4$ μετατρέπεται στον $w\geq 0$. Έτσι θα ξεκινήσουμε την μέθοδο ***simplex*** χρησιμοποιώντας μια βοηθητική μεταβλητή για κάθε ανίσωση, ώστε να έχουμε μόνο εξισώσεις και απλούς περιορισμούς μη αρνητικότητας. Το βασικό πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού γίνεται:

Ελαχιστοποίηση της cx, υπό τους περιορισμούς $Ax=b$ και $x\geq 0$.

Το διάνυσμα-γραμμή c περιέχει το κάθε κόστος (πχ [2 3]). Ο άγνωστος x περιέχει τις αρχικές μεταβλητές καθώς και τις οποιεσδήποτε χαλαρές μεταβλητές. Η συνθήκη $x\geq 0$ μεταφέρει το πρόβλημα στη μη αρνητική γωνία του n-διάστατου χώρου.

Γραμμικός Προγραμματισμός και θεωρία Παιγνίων

Ας επιστρέψουμε στο αρχικό πρόβλημα, με κόστος 2x+3y και ας το διατυπώσουμε με λόγια. Αυτό είναι το παράδειγμα του “προβλήματος διαίτης” στον γραμμικό προγραμματισμό (http://www-neos.mcs.anl.gov/CaseStudies/dietpy/WebForms/table.html) με δύο πηγές πρωτεϊνης, λ.χ.φιλέτο και φυστικοβούτυρο. Κάθε κιλό φυστικοβούτυρου δίνει μια μονάδα πρωτεϊνης, κάθε κιλό φιλέτου δίνει δύο μονάδες, ενώ για την διαίτα απαιτούνται τουλάχιστο τέσσερεις. Συνεπώς μια διαίτα που περιέχει x Kg φυστικοβούτυρου και y Kg φιλέτου περιορίζεται από την $x+2y\geq 4$, καθώς και τις $x\geq 0$ και $y\geq 0$. Αυτό είναι το εφικτό σύνολο και το πρόβλημα είναι να μειώσουμε το κόστος. Έαν ένα κιλό φυστικοβούτυρου κοστίζει 2 $ και ένα κιλό φιλέτο κοστίζει 3$, τότε το συνολικό κόστος είναι 2x+3y. Ευτυχώς η βέλτιστη δίαιτα είναι μόνο φιλέτο (θυμηθείτε: $[x^*,y^*]=[0,2]$.

Γραμμικός Προγραμματισμός και θεωρία Παιγνίων

Κάθε γραμμικό πρόβλημα έχει ένα ***δυικό***. Εάν το αρχικό είναι ελαχιστοποίησης, τότε το δυικό είναι μεγιστοποίησης. Αντίστοιχα το ελάχιστο του αρχικού είναι το μέγιστο του δυικού. Ας το εξηγήσουμε:

Αντί για αγοραστή, που διαλέγει μεταξύ x & y, ώστε να πάρει πρωτεϊνη με ελάχιστο κόστος, το δυικό πρόβλημα αντιμετωπίζεται από τον έμπορο, ο οποίος πουλά συνθετική πρωτεϊνη και συναγωνίζεται τα x, y. Άρα αυτός θέλει να μεγιστοποιήσει την τιμή p, η οποία υπόκειται σε γραμμικούς περιορισμούς. Η συνθετική πρωτεϊνη δεν πρέπει να κοστίζει περισσότερο από τα x, y, ενώ είναι προφανές ότι δεν μπορεί να έχει αρνητική τιμή. Αφού η δίαιτα απαιτεί 4 μονάδες πρωτεϊνης τότε ο έμπορος θα εισπράτει 4p, και το δυικό πρόβλημα είναι:

Να μεγιστοποιηθεί το $4p$ υπό τους περιορισμούς $p \le 2$ & $2p \le 3$ & $p \ge 0$.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα το δυϊκό έχει έναν μόνο άγνωστο και λύνεται πιο εύκολα από το αρχικό. Επειδή ***$2p \le 3 \Rightarrow p = 1.5$\$*** και η μέγιστη είσπραξη είναι 6 \$. Το ίδιο ποσό ήταν το κόστος του αρχικού προβλήματος. Αυτό, λοιπόν, είναι το νόημα του θεωρήματος του δυϊσμού: **Το ελάχιστο ισούται με το μέγιστο.**

Γραμμικός Προγραμματισμός και θεωρία Παιγνίων

Τυπικές εφαρμογές

1) *Σχεδιασμός παραγωγής*: Υποθέστε ότι η GM κερδίζει 100 $ για κάθε Chevrolet, 200 $ για κάθε Buick και 400 $ για κάθε Cadillac. Τα αυτοκίνητα καταναλώνουν ένα λίτρο βενζίνης σε 20, 17 και 14 μίλια, ενώ το η αρμόδια επιτροπή επιμένει ότι η μέση απόδοση πρέπει να είναι 18. Το εργοστάσιο μπορεί να συναρμολογήσει μια Chev/min, B/2min και Cadil/3min. Ποιό είναι το μέγιστο κέρδος σε μια ημέρα 8 ωρών;

Το πρόβλημα ελαχιστοποιήστε το $100x+200y+400z$ υπό τους περιορισμούς $20x+17y+14z\geq 18(x+y+z)$, $x+2y+3z\leq 480$, και $x,y,z\geq 0$

2) *Κατανομή επενδύσεων*: Έστω ότι διατίθενται μετοχές τριών τύπων α)κρατικές με τόκο 5% κατηγορίας Α, δημοτικές με τόκο 6% κατηγορίας Β, και μιας εταιρείας ουρανίου με τόκο 9%, κατηγορίας Γ. Μπορούμε να αγοράσουμε ποσά x, y, και z που δεν ξεπερνούν το σύνολο των 100.000$. Το πρόβλημα είναι η μεγιστοποίηση των τόκων, υπό τους περιορισμούς

(i) για ουράνιο δεν επιτρέπεται να επενδυθούν περισσότερα από 20.000$

(ii) η μέση κατηγορία της κατανομής πρέπει να είναι τουλάχιστον Β.

Το πρόβλημα Ελαχιστοποιήστε την $5x+6y+9z$ υπό τους περιορισμούς $x+y+z\leq 100.000$, $z\leq 20.000$, $z\leq x$ και $x,y,z\geq 0$

Γραμμικός Προγραμματισμός και θεωρία Παιγνίων

Θα μελετήσουμε το πρόβλημα για n μεταβλητές και m περιορισμούς. Στην προηγούμενη παράγραφο είχαμε n=2 και m=1. Στην γενικότερη περίπτωση η λύση είναι σχετικά πιο δύσκολη και για αυτό θα χρησιμοποιήσουμε πίνακες:

α) Ένας πίνακας A mxn

β) ένα διάνυσμα στήλη b με m συνιστώσες

γ) ένα διάνυσμα γραμμή c με n συνιστώσες.

Για να είναι το διάνυσμα x "εφικτό" πρέπει να ικανοποιεί τις x≥0 & Ax≥b. Η "βέλτιστη" λύση είναι το εφικτό διάνυσμα ελαχίστου κόστους, όπου το κόστος είναι $cx=c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n$

Πρόβλημα ελαχιστοποίησης: Ελαχιστοποιήστε την cx υπό τους περιορισμούςx≥0 & Ax≥b.

Η πρώτη συνθήκη περιορίζει το διάνυσμα στο θετικό μέρος του n-διάστατου χώρου (δλδ ¼ του R^2, 1/8 του R^3). Ένα τυχαίο διάνυσμα έχει 2^n πιθανότητες να μην είναι αρνητικό. Οι υπόλοιποι m περιορισμοί ορίζουν m πρόσθετους ημιχώρουςκαιτα εφικτά διανύσματα ικανοποιούν τους m+n περιορισμούς γιατί ισχύει για αυτά: x≥0 & Ax≥. Το εφικτό σύνολο είναι η τομή τους.

Γραμμικός Προγραμματισμός και θεωρία Παιγνίων

Η συνάρτηση κόστους cx εισάγει στο πρόβλημα μια ολόκληρη οικογένεια παράλληλων επιπέδων, από αυτά το μόνο που διέρχεται από την αρχή είναι το cx=0. Όταν το x ικανοποιεί αυτή την εξίσωση είναι διάνυσμα μηδενικού κόστους. Για όλα τα άλλα πέρνουμε όλες τις δυνατές τιμές κόστους. Καθώς μεταβάλλεται το κόστος τα επίπεδα σαρώνουν τον n-διάστατο χώρο και όταν συναντήσουν το εφικτό σύνολο τότε βρίσκουμε το βέλτιστο διάνυσμα x*.

Πώς υπολογίζουμε το x*;Θα μπορούσαμε να βρούμε όλες τις κορυφές και στη συνέχεια το κόστος κάθε μιας. Πρακτικά αυτό είναι αδύνατο σε προβλήματα πολλών διαστάσεων. Για τον λόγο χρησιμοποιούμε την μέθοδο ***simplex***, μια μέθοδος που προτάθηκε από τον Dantzig.

Γραμμικός Προγραμματισμός και θεωρία Παιγνίων

Το πρώτο βήμα της μεθόδου εντοπίζει μια κορυφή του εφικτού συνόλου. Αυτή είναι η “φάση I” που υποθέτουμε ότι έχει ολοκληρωθεί. Στο κύριο μέρος της μεθόδου έχουμε επίσκεψη από κορυφή σε κορυφή κατά μήκος των ακμών του εφικτού συνόλου. Από κάθε τυπική κορυφή μπορούμε να διαλέξουμε n ακμές, κάποιες απομακρύνουν από την βέλτιστη και κάποιες οδηγούν βαθμιαία σε αυτήν. Ο Dantzig διάλεξε την πορεία που με βεβαιότητα μείωνε το κόστος. Πηγαίνουμε συνεχώς σε κορυφή μικρότερου κόστους χωρίς πιθανότητα να πάμε σε κάτι δαπανηρότερο. Τελικά φτάνουμε σε μια κορυφή από όπου όλες οι άλλες ακμές οδηγούν σε υψηλότερο κόστος. Στην κορυφή αυτή είναι το βέλτιστο διάνυσμα x^*.

Το ζήτημα είναι πως γίνεται αυτό γραμμική άλγεβρα. Πρώτα πρέπει να ορίσουμε τις λέξεις κορυφή και ακμή σε n διαστάσεις. Κορυφή είναι το σημείο τομής n διαφορετικών επιπέδων, καθένα από τα οποία περιγράφεται από μια εξίσωση (π.χ πάτωμα και δύο πλευρικοί τοίχοι). Θυμηθείτε ότι έχουμε m ανισώσεις $Ax \geq b$ και n ανισώσεις $x \geq 0$. Μια κορυφή σχηματίζεται από επίλυση n ανισώσεων και προσδιορισμό της τομής τους. Μια λύση είναι $x_1=0$, $x_2=0$, ..., $x_n=0$ από ειδική επιλογή των ανισώσεων.

Γραμμικός Προγραμματισμός και θεωρία Παιγνίων

Γενικά υπάρχουν (n+m)!/(n!m!) δυνατές δομές εξαιτίας του αριθμού των δυνατών επιλογών n επιπέδων από n+m υποψήφια.

Όσον αφορά στην ακμή: Υποθέστε ότι παραλείπουμε ένα από τα n τεμνόμενα επίπεδα, οπότε μένουν n-1 εξισώσεις και 1 βαθμός ελευθερίας. Τα σημεία που ικανοποιούν αυτές τις εξισώσεις αποτελούν μια ακμή, που περνάει από την εν λόγω κορυφή. Θα πρέπει να παραμείνουμε στο εφικτό σύνολο, δίχως δυνατότητα επιλογής κατευθύνσεως επί της ακμής (πάντα προς το μικρότερο κόστος). Μπορούμε όμως να διαλέξουμε ανάμεσα σε n διαφορετικές ακμές, κάτι που ορίζεται από τη “Φάση ΙΙ”.

Για να περιγράψουμε αυτή τη φάση, ξαναγράφουμε την Ax≥b, κατά τρόπο τελείως ανάλογο των n απλών περιορισμών $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$,...$x_n \geq 0$. Να που χρειάζονται οι χαλαρές μεταβλητές: w=Ax-b, οπότε και $w_1 \geq 0$, $w_2 \geq 0$,...$w_n \geq 0$ για κάθε γραμμή του A. Και η εξίσωση w=Ax-b ή Ax-w=b γράφεται στην μορφή:

$$[A - I] \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} = b$$

Γραμμικός Προγραμματισμός και θεωρία Παιγνίων

Το εφικτό σύνολο καθορίζεται από τις m αυτές εξισώσεις καθώς και τις n+m απλές ανισότητες x, w≥0 και τώρα έχουμε περιορισμούς με ισότητες και μη αρνητικότητα. Για να ολοκληρώσουμε τις αλλαγές, θέλουμε να εξαλείψουμε τις όποιες διαφορές μεταξύ του αρχικού x και του w. Η μέθοδος simplex δεν βλέπει διαφορά και θα ήταν άσκοπο να συνεχίσουμε με τους συμβολισμούς

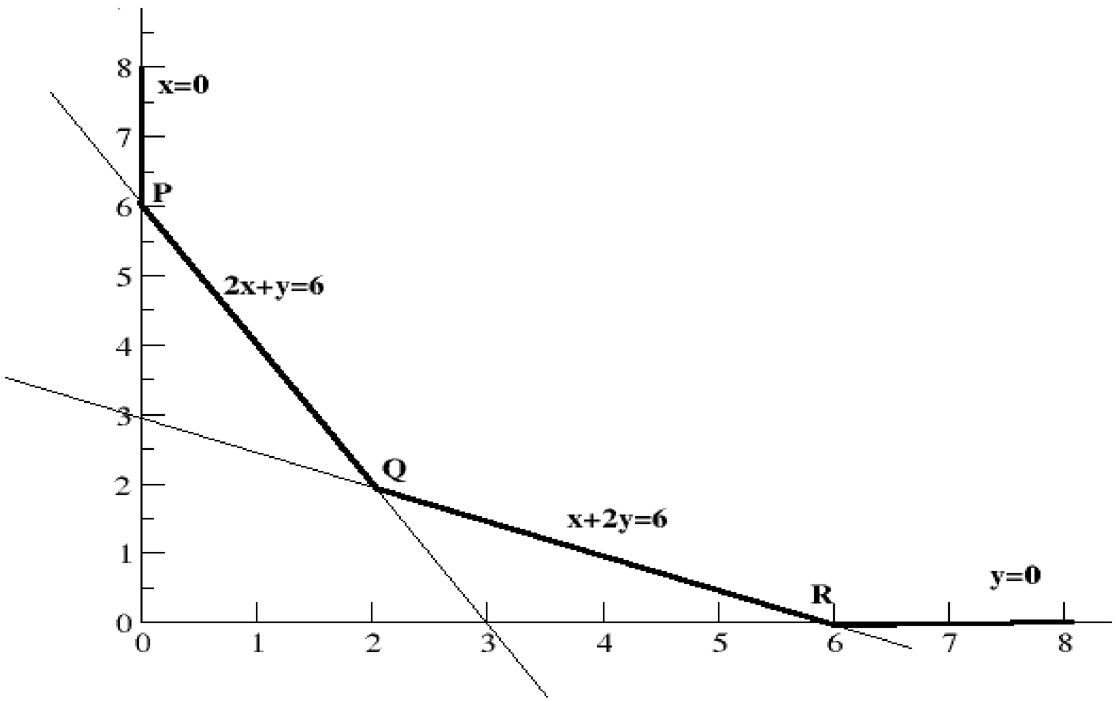
$$[A - I] \text{ και } \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}$$

Έτσι συμβολίζουμε τον μεγάλο πίνακα A και το διάνυσμα με τις περισσότερες μεταβλητές ως x, οπότε οι περιορισμοί γράφονται στην μορφή Ax=b και οι n+m απλές ανισότητες γράφονται x≥0 (στην οικονομία και στην μηχανική μπορούμε να ξεκινάμε από ισότητες). Το αρχικό διάνυσμα κόστους c χρειάζεται επέκταση με m συνιστώσες που είναι μηδέν. Οπότε το cx είναι το ίδιο. Τα μόνα "ίχνη" που αφήνει η w είναι οι διαστάσεις m x (m+n) του νέου A και οι m+n συντεταγμένες του x. Το πρόβλημα τώρα είναι:

Ελαχιστοποιήστε το cx υπό τους περιορισμούς x≥0, Ax=b.

Γραμμικός Προγραμματισμός και θεωρία Παιγνίων

Παράδειγμα: Στο πρόβλημα με περιορισμούς x+2y≥6, 2x+y≥6 και το κόστος x+y (βλ. Σχήμα) το νέο σύστημα έχει:



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ και } c = [1\ 1\ 0\ 0]$$

Γραμμικός Προγραμματισμός και θεωρία Παιγνίων

Παράδειγμα: Ξεκινώντας την μέθοδο simplex λέμε ότι η Φάση Ι έχει προσδιορίσει μια κορυφή του εφικτού συνόλου και n από τις αρχικές ανισώσεις μετατρέπονται σε εξισώσεις. Η κορυφή είναι ένα σημείο, στο οποίο n συνιστώσες του νέου x (δλδ το παλιό x+w) είναι μηδέν. Στην Ax=b αυτές παίζουν τον ρόλο ελευθέρων μεταβλητών ενώ οι απομένουσες m μεταβλητές είναι οι βασικές μεταβλητές. Εξισώνοντας τις n μεταβλητές με μηδέν, προσδιορίζουμε τις τιμές m βασικών μεταβλητών από τις m εξισώσεις Ax=b.

Για το παραπάνω σχήμα το σημείο P βρίσκεται στην τομή ης x=0 & 2x+y-6=0.Δύο συνιστώσες του x είναι μηδέν και δύο συνιστώσες του είναι ίσες με 6. Έτσι το x είναι και βασικό και εφικτό.

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} = b$$

Γραμμικός Προγραμματισμός και θεωρία Παιγνίων

Πρέπει όμως να πάρουμε μια απόφαση: προς ποια κορυφή να προχωρήσουμε; Βρήκαμε μια κορυφή όπου m=2 συνιστώσες του x είναι θετικές και οι υπόλοιπες μηδέν, και θέλουμε να προχωρήσουμε κατά μήκος μιας ακμής σε μια γειτονική κορυφή. Το γεγονός ότι είναι γειτονικές, σημαίνει ότι από τις m βασικές παραμένουν βασικές μόνο οι m-1 και γίνεται ελεύθερη (δλδ μηδέν) μόνο μία. Ταυτόχρονα μια από τις μεταβλητές που ήταν ελεύθερη γίνεται βασική, η τιμή της ανεβαίνει πάνω από το μηδέν, ενώ οι m-1 μεταβάλλονται (πάντα όμως >0). Η ουσιαστική απόφαση αφορά στο πια μεταβλητή πρέπει να αφαιρεθεί από τη βάση και ποια να προστεθεί.

Γραμμικός Προγραμματισμός και θεωρία Παιγνίων

Παράδειγμα μια εισερχόμενης και μιας απερχόμενης μεταβλητής:
Ελαχιστοποιείστε την $7x_3-x_4-3x_5$ υπό τους περιορισμούς
$x_1+x_3+6x_4+2x_5=8$ και $x_2++x_3+3x_5=9$.

Ξεκινάμε από την κορυφή $x_1=8$ και$x_2=9$ (βασικές μεταβλητές) και όλα τα άλλα $x_i=0$ (i=3,4,5). Οι περιορισμοί ικανοποιούνται, αλλά το κόστος μπορεί να μην ελαχιστοποιείται. Πράγματι, η συνάρτηση κόστους καθορίζει ποια ελεύθερη μεταβλητή πρέπει να εισαχθεί στην βάση. Θα ήταν παράλογο να κάνουμε το x_3 θετικό, όταν ο συντελεστής του είναι +7... Λογικές φαίνονται οι x_4 και x_5 και διαλέγουμε την δεύτερη (γιατί έχει πιο αρνητικό συντελεστή). Έτσι η εισερχόμενη μεταβλητή είναι η x_5.

Για να εισέλθει αυτή θα πρέπει να φύγει μία από τις x_1ή x_2. Στην πρώτη εξίσωση αυξάνουμε το x_5 και ελαττώνουμε το x_1 διατηρώντας $x_1+x_5=8$. Όταν το x_5 φτάσει το 4 τότε το x_1 θα γίνει μηδέν. Στη δεύτερη εξίσωση κρατάμε σταθερό το $x_2+3x_5=9$ και το x_5 μπορεί να φτάσει το 3 τότε το x_2 θα γίνει μηδέν. Αυτό εντοπίζει τη νέα κορυφή στο $x_5=3$ και $x_3=0$ και από την πρώτη παίρνουμε $x_1=2$. Η απερχόμενη μεταβλητή είναι η x_2 και το κόστος μειώνεται στο -9.

Γραμμικός Προγραμματισμός και θεωρία Παιγνίων

Παράδειγμα μιας εισερχόμενης και μιας απερχόμενης μεταβλητής:
Ελαχιστοποιείστε την $7x_3-x_4-3x_5$ υπό τους περιορισμούς
$x_1+x_3+6x_4+2x_5=8$ και $x_2++x_3+3x_5=9$.

Από αυτό το βήμα προκύπτει $x_1=2$, $x_2=x_3=x_4=0$, $x_5=3$. Το επόμενο βήμα όμως θα ήταν εύκολο, μόνο να οι εξισώσεις συνεχίσουν να έχουν βολική μορφή. Για τον λόγο αυτό οδηγούμε την 2η ως προς την x_5 και αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα στη συνάρτηση κόστους και την 1η εξίσωση είναι: $3x_5=9-x_2-x_3$. Έτσι
Ελαχιστοποίηση της $7x_3-x_4-(9-x_2-x_3)$ υπό τους περιορισμούς
$x_1-(2/3)x_2-(1/3)x_3+6x_4=2$ και $(1/3)x_2+(1/3)x_3+x_5=3$.

Το επόμενο βήμα είναι εύκολο. Ο μοναδικός αρνητικός συντελεστής στο κόστος σημαίνει ότι το x_4 πρέπει να είναι η εισερχόμενη μεταβλητή. Τα πηλία 2/6 και 3/0 δείχνουν ότι το x_1 πρέπει να είναι η απερχόμενη μεταβλητή. Η νέα κορυφή $x_2=x_3=x_1=0$, $x_4=1/3$, $x_5=3$ και το νέο κόστος είναι -9.3333 που είναι βέλτιστο.

Γραμμικός Προγραμματισμός και θεωρία Παιγνίων

Κάθε βήμα της μεθόδου simplex περιλαμβάνει αποφάσεις και χειρισμούς γραμμών -πρέπει να επιλεγούν οι εισερχόμενες και απερχόμενες μεταβλητές καθώς και ο τρόπος με τον οποίο θα μπουν και θα βγουν. Ένας τρόπος είναι να διατάξουμε τα δεδομένα σε έναν μεγάλο πίνακα ή ταμπλό. Για να εξηγήσουμε τις πράξεις τις εκτελούμε πρώτα στη γλώσσα των πινάκων καταλήγοντας σε έναν τύπο για το κόστος. Δίδεται ένας πίνακας A, η δεξία πλευρά b, το διάνυσμα κόστους c, οπότε το ταμπλό εκκίνησης είναι απλώς ένας μεγαλύτερος πίνακας.

$$\left[\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline c & 0 \end{array}\right]$$

Οι διαστάσεις του είναι m+1 επί m+n+1 με μία επιπλέον γραμμή και στήλη. Στην αρχή, μπορεί οι βασικές μεταβλητές να είναι αναμεμιγμένες με τις άλλες και το πρώτα βήμα να είναι να εμφανίσουμε μια μοναδική βασική μεταβλητή σε κάθε γραμμή.

Γραμμικός Προγραμματισμός και θεωρία Παιγνίων

Μετά από αυτό οι αποφάσεις λαμβάνονται εύκολα. Υποθέτοντας οι βασικές μεταβλητές είναι οι x_1, x_2, ..., x_n για την παρούσα κορυφή και ότι τα n υπόλοιπα x είναι ελεύθερα (μηδέν).Τότε οι πρώτες m στήλες του A σχηματίζουν έναν τετραγωνικό πίνακα B (το βασικό πίνακα αυτής της κορυφής) και οι τελευταίες n στήλες σχηματίζουν έναν m επί n πίνακα N. Αντίστοιχα, το διάνυσμα κόστους c διασπάται στο $[c_B\ c_N]$ και ο άγνωστος x στο $[x_B\ x_N]^T$. Στην ίδια την κορυφή είναι x_N=0. Πλέον χωρίς τις εν λόγω ελεύθερες μεταβλητές, η εξίσωση Ax=b μετατρέπεται στην Bx_B=b που προσδιορίζει τις βασικές μεταβλητές x_B. Για να κάνουμε πράξεις στο ταμπλό το θεωρούμε διαμερισμένο, με πρώτες τις βασικές στήλες:

$$T=\left[\begin{array}{c|c|c} B & N & b \\ \hline c_B & c_N & 0 \end{array}\right]$$

Γραμμικός Προγραμματισμός και θεωρία Παιγνίων

Οι βασικές μεταβλητές θα μείνουν μόνες τους, αν μπορέσουμε και εμφανίσουμε τον μοναδιαίο στην θέση του B. Άρα θα πρέπει να κάνουμε τα συνηθισμένα βήματα απαλοιφής γραμμών ώστε να φθάσουμε στον

$$T' = \left[\begin{array}{c|c|c} I & B^{-1}N & B^{-1}b \\ \hline c_B & c_N & 0 \end{array}\right]$$

στην πραγματικότητα κάνουμε πράξεις με τον B^{-1} και εφαρμόζουμε τεχνικές τις μεθόδου Gauss-Jordan. Στο τέλος αφαιρούμε c_B φορές το πάνω μέρος από το κάτω.

$$T'' = \left[\begin{array}{c|c|c} I & B^{-1}N & B^{-1}b \\ \hline 0 & c_N - c_B B^{-1}N & -c_B B^{-1}b \end{array}\right]$$

Γραμμικός Προγραμματισμός και θεωρία Παιγνίων

Το ταμπλό θα μας δώσει τη σωστή ερμηνεία. Το ζητούμενο ήταν να ελαχιστοποιήσουμε το cx υπό τις συνθήκες $x \geq 0$ & $Ax=b$. Η εξίσωση $Ax=b$ πολ/κε με τον B^{-1} και έδωσε

$$x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b$$

και το κόστος $$cx = c_B x_B + c_N x_N$$

μεταβλήθηκε σε $$cx = (c_N - c_B B^{-1} N) x_N + c_B B^{-1} b$$

Το σημαντικό είναι ότι όλα τα μεγέθη που χρειαζόμαστε εμφανίζονται στο ταμπλό.Στα άκρα δεξία εμφανίζονται οι βασικές μεταβλητές $x_B=B^{-1}b$. Το τρέχον κόστος είναι $cx=c_B B^{-1}b$, που περιέχεται στην κάτω γωνία με αρνητικό πρόσημο. Ενώ εξίσου σημαντικό είναι ότι μπορούμε να αποφασίζουμε αν η κορυφή είναι βέλτιστη εξετάζοντας το $r=c_N-cB^{-1}N$ στο μέσον της κάτω γραμμής. Αν κάποια στοιχεία του r είναι αρνητικά, το κόστος μπορεί να περιοριστεί ακόμη πιο πολύ (βλ. παραπάνω εξίσωση), δλδ να γίνει το $rx_N<0$. Ενώ αν $r \geq 0$, έχουμε βρει την καλύτερη κορυφή. Αυτό είναι το ***κριτήριο διακοπής ή συνθήκη βελτιστοποίησης.***

Γραμμικός Προγραμματισμός και θεωρία Παιγνίων

Η κάθετη συνιστώσα του r είναι το ***ανηγμένο κόστος*** -δείχνει τι στοιχίζει η χρήση μιας ελεύθερης μεταβλητής *μείον αυτό που εξοικονομεί*. Αν το απ'ευθείας κόστος (στο c_N) είναι μικρότερο από το εξοικονομούμενο (λόγω της χρήσης λιγότερων βασικών μεταβλητών) τότε αξίζει να δοκιμαστεί αυτή η μεταβλητή. Έστω ότι το πιο *αρνητικό* ανηγμένο κόστος είναι το r_i. Τότε η i-συνιστώσα του x_N θα είναι θετική. Αυτή είναι η ***εισερχόμενη μεταβλητή*** που αυξάνει από το μηδέν σε μια θετική τιμή α.
Η τιμή της α καθορίζεται από το άλλο άκρο της ακμής. Όσο αυξάνει η εισερχόμενη συνιστώδα x_i, οι άλλες συνιστώσες του x μπορει να μειώνονται (για να διατηρείται η Ax=b. Η πρώτη συνιστώσα x_k που μειώνεται και φτάνει στο μηδέν γίνεται μια ***απερχόμενη μεταβλητή*** -και μετατρέπεται από βασική σε ελεύθερη. *Όταν μια συνιστώσα του x_B γίνει μηδέν, έχουμε φθάσει σε μια γειτονική κορυφή.*

Γραμμικός Προγραμματισμός και θεωρία Παιγνίων

Σε αυτό το στάδιο έχουμε φθάσει σε ένα νέο x που είναι και εφικτό και βασικό: Εφικτό διότι ισχύει $x \geq 0$ και βασικό γιατί έχουμε πάλι. Η i-οστή συνιστώσα του x_N (ποιυ ξεκίνησε από 0 και κατέληξα σε α) αντικαθιστά την k-οστή συνιστώσα του x_B που μειώθηκε στο μηδέν.

Στο τελικό ταμπλό περιέοντο οι στήλες $B^{-1}b$ και $B^{-1}u$ (μια αρνητική στήλη του του B-1N που βρίσκεται κάτω από το πιο αρνητικό στοιχείο της τελευταίας γραμμής r).

Γραμμικός Προγραμματισμός και θεωρία Παιγνίων

Παραδειγμα: Με τη συνάρτηση κόστους x+y και τους περιορισμούς x+2y-w=6 κια 2x+y-v=6, το πρώτο ταμπλό είναι:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Αν ξεκινήσουμε από την κορυφή P (βλ. Γράφημα) , όπου η x=0 τέμνει την 2x+y=6 (δηλαδή v=0), τότε οι βασικές μεταβλητές είναι οι άλλες δύο, y & w. Για να είμαστε συστηματικοί εναλλάσουμε τις στήλες 1 και 3, έτσι ώστε οι βασικές μεταβλητές να τοποθετηθούν πριν από τις ελεύθερες:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & 2 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 6 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Κατόπιν για την απαλοιφή πολ/με με -1 για να δώσει μοναδιαίο οδηγό και χρησιμοποιεί την 2η γραμμή για να παράξει μηδενικά στη 2η στήλη.

Γραμμικός Προγραμματισμός και θεωρία Παιγνίων

Παραδειγμα(..συνέχεια): Κατόπιν για την απαλοιφή πολ/με με -1 για να δώσει μοναδιαίο οδηγό και χρησιμοποιεί την 2η γραμμή για να παράξει μηδενικά στη 2η στήλη.

$$T'' = \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 6 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 & -6 \end{array}\right]$$

Εξετάζουμε το r=[-1 1] στην κάτω γραμμή. Αυτό έχει ένα αρνητικό στοιχείο οπότε η παρούσα κορυφή w=y=6 και το παρόν κόστος +6 δεν είναι βέλτιστα. Η αρνητική συνιστώσα είναι στην 3η στήλη, οπότε η τρίτη μεταβλητή θα εισέλθει στη βάση. Η στήλη πάνω από το αρνητικό στοιχείο είναι $B^{-1}u=[3\ 2]^T$ και τα πηλίκα τους με την τελευταία στήλη είναι 6/3 και 6/2. Επειδή το πρώτο πηλίκο είναι το μικρότερο, η μεταβλητή που θα απέλθει από τη βάση είναι η πρώτη (και πρώτη του ταμπλό).

Γραμμικός Προγραμματισμός και θεωρία Παιγνίων

Παραδειγμα(..συνέχεια): Στο νέο ταμπλό εναλλάσονται οι 1 & 3 και η οδήγηση με απαλοιφή δίνει:

$$\left[\begin{array}{rr|rr|r} 3 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 6 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{rr|rr|r} 1 & 0 & 1/3 & -2/3 & 2 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & -4 \end{array}\right]$$

Το r=[1/3 1/3] είναι θετικό και το κριτήριο διακοπής ικανοποιείται. Η κορυφή είναι x=y=2 και το κόστος της +4 είναι ελάχιστο.

Γραμμικός Προγραμματισμός και θεωρία Παιγνίων

Κατορθώσαμε την μετάβαση από τη γεωμετρία της μεθόδου simplex στην άλγεβρα. Ξέρουμε ότι αποφασιστική σημασία έχει το διάνυσμα r και ο λόγος a. Αυτά είναι τα πιο σημαντικά κομμάτια της μεθόδου και μπορούν να οργανωθούν με 3 τρόπους:
(1) Με ένα ταμπλο
(2) υπολογίζοντας τον B^{-1} και ανανεώνοντάς τον όταν η i-οστή στήλη u του N αντικαθιστά την k-οστή στήλη του B.
(3) Υπολογίζοντας τον B=LU, και ανανεώνοντας αυτούς τους παράγοντες αντί του B^{-1}.

Τα παραπάνω αποτελούν την ιστορία της μεθόδου simplex. Παρόλα αυτά σήμερα η χρήση του ταμπλό περιορίζεται μόνο στα βιβλία... δηλαδή για διδακτικούς σκοπούς. Το γιατί γίνεται κατανοητό ως εξης: αφού υπολογισθεί το r και ο πιο αρνητικός συντελεστής υποδείξει την στήλη που θα μπει στη βάση, καμιά από τις άλλες στήλες πάνω από την r δεν πρόκειται να ξαναχρησιμοποιηθεί. Άρα ο υπολογισμός τους θα ήταν σπατάλη χρόνου, και σε ένα μεγάλο πρόβλημα θα υπολογίζοταν συνεχώς περιμένοντας να μπουν στη βάση.

Γραμμικός Προγραμματισμός και θεωρία Παιγνίων

Οπότε πρέπει να εγκαταλειφθεί το ταμπλό. Αυτό που πρέπει να δούμε είναι το ποιοι υπολογισμοί είναι αναγκαίοι. Κάθε βήμα εναλλάσσει μια στήλη του N με μια στήλη του B και πρέπει να αποφασίσει (από το r και το α) ποιες στήλες θα επιλέξει. Ξεκινώντας από τον τρέχοντα βασικό πίνακα B και την τρέχουσα λύση $x_B=B^{-1}b$, το βήμα αυτό απαιτεί τον ακόλουθο κύκλο πράξεων:

(1) Υπολόγισε το διάνυσμα γραμμή $\lambda=c_B B^{-1}$ και το διάνυσμα του ανηγμένου κόστους $r=c_N-\lambda N$.
(2) Εάν $r\geq 0$ σταμάτησε: η παρούσα λύση είναι η βέλτιστη. Διαφορετικά, αν ri είναι η πιο αρνητική συνιστώσα, διάλεξε την i-στη στήλη του N ως εισερχόμενη στη βάση. Συμβόλισε την τελευταία με u.
(3) Υπολόγισε το $v=B^{-1}u$.
(4) Υπολόγισε τα πηλικά του $B^{-1}b$ ως προς $B^{-1}u$, εξετάζοντας μόνο τις θετικές συνιστώσες του $B^{-1}u$. Εάν δεν υπάρχουν θετικές συνιστώσες, το ελάχιστο κόστος είναι $-\infty$. Εάν το μικρότερο πηλίκο λαμβάνεται στην k-στή συνιστώσα, τότε η k-στή στήλη του τρέχοντος θα απέλθει.
(5) Ενημέρωσε τον B (η B^{-1}) και την λύση $x_B=B^{-1}b$. Επέστρεψε στο (1).

Γραμμικός Προγραμματισμός και θεωρία Παιγνίων

Αυτή η μέθοδος ονομάζεται ***αναθεωρημένη μέθοδος simplex***. Ολοκληρώνουμε την παρουσιασή της μόλις δείξουμε τον υπολογισμό των βημάτων (1), (3) & (5):

$$\boldsymbol{\lambda = c_B B^{-1},\ v = B^{-1} u} \text{ και } \boldsymbol{x_B = B^{-1} b}$$

Ο πιο δημοφιλής τρόπος είναι να εργαστούμε κατευθείαν με τον B^{-1}, υπολογίζοντάς τον αναλυτικά στην πρώτη κορυφή. Κατόπιν, στις επόμενες κορυφές, η οδήγηση είναι απλή. Όταν η στήλη του μοναδιαίου πίνακα αντικατασταθεί με την u, τότε η στήλη k του B^{-1} αντικαθίσταται από την $v=B^{-1}u$. Η απαλοιφή για να επιστρέψει στον ταυτοτικό πίνακα, θα πολλαπλασίασει τον παλαιό B^{-1} με τον:

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & v_1 & \\ & \cdot & \cdot & \\ & & v_k & \\ & & \cdot & \cdot \\ & & v_n & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & -v_1/v_k & \\ & \cdot & \cdot & \\ & & 1/v_k & \\ & & \cdot & \cdot \\ & & -v_n/v_k & 1 \end{bmatrix}$$

Γραμμικός Προγραμματισμός και θεωρία Παιγνίων

Πολλοί απλοί κώδικες χρησιμοποιούν την ***πολλαπλασιαστική μορφή του αντιστρόφου***, που απομνημονεύει τους πίνακες E^{-1}, αντί να ανανεώνει απευθείας τον B^{-1}. Όταν χρειασθεί, αυτοί εφαρμόζονται και στα b και c_B. Σε κανονικά διαστήματα (ενδεχομένως κάθε 40 βήματα της simplex) ο B^{-1} ξαναϋπολογίζεται και οι E^{-1} διαγράφονται.

Μια πιο πρόσφατη προσέγγιση είναι με τη χρήση μεθόδων αριθμητικής γραμμικής άλγεβρας θεωρώντας τις

$$\boldsymbol{\lambda=c_B B^{-1}},\ \boldsymbol{v=B^{-1}u} \text{ και } \boldsymbol{x_B=B^{-1}b}$$

σαν τρεις εξισώσεις που έχουν κοινό τον πίνακα των συντελεστών B:

$$\boldsymbol{\lambda B=c_B},\ \boldsymbol{Bv=u} \text{ και } \boldsymbol{Bx_B=b}$$

Κατόπιν η συνηθισμένη παραγοντοποίηση B=LU (ή PB=LU, με εναλλαγές γραμμών) οδηγεί στις τρεις λύσεις. Οι L & U ανανεώνονται αντί να υπολογίζονται ξανά.

Γραμμικός Προγραμματισμός και θεωρία Παιγνίων

Τέλος, πόσα βήματα απαιτούνται; Αυτό είναι αδύνατο να απαντηθεί εκ των προτέρων. Η μέθοδος συνήθως ελέγχει m ή 3m/2 διαφορετικές κορυφές, δηλαδή γύρω στις m^2n πράξεις. Συγκρίσιμο μέγεθος με αυτό της απαλοιφής στο Ax=b. Ωστόσο το μήκος της διαδρομής δεν μπορεί να φράσσεται από κάποιο σταθερό πολλαπλάσιο η δύναμη του m. Τα χειρότερα εφικτά σύνολα μπορούν να αναγκάσουν την μέθοδο να δοκιμάσει όλες τις κορυφές.

Μέχρι πρόσφατα δεν ήταν γνωστό αν ο γραμμικός προγραμματισμός ανήκει στην κατηγορία P -επιλύσιμων σε πολυωνυμικό χρόνο- ή στην NP. Για τα NP προβλήματα πιστεύεται, χωρίς να έχει αποδειχθεί, ότι όλοι οι προσδιοριστικοί αλγόριθμοι έχουν εκθετικό χρόνο λειτουργίας μέχρι να τερματίσουν (και πάλι στην χειρότερη περίπτωση).