

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Τα wavelets (wvlt) είναι μαθηματικές συναρτήσεις οι οποίες διαμερίζουν τα δεδομένα (φάσμα) ανάλογα με την συχνότητά τους.

Πλεονεκτούν σε σχέση με τις παραδοσιακές τεχνικές Fourier στο γεγονός ότι μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην ανάλυση καταστάσεων όπου το σήμα χαρακτηρίζεται από **ασυνέχειες** και **απότομες αυξομειώσεις**.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

=> Είναι ενδιαφέρον ότι για διαφορετικούς λόγους το πεδίο αναπτύχθηκε ανέξαρτητα στους τομείς:

- Μαθηματικά**
- Κβαντική Φυσική**
- Γεωλογία των σεισμών**
- Ηλεκτρική Μηχανική**

=> Ενώ αλληλεπιδράσεις μεταξύ των παραπάνω δημιούργησαν νέα πεδία εφαρμογής, όπως:

- Image compression**
- Turbulence**
- Human vision**
- Radar**
- Earthquake prediction**

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

- **Αρχικά θα παρουσιάσουμε τον μετασχηματισμό Fourier**
- **Στη συνέχεια θα συγκρίνουμε μετασχηματισμούς Fourier vs. Wavelets.**
- **Θα συζητήσουμε ειδικά θέματα των wvlt όπως και κάποιες ιδιότητές τους**
- **Και τέλος θα δούμε κάποιες ενδιαφέροντες εφαρμογές**

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Τα wvltts στηρίζονται στην ιδέα ότι η **ανάλυση βασίζεται στην κλίμακα που ορίζει το κάθε πρόβλημα ξεχωρίστα.**

Ποιο συγκεκριμένα είναι συναρτήσεις που ικανοποιούν συγκεκριμένες μαθηματικές απαιτήσεις προκειμένου για

- Την παρουσίαση άλλων συναρτήσεων
- Την παρουσίαση άλλων δεδομένων.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Στην ίδια αρχή στηρίχθηκε και ο Joseph Fourier όταν ανακάλυψε ότι μπορεί να υπερθέσει ημίτονα και συνημίτονα προκειμένου για να περιγράψει άλλες συναρτήσεις.

Παρόλα στα *wvls* η κλίμακα υπό την οποία μελετάμε τα δεδομένα παίζει έναν ιδιαίτερο ρόλο. Όλοι οι σχετικοί αλγόριθμοι επεξεργάζονται τα δεδομένα σε διαφορετικές κλίμακες ή αναλύσεις.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Έτσι όταν μελετάμε ένα σήμα με ένα “ευρύ” παράθυρο τότε αντιλαμβανόμαστε μόνο τα αδρά χαρακτηριστικά.

Ενώ όταν μελετάμε ένα σήμα με ένα “στενό” παράθυρο τότε μπορούμε να διακρίνουμε και λεπτομέρειες, με άλλα λόγια αυξάνει η διακριτική ικανότητα.

Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι με τα $wvls$ μπορούμε

“να δούμε τόσο το δάσος όσο και τα δένδρα”

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

=> Αντίθετα στην ανάλυση Fourier η χρήση των ημιτόνων και συνημιτόνων περιορίζει την διακριτική ικανότητα εξαιτίας του γεγονότος ότι οι συναρτήσεις αυτές (εξ ορισμού) δεν είναι local και επεκτείνονται στο άπειρο. Για αυτόν τον λόγο δεν αποδίδουν καλά σε απότομες διακυμάνσεις.

=> Ενώ με τα *wvlts* μπορούμε να εισάγουμε στην ανάλυση μας προσεγγιστικές συναρτήσεις για να περιγράψουμε κάθε πεπερασμένη περιοχή. Με λίγα λόγια είναι το ιδανικό εργαλείο για να περιγράψουμε δεδομένα που εμφανίζουν απότομες ασυνέχειες.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Τρόπος εργασίας:

- Εκλέγουμε μια $wvlt$ συνάρτηση η οποία ονομάζεται $wvlt$ *ανάλυσης* ή *μητρικό $wvlt$* .
- Το ίδιο $wvlt$ χρησιμοποιείται στην εκδοχή του με *υψηλή συχνότητα* προκειμένου για παροδική ανάλυση, ενώ στην εκδοχή του με *χαμηλή συχνότητα* στην ανάλυση των *συχνοτήτων*.

Εξαιτίας του γεγονότος ότι τα αρχικά δεδομένα μπορούν να περιγραφούν ως προς γραμμικοί συνδυασμοί των $wvlt$ s, συνεπάγεται ότι μπορούμε να δουλέψουμε χρησιμοποιώντας μόνο τους συντελεστές του γραμμικού συνδυασμού.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Εξαιτίας του γεγονότος ότι τα αρχικά δεδομένα μπορούν να περιγραφούν ως προς γραμμικοί συνδυασμοί των w_n 's, συνεπάγεται ότι μπορούμε να δουλέψουμε χρησιμοποιώντας μόνο τους συντελεστές του γραμμικού συνδυασμού.

Ενώ αν διαλέξουμε προσεκτικά τα κατάλληλα w_n 's ή τους συντελεστές (π.χ. θέτοντας ένα όριο) τότε μπορούμε να περιγράψουμε τα αρχικά δεδομένα με έναν πολύ πιο οικονομικό τρόπο. **Για τον λόγο αυτό τα w_n 's είναι ένα πολύτιμο εργαλείο στο πεδίο του *data compression*.**

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι τα wvlt's μπορούν να χρησιμοποιηθούν:

- **Αστρονομία**
- **Ακουστική**
- **Πυρηνική μηχανική**
- **Sub band coding**
- **Επεξεργασία σήματος – εικόνας.**
- **Νευροφυσιολογία**
- **Μουσική**
- **Μαγνητικό συντονισμό**
- **Διακριτοποίηση φωνής**
- **Οπτική**
- **Fractals**
- **Turbulence**
- **Πρόγνωση σεισμών**
- **Radar**
- **Ανθρώπινη όραση**
- **Αλλά και σε καθαρά μαθηματικά π.χ. Επίλυση Μερικών διαφορικών εξισώσεων**

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Για να κατανοήσουμε το πως φτάσαμε στα $wvlts$ θα περιγράψουμε την πορεία της ανάλυσης συχνοτήτων στο χρόνο.

1) Αρχικά ο Joseph Fourier ανέπτυξε την θεωρία για την ανάλυση συχνοτήτων γνωστή και ως *σύνθεση Fourier*. Βασίζεται στην λογική ότι κάθε 2π περιοδική συνάρτηση $f(x)$ περιγράφεται από

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

των σειρών Fourier. Τα a_0 , a_k , b_k υπολογίζονται ως:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Στη συνέχεια και έπειτα από ανάλυση της σημασίας των εξισώσεων, της σύγκλισης των σειρών Fourier, και την μελέτη ορθογωνικών συστημάτων προέκυψε η μετάβαση από την *ανάλυση συχνοτήτων στην ανάλυση της κλίμακας*. Αυτό σημαίνει ότι αναλύουμε την $f(x)$ κατασκευάζοντας μαθηματικές δομές που μεταβάλλονται με την κλίμακα. Περιγραφικά η διαδικασία έχει ως εξής

- 1) Κατασκευάζουμε μια δομή
- 2) την μεταβάλλουμε κατά μια ποσότητα
- 3) μεταβάλλουμε την κλίμακά της
- 4) την εφαρμόζουμε στην $f(x)$ για να προσεγγίσουμε το σήμα
- 5) Επιστρέφουμε στο (1) και εφαρμόζουμε τα (2)-(3) για μια άλλη ποσότητα. Επαναλαμβάνουμε το βήμα (4) και λαμβάνουμε μια νέα προσέγγιση.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Περιγραφικά η διαδικασία έχει ως εξής

- 1) Κατασκευάζουμε μια δομή
- 2) την μεταβάλλουμε κατά μια ποσότητα
- 3) μεταβάλλουμε την κλίμακά της
- 4) την εφαρμόζουμε στην $f(x)$ για να προσεγγίσουμε το σήμα
- 5) Επιστρέφουμε στο (1) και εφαρμόζουμε τα (2)-(3) για μια άλλη ποσότητα. Επαναλαμβάνουμε το βήμα (4) και λαμβάνουμε μια νέα προσέγγιση.
- 6) Ξανα το (5).

Αποδεικνύεται η περιορισμένη ευαισθησία ως προς τον “θόρυβο” εξαιτίας του γεγονότος ότι λαμβάνει υπόψη τον μέσο όρο των εναλλαγών του σήματος σε διαφορετικές κλίμακες.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Η πρώτη αναφορά σε $wvlts$ έγινε στην διδακτορική εργασία του Haar (1907). Ένα χαρακτηριστικό του συγκεκριμένου $wvlt$ είναι ότι έχει *compact support*, δηλδ “κατασρέφεται” έξω από μια πεπερασμένη περιοχή. Το μειονέκτημά του είναι ότι δεν συνεχώς διαφορίσιμο περιορίζοντας τις εφαρμογές του.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Στη συνέχεια και στη δεκαετία του '30 μελετήθηκε η πιθανότητα παρουσίασης των συναρτήσεων χρησιμοποιώντας *συναρτήσεις βάσης μεταβλητής κλίμακας (SVBF)*.

Χρησιμοποιώντας μια SVBF, συγκεκριμένα την Haar συνάρτηση βάσης, ο Paul Levy μελέτησε την κίνηση Brown (ένα είδος τυχαίου σήματος). Παρατήρησε ότι την υπεροχή της συνάρτησης Haar ως προς τις αντίστοιχες Fourier, προκειμένου για να μελετήσει μικρές αλλά πολύπλοκες λεπτομέρειες της κίνησης Brown.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Μια άλλη εφαρμογή έγινε από τους Littlewood, Paley, and Stein στον υπολογισμό της ενέργειας μια συνάρτησης $f(x)$:

$$\text{energy} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$$

Τα αποτελέσματα του υπολογισμού διέφεραν όταν η ενέργεια ήταν συγκεντρωμένη γύρω από λίγα σημεία ή ήταν κατανεμημένη σε ένα μεγαλύτερο διάστημα. Αυτό σημαίνει ότι η ενέργεια δεν διατηρείται.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Έτσι, ανακάλυψαν μια συνάρτηση που μπορεί να μεταβάλεται ανάλογα με την κλίμακα και δεν αναιρεί την διατήρηση της ενέργειας όταν υπολογίζεται το συναρτησιοειδές της ενέργειας. Αυτό συνετέλεσε στην δημιουργία ενός αποτελεσματικού αλγόριθμου για αριθμητική επεξεργασία σήματος με χρήση wvltts (David Marr 1980s).

Συναρτήσεις Βάσης

It is simpler to explain a basis function if we move out of the realm of analog (functions) and into the realm of digital (vectors) (*).

Every two-dimensional vector (x, y) is a combination of the vector $(1, 0)$ and $(0, 1)$. These two vectors are the basis vectors for (x, y) . Why? Notice that x multiplied by $(1, 0)$ is the vector $(x, 0)$, and y multiplied by $(0, 1)$ is the vector $(0, y)$. The sum is (x, y) .

The best basis vectors have the valuable extra property that the vectors are perpendicular, or orthogonal to each other. For the basis $(1, 0)$ and $(0, 1)$, this criteria is satisfied.

Συναρτήσεις Βάσης

Now let's go back to the analog world, and see how to relate these concepts to basis functions. Instead of the vector (x, y) , we have a function $f(x)$. Imagine that $f(x)$ is a musical tone, say the note A in a particular octave. We can construct A by adding sines and cosines using combinations of amplitudes and frequencies. The sines and cosines are the basis functions in this example, and the elements of Fourier synthesis. For the sines and cosines chosen, we can set the additional requirement that they be orthogonal. How? By choosing the appropriate combination of sine and cosine function terms whose inner product add up to zero. The particular set of functions that are orthogonal *and* that construct $f(x)$ are our orthogonal basis functions for this problem.

Συναρτήσεις Βάσης Μεταβλητής Κλίμακος
Scale Varying Basis Functions
(SVBF)

What are Scale-varying Basis Functions?

A basis function varies in scale by chopping up the same function or data space using different scale sizes. For example, imagine we have a signal over the domain from 0 to 1. We can divide the signal with two step functions that range from 0 to $1/2$ and $1/2$ to 1. Then we can divide the original signal again using four step functions from 0 to $1/4$, $1/4$ to $1/2$, $1/2$ to $3/4$, and $3/4$ to 1. And so on. Each set of representations code the original signal with a particular resolution or scale.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ανάμεσα στα 1960-1980 οι G. Weiss – R.F. Coifman μελέτησαν τα απλούστερα στοιχεία του χώρου μιας συνάρτησης, τα άτομα, με σκοπό να α) βρουν τα άτομα μιας συνήθους συνάρτησης, και β) τον “κανόνα σύνθεσης” (*assembly rule*) που επιτρέπει την ανακατασκευή όλων των στοιχείων της συνάρτησης με αυτά τα άτομα.

Το 1980 οι Grossman and Morlet εισήγαγαν τα wvlts στην κβαντική φυσική.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Το 1985 ο S. Mallat έδωσε νέα ώθηση με την εργασία του στην ψηφιακή επεξεργασία σήματος. Παρατήρησε την ύπαρξη σχέσεων μεταξύ quadrature κατοπτρικών φίλτρων, πυραμιδικών αλγορίθμων, και ορθοκανονικών wvlt βάσεων.

Από αυτή την μελέτη ο Y. Meyer κατασκεύασε τα πρώτα non-trivial wvlts. Σε σχέση με τα wvlts του Haar είναι συνεχώς διαφορίσιμα αλλά δεν έχουν *compact support*.

Ενώ λίγα χρόνια αργότερα η I. Daubechies από την εργασία του Mallat κατασκεύασε ένα σύνολο από ορθοκανονικές συναρτήσεις βάσης πάνω στις οποίες βασίζονται όλες οι σημερινές εφαρμογές.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Timeline

Wavelets have had an unusual scientific history, marked by many independent discoveries and rediscoveries. The most rapid progress has come since the early 1980s, when a coherent mathematical theory of wavelets finally emerged.

1807

Jean Baptiste Joseph Fourier claims that any periodic function, or wave, can be expressed as an infinite sum of sine and cosine waves of various frequencies. Because of serious doubts over the correctness of his arguments, his paper is not published until 15 years later.

1930

John Littlewood and R.A.E.C. Paley, of Cambridge University, show that local information about a wave, such as the timing of a pulse of energy, can be retrieved by grouping the terms of its Fourier series into "octaves."

1976

IBM physicists Claude Galand and Daniel Esteban discover subband coding, a way of encoding digital transmissions for the telephone.

1984

Joint paper by Morlet and Grossmann brings the word "wavelet" into the mathematical lexicon for the first time.

1909

Alfred Haar, a Hungarian mathematician, discovers a "basis" of functions that are now recognized as the first wavelets. They consist of a short positive pulse followed by a short negative pulse.

1946

Dennis (Denes) Gabor, a British-Hungarian physicist who invented holography, decomposes signals into "time-frequency packets" or "Gabor chirps."

1981

Petroleum engineer Jean Morlet of Elf-Aquitaine finds a way to decompose seismic signals into what he calls "wavelets of constant shape." He turns to quantum physicist Alex Grossmann for help in proving that the method works.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

1986

Stéphane Mallat, then at the University of Pennsylvania, shows that the Haar basis, the Littlewood-Paley octaves, the Gabor chirps, and the subband filters of Galand and Esteban are all related to wavelet-based algorithms.

1990

David Donoho and Iain Johnstone, at Stanford University, use wavelets to “denoise” images, making them even sharper than the originals.

1995

Pixar Studios releases the movie *Toy Story*, the first fully computer-animated cartoon. In the sequel, *Toy Story 2*, some shapes are rendered by subdivision surfaces, a technique mathematically related to wavelets.

1985

Yves Meyer of the University of Paris discovers the first smooth orthogonal wavelets.

1987

Ingrid Daubechies constructs the first smooth orthogonal wavelets with compact support. Her wavelets turn the theory into a practical tool that can be easily programmed and used by any scientist with a minimum of mathematical training.

1992

The FBI chooses a wavelet method developed by Tom Hopper of the FBI’s Criminal Justice Information Services Division and Jonathan Bradley and Chris Brislawn from Los Alamos National Laboratory, to compress its enormous database of fingerprints.

1999

The International Standards Organization approves a new standard for digital picture compression, called JPEG-2000. The new standard uses wavelets to compress image files by 1:200 ratios with no visible loss in image quality. Web browsers are expected to support the new standard by 2001.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ανάλυση Fourier

Η ιδέα του Fourier για παρουσίαση των συναρτήσεων ως υπέρθεση ημιτόνων και συνημιτόνων είναι κεφαλαιώδους σημασίας τόσο για την αναλυτική όσο και για την αριθμητική επίλυση διαφορικών εξισώσεων και για την ανάλυση αλλά και επεξεργασία σημάτων.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ανάλυση Fourier

Discrete Fourier Transform (DFT)

Στην περίπτωση του DFT ο μετασχηματισμός εφαρμόζεται σε μια συνάρτηση από ένα πεπερασμένο πλήθος των σημείων της. Η σειρά Fourier είναι μια ανάλυση σε ημίτονα και συνημίτονα:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots$$

Για να υπολογίσετε το b_1 πολλαπλασιάστε και τις δύο πλευρές με $\sin x$ και ολοκληρώστε από 0 ως 2π (η συνάρτηση ορίζεται σε αυτό το διάστημα). Με άλλα λόγια πάρτε το εσωτερικό γινόμενο και των δύο πλευρών με το $\sin x$

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin x dx = a_0 \int_0^{2\pi} \sin x dx + a_1 \int_0^{2\pi} \cos x \sin x dx + b_1 \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx + \dots$$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ανάλυση Fourier

Discrete Fourier Transform (DFT)

Στην δεξιά πλευρά κάθε ένα από τα ολοκληρώματα είναι 0 εκτός από αυτό στο οποίο το $\sin x$ πολλαπλασιάζει τον εαυτό του. Τα ημίτονα και συνημίτονα είναι μεταξύ τους ορθογώνια. Άρα το b_1 είναι αριστερή πλευρά διαιρεμένη με το μοναδικό μη μηδενικό ολοκλήρωμα.

$$b_1 = \frac{\int_0^{2\pi} f(x) \sin x dx}{\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx} = \frac{(f(x), \sin x)}{(\sin x, \sin x)}$$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ανάλυση Fourier

Discrete Fourier Transform (DFT)

Για τον υπολογισμό του a_1 θα πολ/με με $\cos x$, για τον a_2 με $\cos 2x$, κοκ. Η αναλογία με τις προβολές στα διανύσματα προκύπτει αν θυμηθούμε ότι: Η συνιστώσα του διανύσματος b κατά μήκος της ευθείας που παράγει το a είναι:

$$\bar{x} = \frac{b^T a}{a^T a}$$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ανάλυση Fourier

Discrete Fourier Transform (DFT)

Σε μια σειρά προβάλλουμε την $f(x)$ πάνω στο $\sin x$. Η συνιστώσα του y σε αυτή την κατεύθυνση είναι ακριβώς $b_1 \sin x$ (Για διανύσματα ήταν \bar{y}). Ο συντελεστής b_1 είναι η λύση ελαχίστων τετραγώνων της μη επιλύσιμης εξίσωσης $b_1 \sin x = f(x)$, με άλλα λόγια αυτός φέρνει το $b_1 \sin x$ όσο το δυνατό πλησιέστερα στο y . Το ίδιο ισχύει για όλους τους όρους της σειράς, δηλ κάθε ένας είναι προβολή του y πάνω σε ένα ημίτονο ή συνημίτονο. Επειδή τα ημίτονα και τα συνημίτονα είναι ορθογώνια, η σειρά *Fourier* δίνει τις συντεταγμένες του διανύσματος $f(x)$ ως προς ένα σύνολο (άπειρων στο πλήθος) καθέτων αξόνων.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ανάλυση Fourier

Discrete Fourier Transform (DFT)

Για να κάνουμε DFT θα πρέπει από τις άπειρες διαστάσεις να περάσουμε σε πεπερασμένες. Δλδ καθαρή γραμμική άλγεβρα βασιζόμενη στην ορθογωνικότητα. Αντί της συνάρτησης $f(x)$ τα δεδομένα είναι μια ακολουθία αριθμών y_0, y_1, \dots, y_{n-1} . Το ζητούμενο είναι μια άλλη ακολουθία ιδίου μήκους ή αντί μιας άπειρης ακολουθίας ένα σύνολο n συντελεστών Fourier c_0, c_1, \dots, c_n . Η Σχέση μεταξύ των στοιχείων των δύο ακολουθιών είναι γραμμική, άρα πρέπει να δίδεται από ένα πίνακα: τον ΠΙΝΑΚΑ FOURIER, από τον οποίο εξαρτάται και ολόκληρη τεχνολογία επεξεργασίας σημάτων.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ανάλυση Fourier

Discrete Fourier Transform (DFT)

Ο πίνακας F είναι συμμετρικός και ορθογώνιος (εκτός από έναν συντελεστή \sqrt{n}) και έχει μόνο ένα μικρό ελάττωμα: τα στοιχεία του είναι μιγαδικοί αριθμοί. Βέβαια όλα τα στοιχεία των F, F^{-1} είναι δυνάμεις του ίδιου αριθμού w .

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ανάλυση Fourier

Discrete Fourier Transform (DFT)

Επίσης αντί για n^2 για τα n στοιχεία του πίνακα, ένα γινόμενο πινάκων σαν το $F^{-1} f(x)$ απαιτεί μόνο $(n \log n)/2$ βήματα. Η αναδιάταξη αυτή για να γίνει ο πολ/μος ονομάζεται Ταχύς Μετασχηματισμός Fourier.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ανάλυση Fourier

Discrete Fourier Transform (DFT)

Μιγαδικές λύσεις της μονάδας:

Οι φανταστικοί αριθμοί επινοήθηκαν για να δώσουν λύση στην $x^2+1=0$. Ενώ και για την $x^2-i=0$ υπάρχει λύση: Οι τετραγωνικές ρίζες μιγαδικών αριθμών είναι και αυτοί μιγαδικοί αριθμοί.

Θεωρείστε συνδυασμούς $x+iy$. Κάθε πολυώνυμο n βαθμού έχει n ρίζες.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ανάλυση Fourier

Discrete Fourier Transform (DFT)

Οι ρίζες της εξίσωσης $x^4-1=0$ θα έπρεπε να είναι οι τέσσερις ρίζες της μονάδας. Οι δύο τετραγωνικές ρίζες της μονάδας είναι $+1$ και -1 . Οι τέταρτες ρίζες είναι οι τετραγωνικές ρίζες των τετραγωνικών ριζών $1, -1, i, -i$. Για τις όγδοοες ρίζες χρειαζόμαστε τις τετραγωνικές ρίζες της i . Έτσι οδηγούμαστε σε μιγαδικούς αριθμούς $w=(1+i)/\sqrt{2} \Rightarrow w^2=i \Rightarrow w^8=i^4=1$.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ανάλυση Fourier

Discrete Fourier Transform (DFT)

Οι μιγαδικοί του πίνακα Fourier έχουν για πραγματικά μέρη τα συνημίτονα και για φανταστικά ημίτονα.

$$w = \cos\theta + i \sin\theta$$

Αν το πραγματικό μέρος σημειώνεται στον άξονα x και το φανταστικό στον άξονα y, τότε η απόσταση του w από το κέντρο είναι $1(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$. Ο w περιέχεται στον μοναδιαίο κύκλο και σχηματίζει με την οριζόντιο γωνία θ . Για να λύσουμε την $w^n = 1$ χρειαζόμαστε ειδικά σημεία του μοναδιαίου κύκλου.

$$w^2 = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta = \cos 2\theta - i\sin 2\theta$$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος Ανάλυση Fourier

Discrete Fourier Transform (DFT)

Υπολογίζουμε αρχικά το

$$w^2 = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta = \cos 2\theta - i\sin 2\theta$$

καταλαβαίνουμε ότι και το w^2 ανήκει στον κύκλο αλλά σχηματίζει γωνία 2θ . Άρα για το w^n μπορεί να είναι $n\theta$ η γωνία.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ανάλυση Fourier

Discrete Fourier Transform (DFT)

Υπάρχει ένας καλύτερος τρόπος για να σχηματίσουμε τις δυνάμεις του w . Προκύπτει ότι ο συνδυασμός ημιτόνου με το συνημίτονο είναι μια μιγαδική εκθετική δύναμη εύρους 1 και γωνίας φάσεως θ .

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

άρα $w^n = e^{in\theta}$ δηλ η n -ιοστή δύναμη σχηματίζει γωνία $n\theta$. Όταν $n=-1$ ο αντίστροφος $1/w$ σχηματίζει γωνία $-\theta$.

Ισχύει $w^*w^{-1}=1$?

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ανάλυση Fourier

Discrete Fourier Transform (DFT)

Για να κατανοήσετε το πως περάσαμε από τριγωνμετρικά μεγέθη στους μιγαδικούς αριθμούς λάβετε υπόψη

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \dots$$

όπου το πραγματικό μέρος είναι το συνημίτονο και το φανταστικό (χωρίς τα i) είναι το ημίτονο.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ανάλυση Fourier

Discrete Fourier Transform (DFT)

Για να λύσουμε την $w^n=1$ χρησιμοποιούμε την $e^{in\theta}=1$, οπότε το $n\theta$ θα πρέπει να φέρει στην αρχή του κύκλου. Η λύση να επιλέξουμε $\theta=2\pi/n$. Η πρωταρχική λύση της μονάδας είναι:

$$w_n = e^{2\pi i/n} = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$$

η w^n είναι $e^{2\pi i}$ που είναι ίσο με 1. Για $n=4$ και $n=8$:

$$w_4 = \cos\pi/2 + \sin\pi/2i = i,$$

$$w_8 = \cos\pi/4 + \sin\pi/4i = \sqrt{2}(1+i)/2$$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ανάλυση Fourier

Discrete Fourier Transform (DFT)

Η τέταρτη και η όγδοη ρίζα σχηματίζουν γωνίες 90° και 45° , αντίστοιχα. Αντιστοιχούν στα $360/4$ και $360/8$ αλλά δεν είναι οι μοναδικές. Οι υπόλοιπες τέταρτες ρίζες είναι οι δυνάμεις $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$. Ενώ οι όγδοες ρίζες είναι οι δυνάμεις $2,3,4,\dots,8$. Οι ρίζες ισαπέχουν μεταξύ τους κατά $2\pi/n$. Παρατηρείστε ότι το τετράγωνο της w_8 είναι το w_4 (σημαντικό στον FFT). Επίσης παρατηρείστε ότι το άθροισμα όλων των ριζών είναι 0 (σημεία στον κύκλο με ίσες και αντιθετες συντεταγμένες).

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ανάλυση Fourier

Discrete Fourier Transform (DFT)

Ο πίνακας Fourier:

Στη συνεχή περίπτωση η σειρά Fourier αναπαράγει την $f(x)$ σε όλο το διάστημα ορισμού της χρησιμοποιώντας άπειρα ημίτονα και συνημίτονα. Στην διακριτή περίπτωση που εκλέγουμε μόνο n συντελεστές δεν μπορούμε να περιμένουμε κάτι παρόμοιο.

Ζητάμε μόνο την ισότητα σε n σημεία, δηλ n εξισώσεις. Σε ένα τυπικό πρόβλημα με $n=4$, οι τιμές που παράγουν τις τιμές 2, 4, 6, 8 είναι:

$$c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = 2$$

$$c_0 + ic_1 - c_2 - ic_3 = 4$$

$$c_0 - c_1 + c_2 - c_3 = 6$$

$$c_0 - ic_1 - c_2 + ic_3 = 8$$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ανάλυση Fourier

Discrete Fourier Transform (DFT)

Ο πίνακας Fourier:

Η ακολουθία των δεδομένων είναι $f(x)=2,4,6,8$. Η ακολουθία των ζητούμενων είναι c_0, c_1, c_2, c_3 . Οι εξισώσεις μπορούν να προσδιορίσουν μια σειρά Fourier τεσσάρων όρων που ταιριάζει στα δεδομένα για τέσσερα ισαπέχοντα σημεία από 0 ως 2π :

$$c_0 + c_1 e^{1ix} + c_2 e^{2ix} + c_3 e^{3ix} = \begin{cases} 2 & x = 0 \\ 4 & x = \pi/2 \\ 6 & x = \pi \\ 8 & x = 3\pi/2. \end{cases}$$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ανάλυση Fourier

Discrete Fourier Transform (DFT)

Ο πίνακας Fourier:

Για $x=2\pi$ η σειρά επιστρέφει στην αρχική της τιμή $f(x_0)=2$ και συνεχίζει περιοδικά.

Η σειρά Fourier γράφεται συχνότερα στην εκθετική της μορφή, ως συνδυασμός των εκθετικών e^{ikx} , παρά ως συνδυασμός ημιτόνων-συνημιτόνων. Όταν συμπεριλαμβάνονται όλες οι αρμονικές, οι δύο τρόποι είναι ισοδύναμοι, λόγω

$$c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx} = a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ανάλυση Fourier

Discrete Fourier Transform (DFT)

Ο πίνακας Fourier:

Γράφοντας το σύστημα υπο μορφή πινάκων είναι $Fc=f(x)$ είναι:

$$F^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & i^2 & i^3 \\ 1 & i^2 & i^4 & i^6 \\ 1 & i^3 & i^6 & i^9 \end{bmatrix}$$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ανάλυση Fourier

Discrete Fourier Transform (DFT)

Ο πίνακας Fourier:

Η διαδικασία που περιγράψαμε επεκτείνεται σε κάθε n , όπου ο πίνακας που συνδέει το $f(x)$ με το c μπορεί να καταγραφεί και να αντιστραφεί εύκολα. Ο πίνακας παριστάνει n εξισώσεις, κάθε μια από τις οποίες απαιτεί από την πεπερασμένη σειρά $c_0 + c_1 e^{ix} + \dots$ (n όροι) να συμπίπτει με το $f(x)$ σε κάθε σημείο. Η πρώτη συμβαίνει για $x=0$:

$$c_0 + c_1 + \dots + c_{n-1} = f(x_0)$$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ανάλυση Fourier

Discrete Fourier Transform (DFT)

Ο πίνακας Fourier:

Η δεύτερη συμβαίνει για $x=2\pi/n$, που εισάγει τον κρίσιμο αριθμό $w=e^{i2\pi/n}$:

$$c_0 + c_1 w + \dots + c_{n-1} w^{n-1} = f(x_1)$$

Η τέταρτη συμβαίνει για $x=4\pi/n$, που εισάγει τον κρίσιμο αριθμό $w=e^{i4\pi/n}$ που είναι το w^2 :

$$c_0 + c_1 w^2 + \dots + c_{n-1} w^{2(n-1)} = f(x_2)$$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ανάλυση Fourier

Discrete Fourier Transform (DFT)

Ο πίνακας Fourier:

Τα υπόλοιπα σημεία εισάγουν ανώτερες δυνάμεις του w και τελικά το σύστημα (ο πίνακας) γίνεται:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & 1 \\ 1 & w & w^2 & \cdot & w^{n-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \cdot & w^{2(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & w^{n-1} & w^{2(n-1)} & \cdot & w^{(n-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \cdot \\ f(x_{n-1}) \end{bmatrix}$$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ανάλυση Fourier

Discrete Fourier Transform (DFT)

Ο πίνακας Fourier:

Για $n=4$ ο αριθμός ήταν w ήταν το i , η τέταρτη ρίζα της μονάδας. Γενικά ο w ισούται με την πρώτη n -οστή ρίζα της μονάδας $e^{i2\pi/n}$. Το στοιχείο του F στην j γραμμή και στην k στήλη είναι μια δύναμη του w : $F_{jk} = w^{jk}$. Η πρώτη γραμμή έχει $j=k=0$ άρα $F_{0k} = 1$.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ανάλυση Fourier

Discrete Fourier Transform (DFT)

Ο πίνακας Fourier:

Για να βρούμε τα c πρέπει να αντιστρέψουμε τον F . Στην περίπτωση 4×4 ο αντίστροφος περιείχε δυνάμεις του $-i$, με άλλα λόγια ο F^{-1} κατασκευάζοταν από το $1/i$. Αυτός είναι και ο γενικός κανόνας: ο F^{-1} προκύπτει από τον μιγαδικό αριθμό w^{-1} , που σχηματίζει γωνία $-2\pi/n$, ενώ ο w σχηματίζει γωνία $2\pi/n$:

$$F^{-1} = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & 1 \\ 1 & w^{-1} & w^{-2} & \cdot & w^{-(n-1)} \\ 1 & w^{-2} & w^{-4} & \cdot & w^{-2(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & w^{-(n-1)} & w^{-2(n-1)} & \cdot & w^{-(n-1)^2} \end{bmatrix}$$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ανάλυση Fourier

Discrete Fourier Transform (DFT)

Ο πίνακας Fourier:

Για $n=2$ και $n=3$:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, F^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i2\pi/3} & e^{i4\pi/3} \\ 1 & e^{i4\pi/3} & e^{i8\pi/3} \end{bmatrix}, F^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-i2\pi/3} & e^{-i4\pi/3} \\ 1 & e^{-i4\pi/3} & e^{-i8\pi/3} \end{bmatrix}$$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ανάλυση Fourier

Discrete Fourier Transform (DFT)

Ο πίνακας Fourier:

και ο αντίστροφος F^{-1} αμέσως προκύπτει ότι είναι:

$$F^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & (-i) & (-i)^2 & (-i)^3 \\ 1 & (-i)^2 & (-i)^4 & (-i)^6 \\ 1 & (-i)^3 & (-i)^6 & (-i)^9 \end{bmatrix}$$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ανάλυση Fourier

Discrete Fourier Transform (DFT)

Ο πίνακας Fourier:

Πρέπει να επαληθεύσουμε ότι ο FF^{-1} ισούται με τον I πίνακα.

Για την κύρια διαγώνιο είναι σαφές. Η γραμμή j του F^{-1} επί τη στήλη j του F είναι $(1/n)(1+1+\dots+1)=(1/n)n=1$. Μένει να δούμε τι γίνεται με τα στοιχεία εκτός της διαγωνίου, όπου πρέπει να δείξουμε ότι η γραμμή j του F επί τη γραμμή k του F^{-1} ισούται με μηδέν:

$$1 \cdot 1 + w^j \cdot w^{-k} + w^{2j} \cdot w^{-2k} + \dots + w^{(n-1)j} \cdot w^{(n-1)k} = 0, \quad j \neq k$$

Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι οι όροι αυτοί είναι δυνάμεις του $W=w^j w^k$:

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ανάλυση Fourier

Discrete Fourier Transform (DFT)

Ο πίνακας Fourier:

$$1 \cdot 1 + W + W^2 + \dots + W^{(n-1)} = 0.$$

και πάλι να λάβουμε υπόψη ότι και το W είναι μια ρίζα της μονάδας: $W^n = W^{nj} W^{-nk} = 1^j 1^{-k} = 1$. Τα j, k είναι διαφορετικά του 1 και το W είναι διαφορετικό. Όμως ισχύει ότι:

$$1 - W^n = (1 - W)(1 + W + W^2 + \dots + W^{(n-1)})$$

και επειδή $W^n = 1$ και $W \neq 1$ τότε η δεύτερη παρένθεση στο δεξιό μέλος είναι μηδεν.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ομοιότητες μεταξύ των μετασχηματισμών Fourier – Wavelet:

Ο FFT και ο DWT είναι γραμμικές διαδικασίες που δημιουργούν μια δομή δεδομένων με $\log_2 n$ στοιχεία διαφόρων μεγεθών, τα οποία τα αποθηκεύουν και τα μετασχηματίζουν σε ένα διάνυσμα με μέγεθος 2^n .

Ο αντίστροφος πίνακας για FFT-DWT είναι ίσος με τον ανάστροφο του αρχικού. Οπότε και οι δύο μετασχηματισμοί μπορούν να θεωρηθούν σαν περιστροφές σε έναν συναρτησιακό χώρο σε μια διαφορετική περιοχή. Για τον FFT αυτή η περιοχή

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ομοιότητες μεταξύ των μετασχηματισμών Fourier – Wavelet:

Οι συναρτήσεις βάσης για τον FFT σε αυτή την περιοχή είναι ημίτονα και συνημίτονα. Για τον DWT, οι συναρτήσεις βάσης είναι τα $wvlt$ s, μητρικά $wvlt$ s, ή $wvlt$ s ανάλυσης.

Μια ακόμη ομοιότητά τους βρίσκεται στο γεγονός ότι οι συν. βάσης είναι τοπικές ως προς την συχνότητα, καθιστώντας χρησιμα τα μαθηματικά εργαλεία όπως το power spectra (δλδ πόση δύναμη περιέχεται σε ένα διάστημα συχνοτήτων) και των scalegrams (σε επομενη διαφανεια) για την επιλογή συχνοτήτων και για κατανομές δύναμης.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Διαφορές μεταξύ των μετασχηματισμών Fourier – Wavelet:

Η πιο ενδιαφέρουσα διαφορά έγκειται στο γεγονός ότι οι συναρτήσεις wvlτ είναι τοπικές (localized) στον χώρο ενώ τα ημίτονα και συνημίτονα δεν είναι. Αυτό το χαρακτηριστικό των wvlτ μαζί με το γεγονός ότι είναι localized και ως προς τη συχνότητα, έχει ως αποτέλεσμα να μετατρέπει πολλές συναρτήσεις και τελεστές σε “sparse” όταν τις επεξεργάζομαστε με wvlτ. Αυτό με τη σειρά του έχει ως αποτέλεσμα πολλές χρήσιμες εφαρμογές όπως data compression, detecting features in images, και απομάκρυνση του θορύβου από χρονοσειρές.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Διαφορές μεταξύ των μετασχηματισμών Fourier – Wavelet:

Ένας τρόπος για να δούμε τις διαφορές στην ανάλυση σε χρόνο-συχνότητα για τους δύο μετασχηματισμούς είναι να παρατηρήσουμε στο πως καλύπτουν το επίπεδο χρόνου-συχνότητας οι συν. βάσης. Στο σχήμα βλέπουμε ένα $W(\text{indowed})FT$ όπου το $w(\text{indow})$ είναι ένα τετραγωνικό κύμα. Το $w(\text{indow})$ τετραγωνικού κύματος “στρογγυλοποιεί” τις συναρτήσεις sine-cosine για να ταιριάζουν σε ένα $w(\text{indow})$ συγκεκριμένου μεγέθους.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Διαφορές μεταξύ των μετασχηματισμών Fourier - Wavelet:

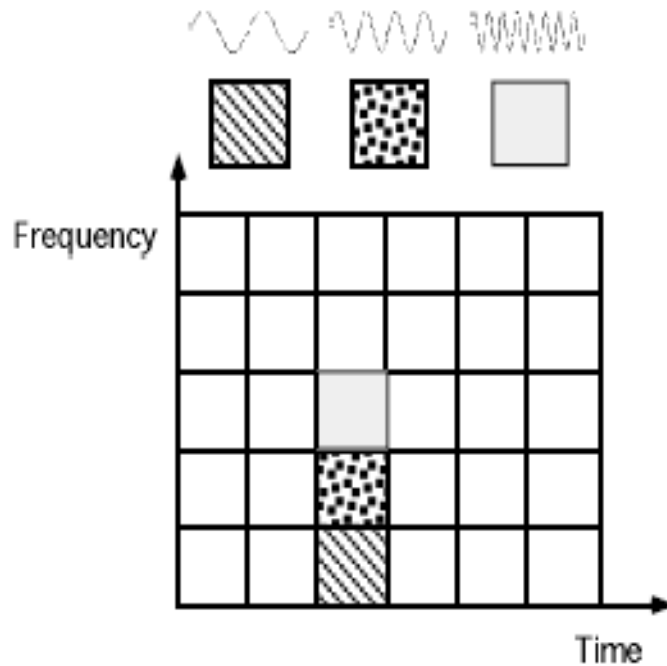


Fig. 1. Fourier basis functions, time-frequency tiles, and coverage of the time-frequency plane.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Διαφορές μεταξύ των μετασχηματισμών Fourier – Wavelet:

Επειδή ένα και μόνο window χρησιμοποιείται για όλες τις συχνότητες η διακριτική ικανότητα της ανάλυσης είναι η ίδια σε όλες τις περιοχές του επιπέδου χρόνου-συχνότητας.

Το πλεονέκτημα των wvlt είναι ότι το window ποικίλει. Για να απομονώσουμε ασυνέχειες του σήματος, χρειάζεται να έχουμε πολύ μικρές συν. βάσης. Ταυτόχρονα, για να επιτύχουμε λεπτομερή ανάλυση των συχνοτήτων, χρειάζεται να έχουμε πολύ “μακριές” συν. βάσης. Ένας τρόπος είναι να έχουμε μικρές συν. βάσης υψηλών συχνοτήτων και “μακριές” χαμηλών συχνοτήτων. Αυτό επιτυγχάνεται με τα wvlt. Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται η κάλυψη του πεδίου χρόνου-συχνότητας

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Διαφορές μεταξύ των μετασχηματισμών Fourier – Wavelet:

Αυτό επιτυγχάνεται με τα *wvlts*. Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται η κάλυψη του πεδίου χρόνου-συχνότητας με το *wvl* Daubechies.

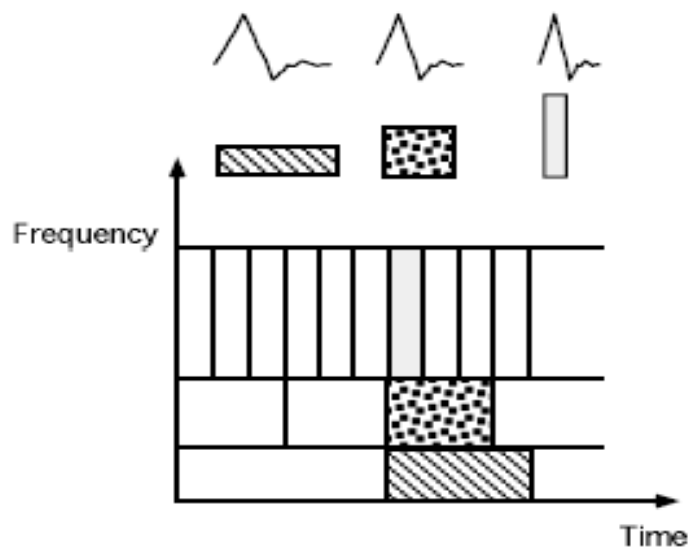


Fig. 2. Daubechies wavelet basis functions, time-frequency tiles, and coverage of the time-frequency plane.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ανάλυση Wavelet

Με τι μοιάζουν τα Wavelets:

Οι διαφορετικές οικογένειες των wvlts διαχωρίζονται στο πως οι συν. βάσης είναι localized στον χώρο και πόσο ομαλές είναι. Κάποια από τα wvlts έχουν δομή fractal, π.χ. οι οικογένεια των wvlts Daubechies

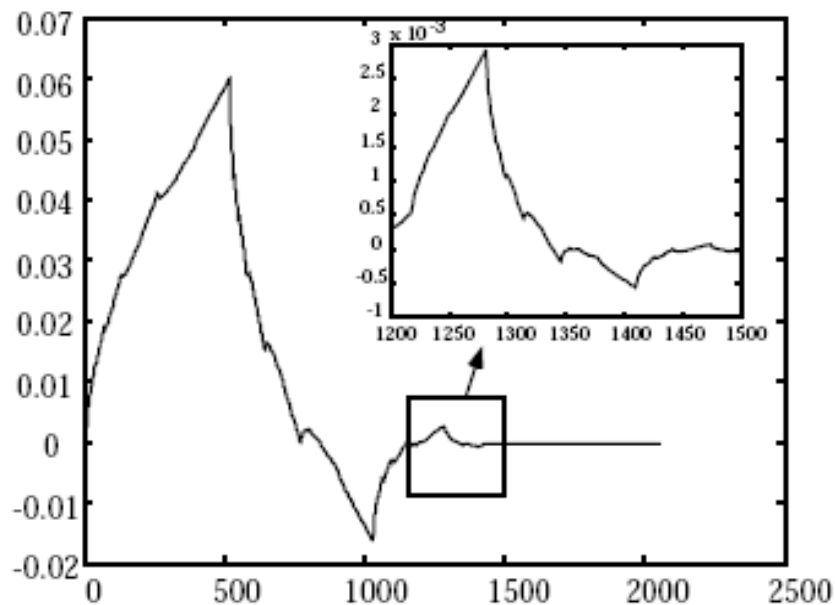


Fig. 3. The fractal self-similarity of the Daubechies mother wavelet.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ανάλυση Wavelet

Με τι μοιάζουν τα Wavelets:

Μέσα σε κάθε οικογένεια wvlts υπάρχουν υποκατηγορίες που διαφέρουν στον αριθμό των συντελεστών και στο μέγεθος των επαναλήψεων. Συνήθως κατηγοριοποιούνται από τον αριθμό των απαλειφόμενων ροπών. Αυτό αποτελεί ένα extra σύνολο από μαθηματικές σχέσεις που πρέπει να ικανοποιούν οι συντελεστές, και ευθέως ανάλογο προς τον αριθμό των συντελεστών. Για παράδειγμα, στην οικογένεια Coiflet υπάρχουν Coiflets με 2 και Coiflets με 3 απαλειφόμενες ροπές. Στο σχήμα παρουσιάζονται διαφορετικές οικογένειες απο wvlts

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ανάλυση Wavelet

Με τι μοιάζουν τα Wavelets:

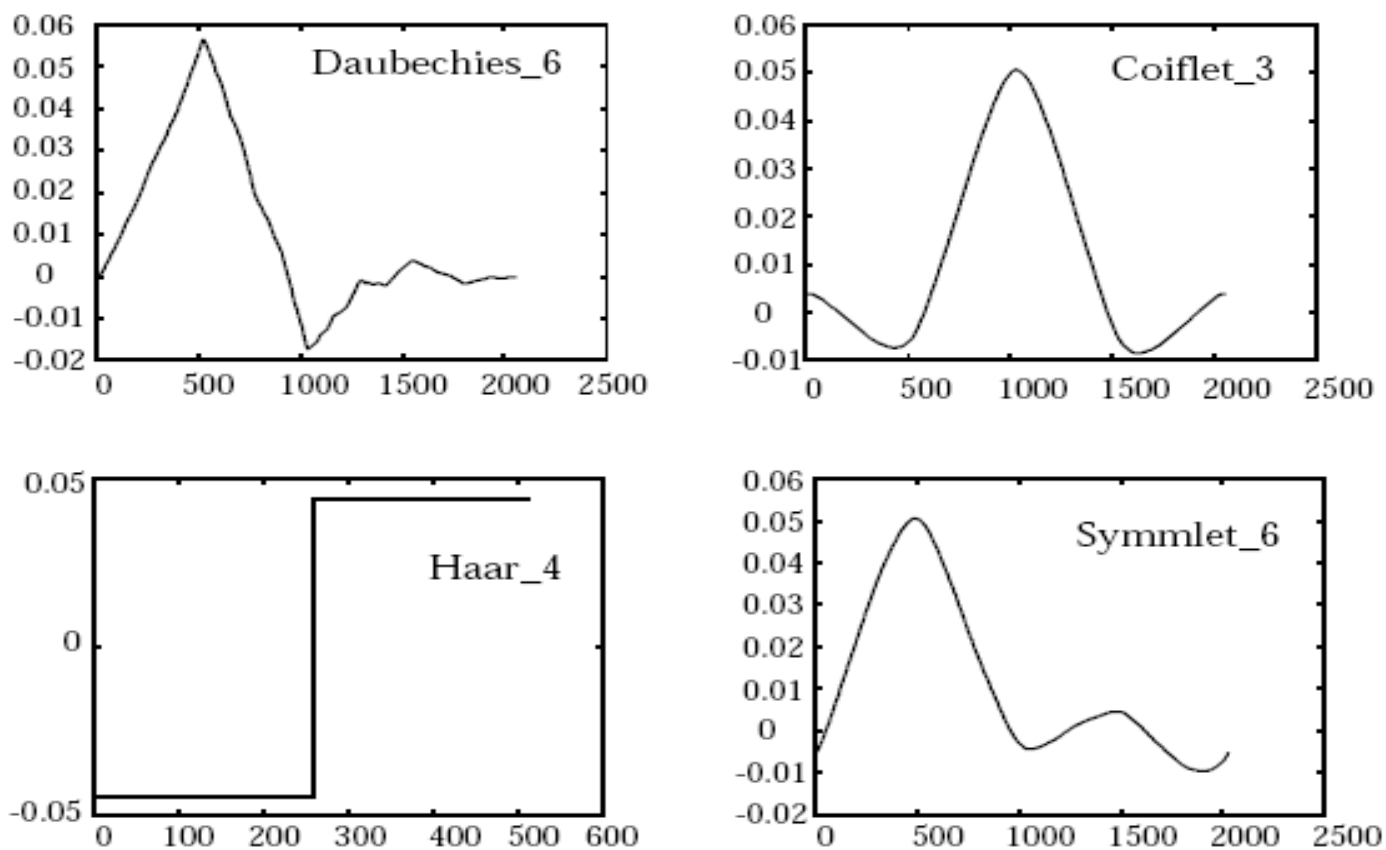


Fig. 4. Several different families of wavelets. The number next to the wavelet name represents the number of vanishing moments (A stringent mathematical definition related to the number of wavelet coefficients) for the subclass of wavelet. These figures were generated using WaveLab.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ανάλυση Wavelet

Για την ανάλυση σήματος με wvlts χρησιμοποιούμε μια *μητρική συνάρτηση* ή ένα wvlτ ανάλυσης $\Phi(x)$, που ορίζει μια ορθογωνική βάση, την βάση wvlτ:

$$\Phi_{(s,l)}(x) = 2^{-\frac{s}{2}} \Phi(2^{-s}x - l)$$

Οι μεταβλητές s, l είναι ακέραιοι που διαβαμίζουν και dilate την Φ για να παράξουν wvlts, όπως την οικογένεια Daubechies. Ο παράγοντας κλιμάκωσης (διαβάθμισης) s καθορίζει το πλάτος του wvlτ και ο παράγοντας θέσης l δίδει την θέση του. Η Φ κάθε φορά κλιμακώνεται κατά έναν παράγοντα 2, και μετατοπίζεται κατά ακεραίους αριθμούς.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ανάλυση Wavelet

Τα wvlts είναι σπουδαία λοιπόν γιατί έχουν την αυτοομοιότητα (βλ. fractals) που πηγάζει από την κλιμάκωση και την μετατοπίση. Αν γνωρίζουμε την Φ τότε ξέρουμε τα πάντα για την βάση.

Για να επεκτείνουμε τα δεδομένα μας σε διαφορετικές αναλύσεις (resolutions), το wvlτ ανάλυσης χρησιμοποιείται σε μια εξίσωση κλιμάκωσης:

$$W(x) = \sum_{k=-1}^{N-2} (-1)^k c_{k+1} \Phi(2x + k)$$

όπου $W(x)$ είναι η συν. κλιμάκωσης για την Ψ , και c_k οι συντελεστές του wvlτ.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος Ανάλυση Wavelet

Οι συντελεστές πρέπει να ικανοποιούν περιορισμούς γραμμικούς και δευτεροβάθμιους:

$$\sum_{k=0}^{N-1} c_k = 2, \quad \sum_{k=0}^{N-1} c_k c_{k+2l} = 2\delta_{l,0}$$

όπου δ είναι η συνάρτηση δέλτα και l ο δείκτης θέσης.

Σημειώνετε η ευκολία στην επιλογή των συντελεστών για ένα σύστημα $wnlt$ για ένα πρόβλημα, π.χ. η Daubechies έχει προτείνει συγκεκριμένες οικογένειες από $wnlts$ τα οποία είναι πολύ καλά στο να εμφανίζουν πολυωνυμική συμπεριφορά. Του Haar είναι ακόμη πιο απλά.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ανάλυση Wavelet

Οι συντελεστές πρέπει να θεωρηθούν σαν ένα είδος φίλτρου. Το φίλτρο τοποθετείται στον πίνακα μετασχηματισμού, ο οποίος εφαρμόζεται στα αρχικά μου δεδομένα. Οι συντελεστές κατατάσσονται με βάση δύο κατευθύνσεις: μια που ενεργεί ως φίλτρο ομαλοποίησης (π.χ. ένας κινούμενος μέσος όρος), και μια που ενεργεί έτσι ώστε να αναδείξει τις λεπτομέρειες των δεδομένων.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ανάλυση Wavelet

Ο πίνακας μετασχηματισμού εφαρμόζεται στα δεδομένα μας με έναν ιεραρχικό αλγόριθμο, συχνά ονομάζεται πυραμιδικός αλγόριθμος. Οι συντελεστές διατάσσονται έτσι ώστε οι περιττές γραμμές να δρουν ως φίλτρο ομαλοποίησης, ενώ οι άρτιες γραμμές να αναδεικνύουν τις λεπτομέρειες των δεδομένων. Αρχικά εφαρμόζεται σε όλα τα δεδομένα. Έπειτα το διάνυσμα ομαλοποιείται και αποκοπύεται στο μισό και ξαναεφαρμόζεται ο πίνακας. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να έχουμε έναν ικανοποιητικό αριθμό διαδοχικών ομαλοποιήσεων (τρια αποτελέσματα να είναι εξίσου ομαλοποιημένα). Έτσι κάθε εφαρμογή αυξάνει την ανάλυση (ευκρίνεια) ενώ ομαλοποιεί τα παραμείνοντα δεδομένα.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ανάλυση Wavelet

Στην πραγματικότητα εφαρμόζονται πακέτα wvlts. Δλδ γραμμικοί συνδυασμοί από wvlts. Αυτά σχηματίζουν βάσεις που διατηρούν την ορθογωνικότητα, την ομαλότητα, και το localization (εντοπισμό) από τα γονικά wvlts. Οι συντελεστές του γραμ. συνδυασμού υπολογίζονται από έναν επαναληπτικό αλγόριθμο ο οποίος για να πραγματοποιήσει την περαιτέρω ανάλυση χρησιμοποιεί αυτήν την σειρά των συντελεστών.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Ανάλυση Wavelet

Η βάση:

Η συν. βάσης περιέχει την απαραίτητη πληροφορία για το σήμα, και αν είναι αποτελεσματική τότε θα η πληροφορία του σήματος θα έχει συμπιεστεί. Οι ιδιότητες που θα πρέπει να πληρεί μια βάση είναι:

- Ταχύ υπολογισμό των εσωτερικών γινομένων με άλλες συναρτήσεις βάσης.**
- Ταχεία υπέρθεση των συν. βάσης.**
- καλό χωρικό εντοπισμό, έτσι ώστε να είναι δυνατός ο προσδιορισμός του σημείου του σήματος που συνεισφέρει αρκετά.**
- ανεξαρτησία, έτσι ώστε λίγα στοιχεία βάσης να αντιστοιχούν στο ίδιο τμήμα του σήματος.**

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Εφαρμογές Ανάλυσης Wavelet

Υπολογιστική και ανθρώπινη όραση:

Marr believed that it was important to establish scientific foundations for vision, and that while doing so, one must limit the scope of investigation by excluding everything that depends on training, culture, and so on, and focus on the mechanical or involuntary aspects of vision. This low-level vision is the part that enables us to recreate the three-dimensional organization of the physical world around us from the excitations that stimulate the retina. Marr asked the questions:

- How is it possible to define the contours of objects from the variations of their light intensity?
- How is it possible to sense depth?
- How is movement sensed?

He then developed working algorithmic solutions to answer each of these questions.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Εφαρμογές Ανάλυσης Wavelet

Υπολογιστική και ανθρώπινη όραση:

Marr's theory was that image processing in the human visual system has a complicated hierarchical structure that involves several layers of processing. At each processing level, the retinal system provides a visual representation that scales progressively in a geometrical manner. His arguments hinged on the detection of intensity changes. He theorized that intensity changes occur at different scales in an image, so that their optimal detection requires the use of operators of different sizes. He also theorized that sudden intensity changes produce a peak or trough in the first derivative of the image. These two hypotheses require that a vision filter have two characteristics: it should be a differential operator, and it should be capable of being tuned to act at any desired scale. Marr's operator was a wavelet that today is referred to as a "Marr wavelet."

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος Εφαρμογές Ανάλυσης Wavelet

Συμπύεση αποτυπωμάτων στο FBI:

Between 1924 and today, the US Federal Bureau of Investigation has collected about 30 million sets of fingerprints (7). The archive consists mainly of inked impressions on paper cards. Facsimile scans of the impressions are distributed among law enforcement agencies, but the digitization quality is often low. Because a number of jurisdictions are experimenting with digital storage of the prints, incompatibilities between data formats have recently become a problem. This problem led to a demand in the criminal justice community for a digitization and a compression standard.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος Εφαρμογές Ανάλυσης Wavelet

Συμπύεση αποτυπωμάτων στο FBI:

In 1993, the FBI's Criminal Justice Information Services Division developed standards for fingerprint digitization and compression in cooperation with the National Institute of Standards and Technology, Los Alamos National Laboratory, commercial vendors, and criminal justice communities (9).

Let's put the data storage problem in perspective. Fingerprint images are digitized at a resolution of 500 pixels per inch with 256 levels of gray-scale information per pixel. A single fingerprint is about 700,000 pixels and needs about 0.6 Mbytes to store. A pair of hands, then, requires about 6 Mbytes of storage. So digitizing the FBI's current archive would result in about 200 terabytes of data. (Notice that at today's prices of about \$900 per Gbyte for hard-disk storage, the cost of storing these uncompressed images would be about a 200 million dollars.) Obviously, data compression is important to bring these numbers down.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος Εφαρμογές Ανάλυσης Wavelet

Συμπίεση αποτυπωμάτων στο FBI:



Fig. 5. An FBI-digitized left thumb fingerprint. The image on the left is the original; the one on the right is reconstructed from a 26:1 compression. These images can be retrieved by anonymous FTP at [ftp.c3.lanl.gov](ftp://c3.lanl.gov) (128.165.21.64) in the directory `pub/WSQ/print_data`. (Courtesy Chris Brislawn, Los Alamos National Laboratory.)

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος Εφαρμογές Ανάλυσης Wavelet

Απομάκρυνση του θορύβου:

In diverse fields from planetary science to molecular spectroscopy, scientists are faced with the problem of recovering a true signal from incomplete, indirect or noisy data. Can wavelets help solve this problem? The answer is certainly “yes,” through a technique called *wavelet shrinkage and thresholding methods*, that David Donoho has worked on for several years (10).

The technique works in the following way. When you decompose a data set using wavelets, you use filters that act as *averaging* filters and others that produce *details* (11). Some of the resulting wavelet coefficients correspond to details in the data set. If the details are small, they might be omitted without substantially affecting the main features of the data set. The idea of *thresholding*, then, is to set to zero all coefficients that are less than a particular threshold. These coefficients are used in an inverse wavelet transformation to reconstruct the data set. Figure 6 is a pair of “before” and “after” illustrations of a nuclear magnetic resonance (NMR) signal. The signal is transformed, thresholded and inverse-transformed. The technique is a significant step forward in handling noisy data because the denoising is carried out without smoothing out the sharp structures. The result is cleaned-up signal that still shows important details.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Εφαρμογές Ανάλυσης Wavelet

Απομάκρυνση του θορύβου:

Figure 7 displays an image created by Donoho of Ingrid Daubechies (an active researcher in wavelet analysis and the inventor of smooth orthonormal wavelets of compact support), and then several close-up images of her eye: an original, an image with noise added, and finally denoised image. To denoise the image Donoho

1. transformed the image to the wavelet domain using Coiflets with three vanishing moments,
2. applied a threshold at two standard deviations, and
3. inverse-transformed the image to the signal domain.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Εφαρμογές Ανάλυσης Wavelet

Απομάκρυνση του θορύβου:

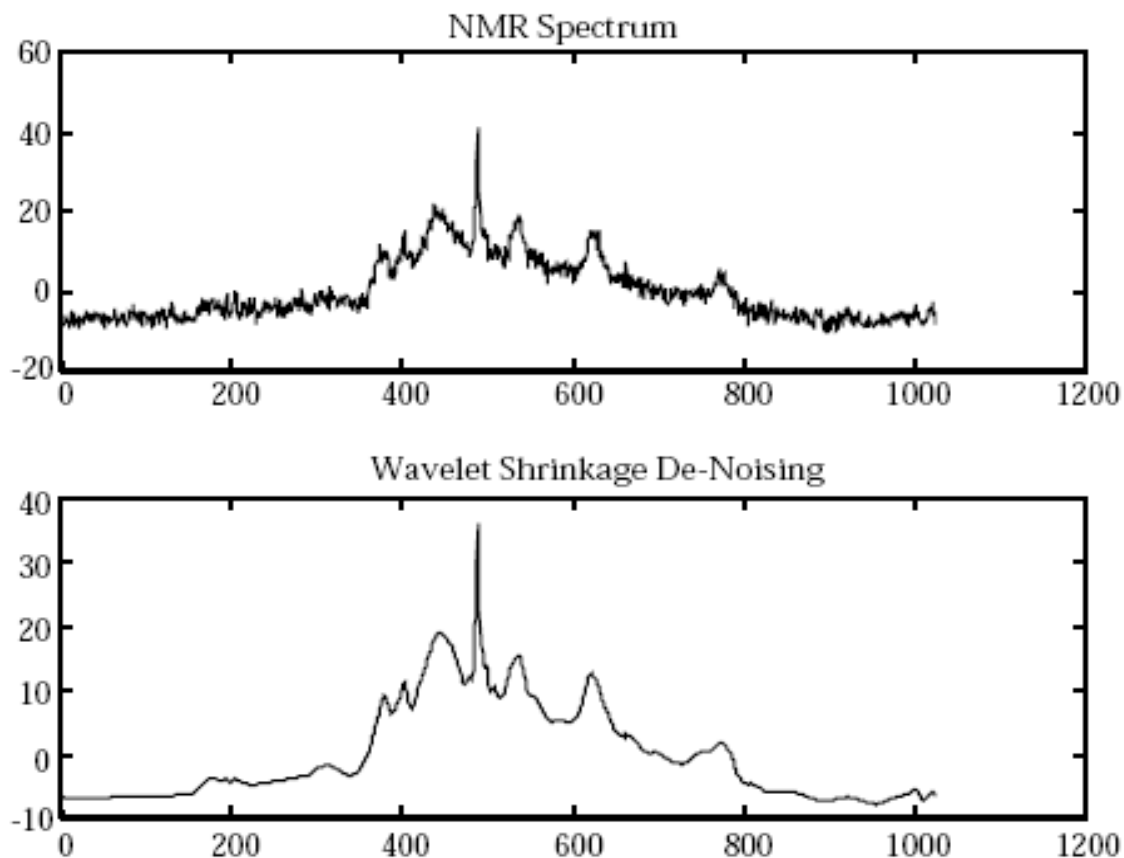


Fig. 6. “Before” and “after” illustrations of a nuclear magnetic resonance signal. The original signal is at the top, the denoised signal at the bottom. (Images courtesy David Donoho, Stanford University, NMR data courtesy Adrian Maudsley, VA Medical Center, San Francisco).

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Εφαρμογές Ανάλυσης Wavelet

Απομάκρυνση του θορύβου:

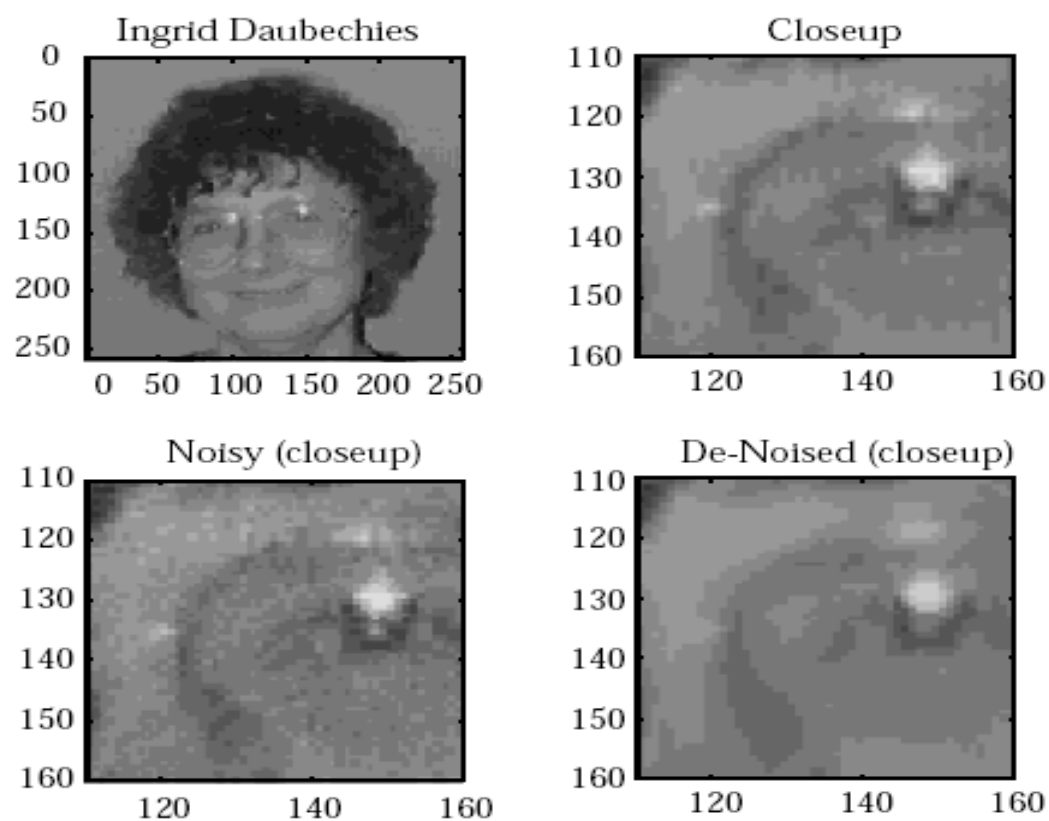


Fig. 7. Denoising an image of Ingrid Daubechies' left eye. The top left image is the original. At top right is a close-up image of her left eye. At bottom left is a close-up image with noise added. At bottom right is a close-up image, denoised. The photograph of Daubechies was taken at the 1993 AMS winter meetings with a Canon XapShot video still-frame camera. (Courtesy David Donoho)

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Εφαρμογές Ανάλυσης Wavelet

Ανίχνευση fractal συμπεριφοράς:

Wavelet analysis is proving to be a very powerful tool for characterizing behavior, especially self-similar behavior, over a wide range of time scales.

In 1993, Scargle and colleagues at NASA-Ames Research Center and elsewhere investigated the quasiperiodic oscillations (QPOs) and very low-frequency noise (VLFN) from an astronomical X-ray accretion source, Sco X-1 as possibly being caused by the same physical phenomenon (12). Sco X-1 is part of a close binary star system in which one member is a late main sequence star and the other member (Sco X-1) is a compact star generating bright X rays. The causes for QPOs in X-ray sources have been actively investigated in the past, but other aperiodic phenomena such as VLFNs have not been similarly linked in the models. Their Sco X-1 data set was an interesting 5-20 keV EXOSAT satellite time-series consisting of a wide-range of time scales, from 2 ms to almost 10 hours.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Εφαρμογές Ανάλυσης Wavelet

Ανίχνευση fractal συμπεριφοράς:

Galactic X-ray sources are often caused by the accretion of gas from one star to another in a binary star system. The accreted object is usually a compact star such as a white dwarf, neutron star, or black hole. Gas from the less massive star flows to the other star via an accretion disk (that is, a disk of matter around the compact star flowing inward) around the compact star. The variable luminosities are caused by irregularities in the gas flow. The details of the gas flow are not well-known.

The researchers noticed that the luminosity of Sco X-1 varied in a self-similar manner, that is, the statistical character of the luminosities examined at different time resolutions remained the same. Since one of the great strengths of wavelets is that they can process information effectively at different scales, Scargle used a wavelet tool called a scalegram to investigate the time-series.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Εφαρμογές Ανάλυσης Wavelet

Ανίχνευση fractal συμπεριφοράς:

Scargle defines a *scalegram* of a time series as the average of the squares of the wavelet coefficients at a given scale. Plotted as a function of scale, it depicts much of the same information as does the Fourier power spectrum plotted as a function of frequency. Implementing the scalegram involves summing the product of the data with a wavelet function, while implementing the Fourier power spectrum involves summing the data with a sine or cosine function. The formulation of the scalegram makes it a more convenient tool than the Fourier transform because certain relationships between the different time scales become easier to see and correct, such as seeing and correcting for photon noise.

The scalegram for the time-series clearly showed the QPOs and the VLFNs, and the investigators were able to calculate a power-law to the frequencies. Subsequent simulations suggested that the cause of Sco-X1's luminosity fluctuations may be due to a chaotic accretion flow.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Εφαρμογές Ανάλυσης Wavelet

Ανίχνευση fractal συμπεριφοράς:

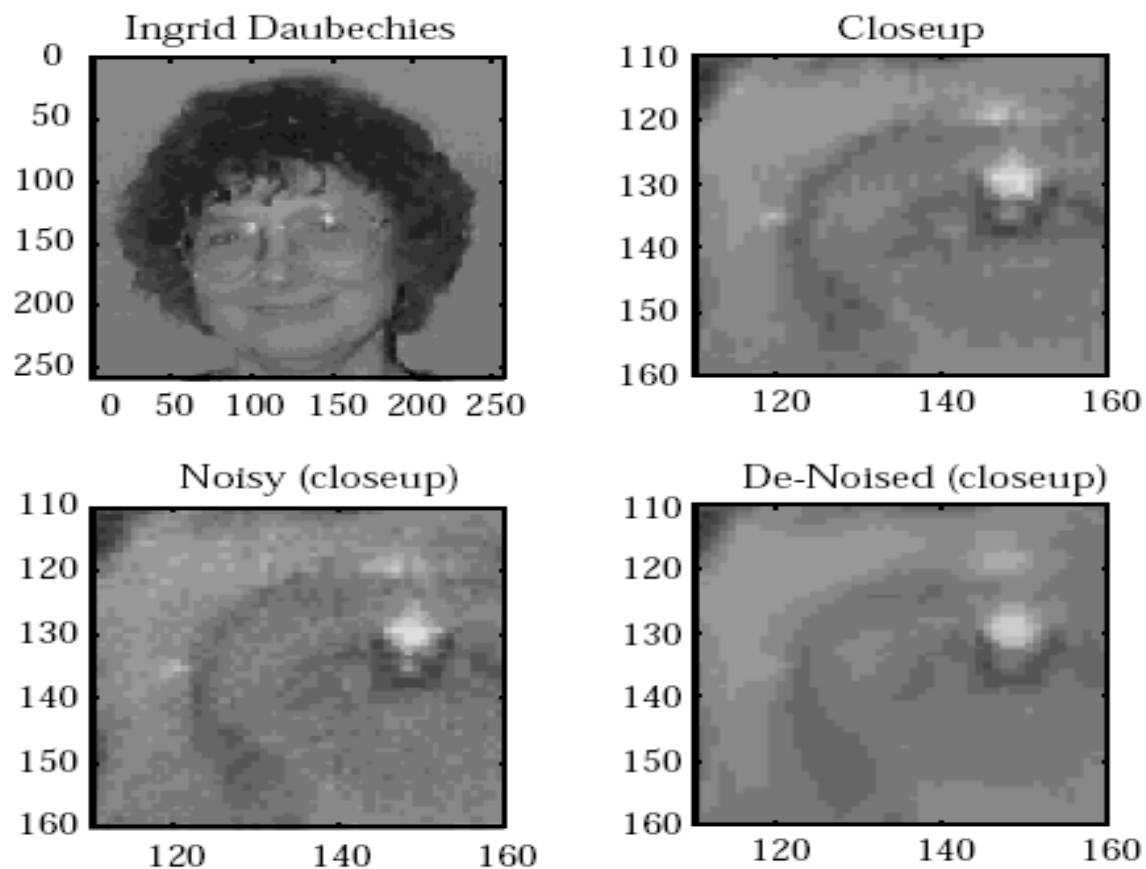


Fig. 7. Denoising an image of Ingrid Daubechies' left eye. The top left image is the original. At top right is a close-up image of her left eye. At bottom left is a close-up image with noise added. At bottom right is a close-up image, denoised. The photograph of Daubechies was taken at the 1993 AMS winter meetings with a Canon XapShot video still-frame camera. (Courtesy David Donoho)

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος Εφαρμογές Ανάλυσης Wavelet

Μουσική:

Victor Wickerhauser has suggested that wavelet packets could be useful in sound synthesis (13). His idea is that a single wavelet packet generator could replace a large number of oscillators. Through experimentation, a musician could determine combinations of wave packets that produce especially interesting sounds.

Wickerhauser feels that sound synthesis is a natural use of wavelets. Say one wishes to approximate the sound of a musical instrument. A sample of the notes produced by the instrument could be decomposed into its wavelet packet coefficients. Reproducing the note would then require reloading those coefficients into a wavelet packet generator and playing back the result. Transient characteristics such as attack and decay- roughly, the intensity variations of how the sound starts and ends- could be controlled separately (for example, with envelope generators), or by using longer wave packets and encoding those properties as well into each note. Any of these processes could be controlled in real time, for example, by a keyboard.

Notice that the musical instrument could just as well be a human voice, and the notes words or phonemes.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Εφαρμογές Ανάλυσης Wavelet

Μουσική:

Notice that the musical instrument could just as well be a human voice, and the notes words or phonemes.

A wavelet-packet-based music synthesizer could store many complex sounds efficiently because

- wavelet packet coefficients, like wavelet coefficients, are mostly very small for digital samples of smooth signals; and
- discarding coefficients below a predetermined cutoff introduces only small errors when we are compressing the data for smooth signals.

Similarly, a wave packet-based speech synthesizer could be used to reconstruct highly compressed speech signals. Figure 8 illustrates a wavelet musical tone or *toneburst*.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος Εφαρμογές Ανάλυσης Wavelet

Μουσική:

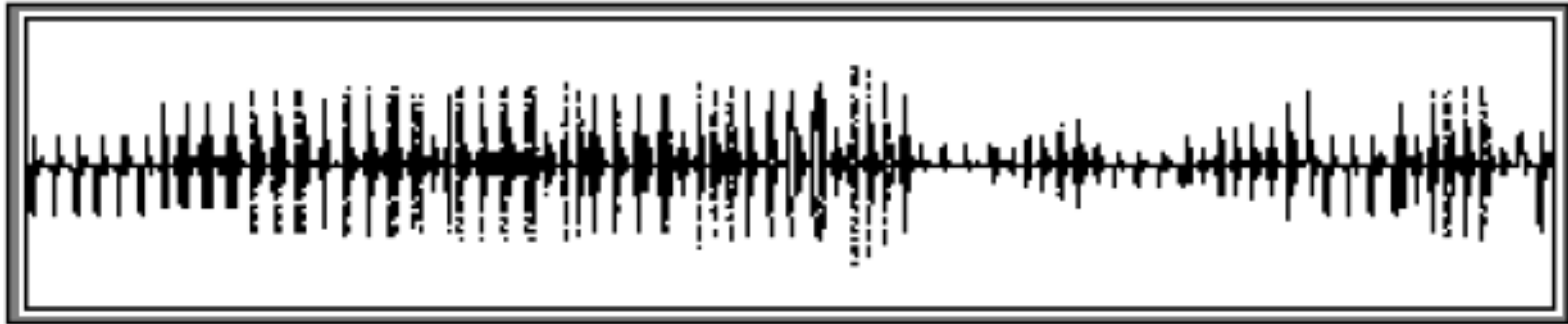


Fig. 8. Wavelets for music: a graphical representation of a Wickerhauser toneburst. This screenshot of a toneburst was taken while it was playing in the Macintosh commercial sound program Kaboom! Factory. (Toneburst courtesy Victor Wickerhauser)

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος Εφαρμογές Ανάλυσης Wavelet

Μουσική:

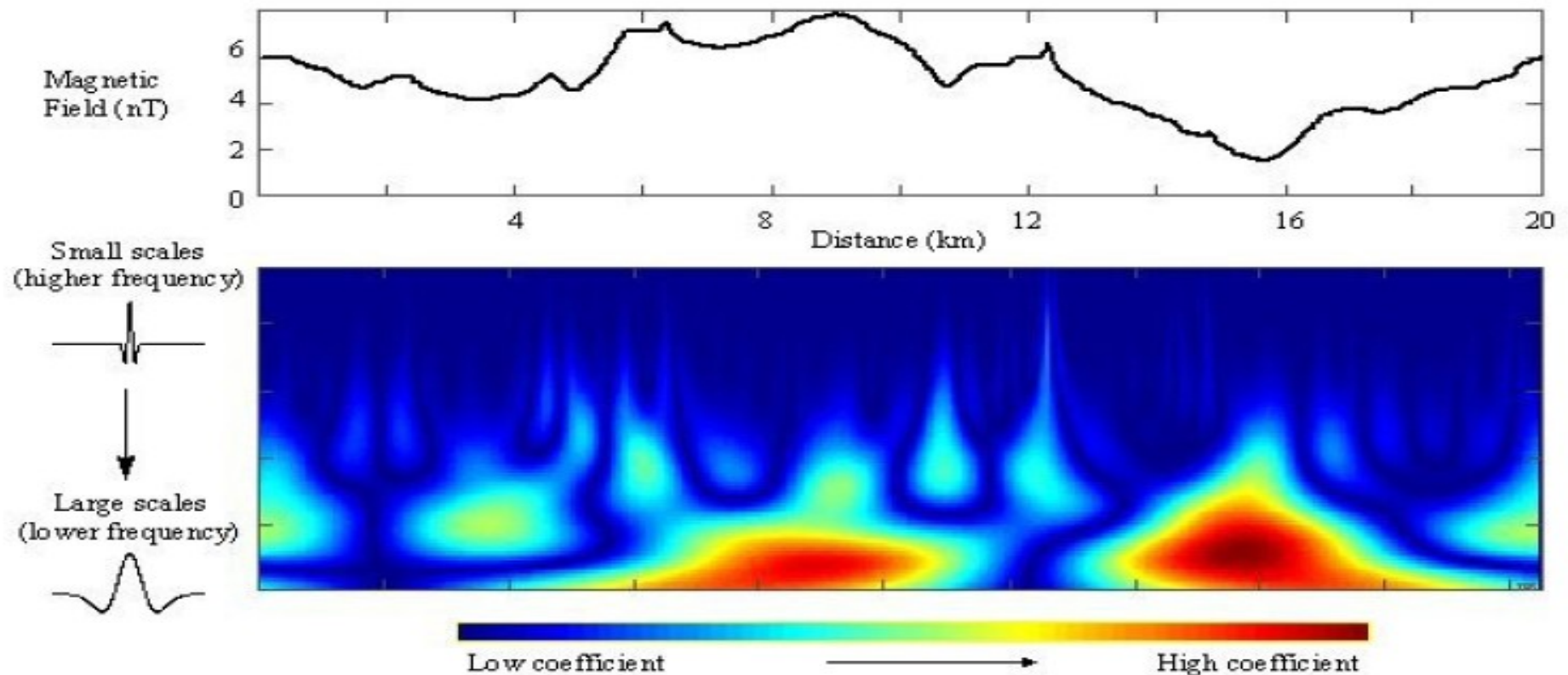


Figure 2. The continuous wavelet transform of an aeromagnetic profile. The wavelet coefficients are displayed as an image with the smaller scales at the top of the image (eg higher frequencies), the position on the horizontal axis and the magnitude of the wavelet displayed by colour. Clicking on the image will play the accompanying wavelet music.