Συνδυαστική Βελτιστοποίηση

Εισαγωγή στον γραμμικό προγραμματισμό (ΓΠ)

Σε αυτό το κεφάλαιο θα προσπαθήσουμε να εισάγουμε τις βασικές ιδέες και τεχνικές του γραμμικού προγραμματισμού (ΓΠ). Αυτή η περιοχή των εφαρμοσμένων μαθηματικών αναπτύχθηκε στα τέλη του 1940 για την επίλυση προβλημάτων σχετικών με την κατανομή των διαθέσιμων πόρων. Η εφαρμογή της σε πραγματικά προβλήματα είναι πραγματικά μεγάλη, οδηγώντας σε εξίσου μεγάλη εξοικονόμευση σε χρήματα και πόρους.

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση
Εισαγωγή στον γραμμικό προγραμματισμό (ΓΠ)

Θα ξεκινήσουμε δίνοντας διάφορα παραδείγματα:

Παράδειγμα 1 (*ανάλυση δραστηριότητας*): Ένας μύλος ξυλείας πριονίζει σε τύπο A και τύπο B τα κούτσουρα που λαμβάνει. Υποθέστε ότι απαιτεί 2 hr για την κατασκευή 1000 b.ft τύπου A και 5 hr για το πλανάρισμα 1000 b.ft υλικού τύπου A. Και ότι απαιτεί 2 hr για την κατασκευή 1000 b.ft τύπου B αλλά μόνο 3 hr για το πλανάρισμα 1000 b.ft υλικού τύπου B. Το πριόνι είναι διαθέσιμο μόνο 8 hr την ημέρα, και η μηχανή πλαναρίσματος είναι διαθέσιμη 15 hr την ημέρα. Αν το κέρδος είναι 120 \$ για 1000 b.ft τύπου A και 100 \$ για τύπου B, πόσα πρέπει να κατασκευάζονται από το κάθε είδος για να έχουμε το μέγιστο κέρδος;

Μαθηματικό μοντέλο: Έστω x, y (σε χιλιάδες b.ft) για την ποσότητα ανά ημέρα προϊόντος τύπου A και B, αντίστοιχα. Κάθε ημέρα απαιτούνται

$$2x + 2y$$

ώρες.

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση
Εισαγωγή στον γραμμικό προγραμματισμό (ΓΠ)

Θα ξεκινήσουμε δίνοντας διάφορα παραδείγματα:

Παράδειγμα 1 (*ανάλυση δραστηριότητας*): Ένας μύλος ξυλείας πριονίζει σε τύπο A και τύπο B τα κούτσουρα που λαμβάνει. Υποθέστε ότι απαιτεί 2 hr για την κατασκευή 1000 b.ft τύπου A και 5 hr για το πλανάρισμα 1000 b.ft υλικού τύπου A. Και ότι απαιτεί 2 hr για την κατασκευή 1000 b.ft τύπου B αλλά μόνο 3 hr για το πλανάρισμα 1000 b.ft υλικού τύπου B. Το πριόνι είναι διαθέσιμο μόνο 8 hr την ημέρα, και η μηχανή πλαναρίσματος είναι διαθέσιμη 15 hr την ημέρα. Αν το κέρδος είναι 120 $ για 1000 b.ft τύπου A και 100 $ για τύπου B, πόσα πρέπει να κατασκευάζονται από το κάθε είδος για να έχουμε το μέγιστο κέρδος;

Μαθηματικό μοντέλο (...): Από την στιγμή που είναι μόνο 8 hr διαθέσιμο τότε θα πρέπει να ισχύει:

$$2x + 2y \leq 8$$

Ενώ για το πλανάρισμα:

$$5x + 3y \ \kappa\alpha\iota 5x + 3y \leq 15$$

Φυσικά θα πρέπει να είναι και: $x, \ y \geq 0$

Το κέρδος (το οποίο πρέπει να μεγιστοποιηθεί) είναι: $z = 120x + 100y$

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση
Εισαγωγή στον γραμμικό προγραμματισμό (ΓΠ)

Θα ξεκινήσουμε δίνοντας διάφορα παραδείγματα:

Παράδειγμα 1 (*ανάλυση δραστηριότητας*): Ένας μύλος ξυλείας πριονίζει σε τύπο A και τύπο B τα κούτσουρα που λαμβάνει. Υποθέστε ότι απαιτεί 2 hr για την κατασκευή 1000 b.ft τύπου A και 5 hr για το πλανάρισμα 1000 b.ft υλικού τύπου A. Και ότι απαιτεί 2 hr για την κατασκευή 1000 b.ft τύπου B αλλά μόνο 3 hr για το πλανάρισμα 1000 b.ft υλικού τύπου B. Το πριόνι είναι διαθέσιμο μόνο 8 hr την ημέρα, και η μηχανή πλαναρίσματος είναι διαθέσιμη 15 hr την ημέρα. Αν το κέρδος είναι 120 $ για 1000 b.ft τύπου A και 100 $ για τύπου B, πόσα πρέπει να κατασκευάζονται από το κάθε είδος για να έχουμε το μέγιστο κέρδος;

Μαθηματικό μοντέλο (...): οπότε ζητάμε τις τιμές των x, y που να μεγιστοποιούν το z, λαμβάνοντας υπόψη τα:

$$\begin{aligned} 2x + 2y &\le 8 \\ 5x + 3y &\le 15 \\ x &\ge 0 \\ y &\ge 0. \end{aligned}$$

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση
Εισαγωγή στον γραμμικό προγραμματισμό (ΓΠ)

Θα ξεκινήσουμε δίνοντας διάφορα παραδείγματα:

Παράδειγμα 2 (*το πρόβλημα της διαίτας*):Ενας διατροφολογός σχεδιάζει ένα μενού αποτελούμενο από δύο κύρια φαγητά Α, Β. Κάθε γραμμάριο του Α περιέχει 2 μονάδες λίπους, 1 μονάδα υδατανθράκων, και 4 μονάδες πρωτεϊνης. Κάθε γραμμάριο του Β περιέχει 3 μονάδες λίπους, 3 μονάδα υδατανθράκων, και 3 μονάδες πρωτεϊνης. Ο διατροφολόγος θέλει το γεύμα να περιέχει τουλάχιστο 18 μονάδες λίπους, 12 μονάδες H/C, και 24 μονάδες πρωτεϊνών. Αν κάθε γραμμάριο του Α κοστίζει 20 c, και του Β 25 c, πόσο θα πρέπει να καταναλώνετε από το κάθε είδος έτσι το χρηματικό κόστος της διατροφής να είναι χαμηλό αλλά το αντίστοιχο διατροφικό να είναι υψηλό;

Μαθηματικό μοντέλο (...): Έστω x, y τα gr. των Α, Β, αντίστοιχα. Οι μονάδες λίπους για το κάθε γεύμα είναι:

$$2x + 3y,$$

και θα πρέπει να ικανοποιούν την ανισότητα: $2x + 3y \geq 18.$

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση
Εισαγωγή στον γραμμικό προγραμματισμό (ΓΠ)

Θα ξεκινήσουμε δίνοντας διάφορα παραδείγματα:

Παράδειγμα 2 (*το πρόβλημα της διαίτας*): Ενας διατροφολογός σχεδιάζει ένα μενού αποτελούμενο από δύο κύρια φαγητά Α, Β. Κάθε γραμμάριο του Α περιέχει 2 μονάδες λίπους, 1 μονάδα υδατανθράκων, και 4 μονάδες πρωτεϊνης. Κάθε γραμμάριο του Β περιέχει 3 μονάδες λίπους, 3 μονάδα υδατανθράκων, και 3 μονάδες πρωτεϊνης. Ο διατροφολόγος θέλει το γεύμα να περιέχει τουλάχιστο 18 μονάδες λίπους, 12 μονάδες H/C, και 24 μονάδες πρωτεϊνών. Αν κάθε γραμμάριο του Α κοστίζει 20 c, και του Β 25 c, πόσο θα πρέπει να καταναλώνετε από το κάθε είδος έτσι το χρηματικό κόστος της διατροφής να είναι χαμηλό αλλά το αντίστοιχο διατροφικό να είναι υψηλό;

Μαθηματικό μοντέλο (...): Όμοια για τους H/C και για τις πρωτεϊνες:

$$x + 3y \geq 12$$

$$4x + 3y \geq 24.$$

Επίσης θα πρέπει $x,\ y \geq 0$

Το χρηματικό κόστος που θα πρέπει να ελαττωθεί είναι: $z = 20x + 25y.$

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση
Εισαγωγή στον γραμμικό προγραμματισμό (ΓΠ)

Θα ξεκινήσουμε δίνοντας διάφορα παραδείγματα:

Παράδειγμα 2 (*το πρόβλημα της διαίτας*): Ενας διατροφολογός σχεδιάζει ένα μενού αποτελούμενο από δύο κύρια φαγητά A, B. Κάθε γραμμάριο του A περιέχει 2 μονάδες λίπους, 1 μονάδα υδατανθράκων, και 4 μονάδες πρωτεϊνης. Κάθε γραμμάριο του B περιέχει 3 μονάδες λίπους, 3 μονάδα υδατανθράκων, και 3 μονάδες πρωτεϊνης. Ο διατροφολόγος θέλει το γεύμα να περιέχει τουλάχιστο 18 μονάδες λίπους, 12 μονάδες H/C, και 24 μονάδες πρωτεϊνών. Αν κάθε γραμμάριο του A κοστίζει 20 c, και του B 25 c, πόσο θα πρέπει να καταναλώνετε από το κάθε είδος έτσι το χρηματικό κόστος της διατροφής να είναι χαμηλό αλλά το αντίστοιχο διατροφικό να είναι υψηλό;

Μαθηματικό μοντέλο (...): ενω οι τιμές των x, y θα πρέπει να ικανοποιούν τις:

$$
\begin{aligned}
2x + 3y &\geq 18 \\
x + 3y &\geq 12 \\
4x + 3y &\geq 24 \\
x &\geq 0 \\
y &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Θα ξεκινήσουμε δίνοντας διάφορα παραδείγματα:

Παράδειγμα 3 (*το πρόβλημα της μεταφοράς*): Ένας κατασκευαστής φύλλων πολυαιθυλενίου έχει δύο μονάδες μία στο Α μέρος και την άλλη στο Β μέρος. Έχει επίσης και τρείς αποθήκες διανομής στα Απ1, Απ2, Απ3. Η μονάδα Α μπορεί να παράγει 120 tn/week, ενώ η Β 140 tn/week. Η αποθήκη Απ1 διαχειρίζεται 100 tm/week, η Απ2 60 tn/week και η Απ3 80 tn/week. Στο επόμενο πίνακα δίνονται τα κόστη μεταφοράς (σε $) ανά tn προϊόντος:

From	*To*		
	Los Angeles	Chicago	New York City
Salt Lake City	5	7	9
Denver	6	7	10

Πόσοι tn PEt πρέπει να μετακινούνται από κάθε μονάδα προς κάθε αποθήκη έτσι ώστε να έχουμε χαμηλό κόστος για τα μεταφορικά ενώ θα καλύπτονται οι ανάγκες των αποθηκών;

$$2x + 3y \geq 18.$$

Μαθηματικό μοντέλο (...): Έστω x, y τα gr. των A, B, αντίστοιχα. Οι μονάδες λίπους για το κάθε γεύμα είναι:

Θα ξεκινήσουμε δίνοντας διάφορα παραδείγματα:

Παράδειγμα 3 (*το πρόβλημα της μεταφοράς*): Ένας κατασκευαστής φύλλων πολυαιθυλενίου έχει δύο μονάδες μία στο Α μέρος και την άλλη στο Β μέρος. Έχει επίσης και τρείς αποθήκες διανομής στα Απ1, Απ2, Απ3. Η μονάδα Α μπορεί να παράγει 120 tn/week, ενώ η Β 140 tn/week. Η αποθήκη Απ1 διαχειρίζεται 100 tm/week, η Απ2 60 tn/week και η Απ3 80 tn/week. Στο επόμενο πίνακα δίνονται τα κόστη μεταφοράς (σε $) ανά tn προϊόντος:

Πόσοι tn PEt πρέπει να μετακινούνται από κάθε μονάδα προς κάθε αποθήκη έτσι ώστε να έχουμε χαμηλό κόστος για τα μεταφορικά ενώ θα καλύπτονται οι ανάγκες των αποθηκών;

Μαθηματικό μοντέλο: Έστω P_1, P_2 τα εργοστάσια παραγωγής, και W_1, W_2, W_3 οι τρεις αποθήκες, τότε:

x_{ij} = οι τόνοι που μετακινούνται από το P_i στη W_j
c_{ij} = το κόστος μεταφοράς 1 tn από το P_i στη W_j
i=1,2 και j=1,2,3.

Το συνολικό ποσοστό PEt που “φεύγει” από το P_1, είναι $x_{11} + x_{12} + x_{13}$.

για το οποίο ισχύει ότι: $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 120.$

Θα ξεκινήσουμε δίνοντας διάφορα παραδείγματα:

Παράδειγμα 3 (*το πρόβλημα της μεταφοράς*): Ένας κατασκευαστής φύλλων πολυαιθυλενίου έχει δύο μονάδες μία στο Α μέρος και την άλλη στο Β μέρος. Έχει επίσης και τρείς αποθήκες διανομής στα Απ1, Απ2, Απ3. Η μονάδα Α μπορεί να παράγει 120 tn/week, ενώ η Β 140 tn/week. Η αποθήκη Απ1 διαχειρίζεται 100 tm/week, η Απ2 60 tn/week και η Απ3 80 tn/week. Στο επόμενο πίνακα δίνονται τα κόστη μεταφοράς (σε $) ανά tn προϊόντος:

Πόσοι tn PEt πρέπει να μετακινούνται από κάθε μονάδα προς κάθε αποθήκη έτσι ώστε να έχουμε χαμηλό κόστος για τα μεταφορικά ενώ θα καλύπτονται οι ανάγκες των αποθηκών;

Μαθηματικό μοντέλο: Όμοια το συνολικό ποσοστό PEt που “φεύγει” από το P_2, ισχύει ότι: $x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 140.$

Ενώ η W_1 λαμβάνει $x_{11} + x_{21}$. Το οποίο θα πρέπει να είναι: $x_{11} + x_{21} \geq 100.$

Όμοια για τις W_3, W_3 είναι: $x_{12} + x_{22} \geq 60$

$$x_{13} + x_{23} \geq 80.$$

Και θα πρέπει: $x_{ij} \geq 0 \quad \text{for} \quad i = 1, 2 \quad \text{and} \quad j = 1, 2, 3.$

Θα ξεκινήσουμε δίνοντας διάφορα παραδείγματα:

Παράδειγμα 3 (*το πρόβλημα της μεταφοράς*): Ένας κατασκευαστής φύλλων πολυαιθυλενίου έχει δύο μονάδες μία στο Α μέρος και την άλλη στο Β μέρος. Έχει επίσης και τρείς αποθήκες διανομής στα Απ1, Απ2, Απ3. Η μονάδα Α μπορεί να παράγει 120 tn/week, ενώ η Β 140 tn/week. Η αποθήκη Απ1 διαχειρίζεται 100 tm/week, η Απ2 60 tn/week και η Απ3 80 tn/week. Στο επόμενο πίνακα δίνονται τα κόστη μεταφοράς (σε $) ανά tn προϊόντος:

Πόσοι tn PEt πρέπει να μετακινούνται από κάθε μονάδα προς κάθε αποθήκη έτσι ώστε να έχουμε χαμηλό κόστος για τα μεταφορικά ενώ θα καλύπτονται οι ανάγκες των αποθηκών;

Μαθηματικό μοντέλο: Οπότε για το κόστος μεταφοράς

$$z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23}$$

Θα πρέπει να υπολογιστούν όλα τα x_{ij} έτσι ώστε να γίνεται ελάχιστη η

$$z = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij}$$

Ενώ

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \leq s_i, \quad i = 1, 2$$

$$\sum_{i=1}^{2} x_{ij} \geq d_j, \quad j = 1, 2, 3$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2$$

και

$$s_1 = 120 \quad \text{and} \quad s_2 = 140$$

$$d_1 = 100, \quad d_2 = 60, \quad \text{and} \quad d_3 = 80.$$

Θα ξεκινήσουμε δίνοντας διάφορα παραδείγματα:

Παράδειγμα 4 (*το πρόβλημα της ανάμιξης*): Ένας κατασκευαστής τεχνητών γλυκαντικών μιγνύει 14 Kg σακχαρίνης και 18 Kg δεξτρόζης για να παρασκευάσει δύο νέα προϊόντα: SWEET και LO-SUGAR. Κάθε Kg από το SWEET περιέχει 0.4 Kg δεξτρόζης και 0.2 Kg σακχαρίνης, ενώ για το LO-SUGAR η περιεκτικότητα είναι 0.3 και 0.4 Kg αντίστοιχα. Αν το κέρδος για κάθε Kg SWEET είναι 20 c και για το LO-SUGAR 30 c, πόσα Kg από το κάθε προϊόν πρέπει να κατασκευαστούν έτσι ώστε το κέρδος να είναι μέγιστο;

Μαθηματικό μοντέλο: Έστω x και y τα Kg SWEET και LO-SUGAR. Η ποσότητα δεξτρόζης που χρησιμοποιείται αλλά και η σχέση που πρέπει να ικανοποιεί είναι:

$$0.4x + 0.3y \leq 18$$

Ενώ για την σακχαρίνη είναι: $0.2x + 0.4y \leq 14$

Ενώ οπωσδήποτε πρέπει να ισχύει: $x \geq 0 \quad \text{and} \quad y \geq 0$

Θα ξεκινήσουμε δίνοντας διάφορα παραδείγματα:

Παράδειγμα 4 (*το πρόβλημα της ανάμιξης*): Ένας κατασκευαστής τεχνητών γλυκαντικών μιγνύει 14 Kg σακχαρίνης και 18 Kg δεξτρόζης για να παρασκευάσει δύο νέα προϊόντα: SWEET και LO-SUGAR. Κάθε Kg από το SWEET περιέχει 0.4 Kg δεξτρόζης και 0.2 Kg σακχαρίνης, ενώ για το LO-SUGAR η περιεκτικότητα είναι 0.3 και 0.4 Kg αντίστοιχα. Αν το κέρδος για κάθε Kg SWEET είναι 20 c και για το LO-SUGAR 30 c, πόσα Kg από το κάθε προϊόν πρέπει να κατασκευαστούν έτσι ώστε το κέρδος να είναι μέγιστο;

Μαθηματικό μοντέλο (...): Το κέρδος (σε c) ορίζεται από τη συνάρτηση

$$z = 20x + 30y.$$

Και τελικά πρέπει να μεγιστοποιηθεί η *z* ενώ θα πρέπει να ικανοποιούνται τα:

$$\begin{aligned} 0.4x + 0.3y &\le 18 \\ 0.2x + 0.4y &\le 14 \\ x &\ge 0 \\ y &\ge 0. \end{aligned}$$

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση
Εισαγωγή στον γραμμικό προγραμματισμό (ΓΠ)

Από όλα τα παραπάνω παραδείγματα προκύπτει η **γενική μορφή των προβλημάτων ΓΠ**:

Υπολογίστε τις τιμές $x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots,\ x_n$ οι οποίες θα μεγιστοποιούν(ή ελαχιστοποιούν) την $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ ενώ θα πρέπει να ικανοποιούνται οι:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le (\ge)(=) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le (\ge)(=) b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le (\ge)(=) b_m \end{array}\right\},$$

Η γραμμική εξίσωση για το z, καλείται **αντικειμενική συνάρτηση**. Οι ανισότητες ή ισότητες ονομάζονται **περιορισμοί**. Ένα τέτοιο πρόβλημα βρίσκεται στην **βασική του μορφή** όταν όλες οι ανισότητες έχουν την ίδια φορά. Ενώ βρίσκεται στην **κανονική του μορφή** όταν δεν υπάρχει καμία ανισότητα παρά μόνο ισότητες.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι κάθε πρόβλημα ΓΠ που έχει “μη-περιορισμένες” μεταβλητές μπορεί να λυθεί επιλύοντας το αντίστοιχο πρόβλημα ΓΠ στο οποίο όλες οι μεταβλητές πρέπει να ικανοποιούν τον περιορισμό “≥ 0”. Ακόμη περισσότερο θα δείξουμε ότι *κάθε* πρόβλημα ΓΠ μπορεί να επιλυθεί ως **βασικό** ή **κανονικό** πρόβλημα ΓΠ.

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση
Εισαγωγή στον γραμμικό προγραμματισμό (ΓΠ)

Το πρόβλημα της ελαχιστοποιήσης ως μεγιστοποιήση
Κάθε πρόβλημα ελαχιστοποίησης μπορεί να μετατραπεί στο αντίστοιχο πρόβλημα μεγιστοποίησης. Αυτό προκύπτει από τη σχέση:

$$min \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = -max \left(- \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \right)$$

Αντιστροφή μιας ανισότητας $k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_n x_n \geq b$
Αν πολλαπλασιάσουμε την ανισοτητα με -1 τοτε προκύπτει η

$$-k_1 x_1 - k_2 x_2 - \cdots - k_n x_n \leq -b$$

Μετατροπή μιας ισότητας σε ανισότητα
Παρατηρήστε ότι μπορούμε να γράψουμε την x=6 ως x≤6 και x≥6 όπως και ως x≤6 και -x≤-6. Στη γενική περίπτωση η εξίσωση:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$$

Μπορεί να γραφεί ως $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \ \sum_{j=1}^{n} -a_{ij} x_j \leq -b_i$

“Μη-περιορισμένες” μεταβλητές

Έστω ότι η μεταβλητή x_j δεν πρέπει να υπακούει στον περιορισμό “≥0”. Αντικαθιστούμε την x_j με δύο νέες μεταβλητές, x_j^+ και x_j^-, έτσι ώστε $x_j=x_j^+-x_j^-$, ενώ x_j^+, $x_j^-\geq 0$. Δηλαδή κάθε αριθμός είναι διαφορά δύο θετικών αριθμών. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να εισάγουμε περιορισμούς στις μεταβλητές.

Παράδειγμα: Έστω το αρχικό πρόβλημα:

Maximize $z = 2x + 5y$

subject to the constraints

$$3x + 2y \leq 6$$
$$2x + 9y \leq 8$$
$$x \geq 0.$$

Θέτοντας $y=y^+-y^-$ το πρόβλημα γίνεται:

Maximize $z = 2x + 5y^+ - 5y^-$

subject to

$$3x + 2y^+ - 2y^- \leq 6$$
$$2x + 9y^+ - 9y^- \leq 8$$
$$x \geq 0, \quad y^+ \geq 0, \quad y^- \geq 0,$$

“Μη-περιορισμένες” μεταβλητές

Έστω ότι η μεταβλητή x_j δεν πρέπει να υπακούει στον περιορισμό “≥0”. Αντικαθιστούμε την x_j με δύο νέες μεταβλητές, x_j^+ και x_j^-, έτσι ώστε $x_j=x_j^+-x_j^-$, ενώ x_j^+, $x_j^-\geq 0$. Δηλαδή κάθε αριθμός είναι διαφορά δύο θετικών αριθμών. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να εισάγουμε περιορισμούς στις μεταβλητές.

Παράδειγμα: Έστω το αρχικό πρόβλημα:

Minimize $z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$

subject to the constraints

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8 \\ x_1 - x_2 &= 6 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Θέτοντας $x_3=x_3^+-x_3^-$ το πρόβλημα γίνεται:

Maximize $z = -2x_1 - 3x_2 - x_3^+ + x_3^-$

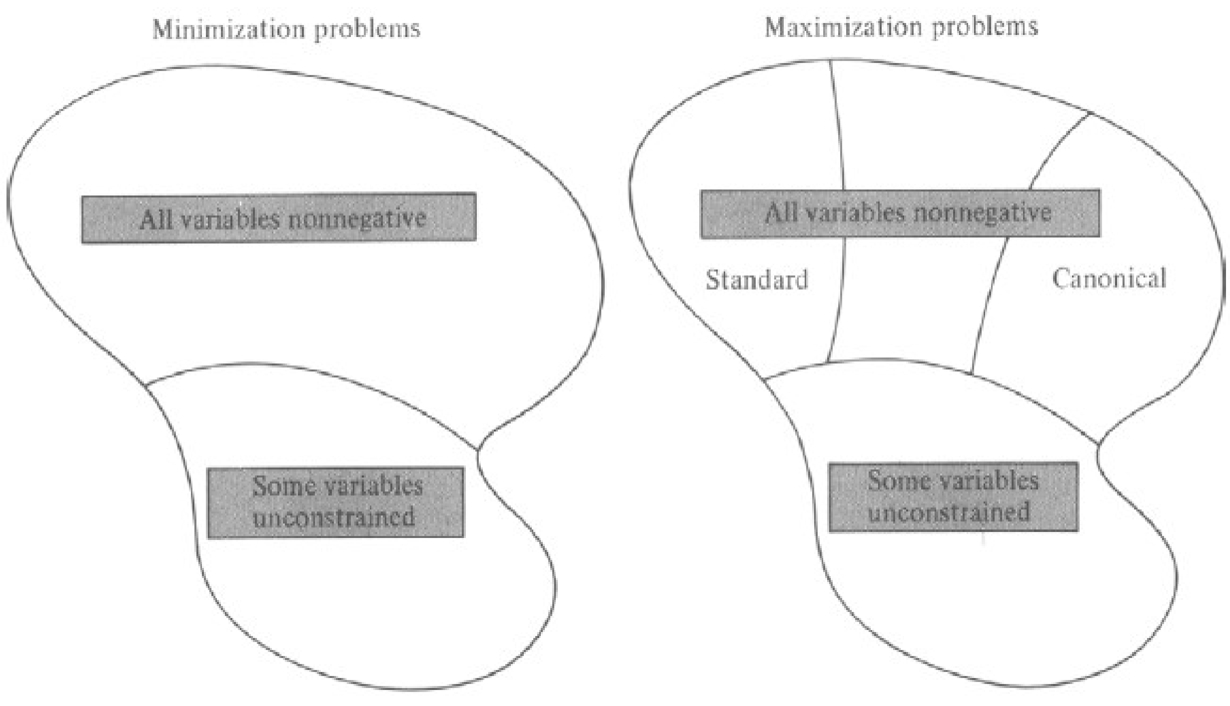
subject to

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3^+ + x_3^- &= 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3^+ - x_3^- &= 8 \\ x_1 - x_2 &= 6 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3^+ \geq 0, \quad x_3^- &\geq 0, \end{aligned}$$

Κλιμάκωση

Δεν είναι δύσκολο να δειχθεί ότι αν και τα δύο μέλη ενός ή περισσοτέρων περιορισμών πολλαπλασιαστούν με σταθερές τότε δεν επηρεάζεται η βέλτιστη λύση. Αυτή η τεχνική χρησιμοποιείται για να έχουμε ίδια τάξη μεγέθους σε όλους τους συντελεστές του ΓΠ.

Τέλος, οι διάφοροι τύποι προβλημάτων ΓΠ φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



Εισαγωγή Πινάκων

Πολλές φορές είναι πρακτικό να εκφράζονται τα προβλήματα ΓΠ υπό μορφή πινάκων. Έστω το πρόβλημα:

Maximize $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

subject to

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \end{array}\right\}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Εισαγωγή Πινάκων

Θέτοντας:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad \text{and } \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix},$$

Τότε ζητάμε ένα διάνυσμα $x \in R^n$ το οποίο θα:

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \quad z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ &\text{subject to} \\ &\qquad \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ &\qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Εισαγωγή Πινάκων

Έτσι το

Παράδειγμα 1 (*ανάλυση δραστηριότητας*): Ένας μύλος ξυλείας πριονίζει σε τύπο Α και τύπο Β τα κούτσουρα που λαμβάνει. Υποθέστε ότι απαιτεί 2 hr για την κατασκευή 1000 b.ft τύπου Α και 5 hr για το πλανάρισμα 1000 b.ft υλικού τύπου Α. Και ότι απαιτεί 2 hr για την κατασκευή 1000 b.ft τύπου Β αλλά μόνο 3 hr για το πλανάρισμα 1000 b.ft υλικού τύπου Β. Το πριόνι είναι διαθέσιμο μόνο 8 hr την ημέρα, και η μηχανή πλαναρίσματος είναι διαθέσιμη 15 hr την ημέρα. Αν το κέρδος είναι 120 $ για 1000 b.ft τύπου Α και 100 $ για τύπου Β, πόσα πρέπει να κατασκευάζονται από το κάθε είδος για να έχουμε το μέγιστο κέρδος;

Γίνεται:

Ζητείται ένα διάνυσμα $x \in R^2$ το οποίο θα: maximize $z = \begin{bmatrix} 120 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

subject to

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \ge \mathbf{0}.$$

Εισαγωγή Πινάκων

Κάθε διάνυσμα που ικανοποιεί τους περιορισμούς αποτελεί μια **εφικτή λύση**. Αν αυτή η λύση μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση τότε καλείται **βέλτιστη λύση**.

Για παράδειγμα στο προηγούμενο πρόβλημα εφικτές λύσεις είναι τα:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{and} \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ελέγχουμε για το x_2: $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 13 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}.$

Πως μετατρέπουμε μια ανισότητα σε ισότητα

Έστω ο περιορισμός: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$.

Εισάγουμε μια καινούρια μεταβλητή την u_i και γράφουμε:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + u_i = b_i.$$

Η u_i καλείται μεταβλητή υστέρησης γιατί δείχνει πόσο "υστερεί" το αριστερό μέλος έναντι του δεξιού. Έτσι το

$$\text{Maximize} \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

subject to

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{array}\right\}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Πως μετατρέπουμε μια ανισότητα σε ισότητα

Μετασχηματίζεται στο:

Maximize $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

subject to

$$\left.\begin{array}{llllll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & + x_{n+1} & & & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & & + x_{n+2} & & = b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & & & + x_{n+m} & = b_m \end{array}\right\}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \ldots, \quad x_n \geq 0, \quad x_{n+1} \geq 0, \ldots, \quad x_{n+m} \geq 0.$$

Το οποίο έχει m εξισώσεις και m+n αγνώστους. Αν $y=[y_1\ y_3\ \ldots\ y_n]^T$ είναι μια εφικτή λύση τότε $y_{n+i}=b_i-a_{i1}y_1-a_{12}y_2-\ldots-a_{in}y_n$

Πως μετατρέπουμε μια ανισότητα σε ισότητα

Έστω πάλι το παράδειγμα 1. Εισάγοντας τις μεταβλητές υστέρησης *u, v* έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\text{Maximize} \quad z = 120x + 100y\\
&\text{subject to}\\
&\quad 2x + 2y + u \qquad\;\; = 8\\
&\quad 5x + 3y \qquad + v = 15\\
&x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad u \geq 0, \quad v \geq 0.
\end{aligned}$$

Σύμφωνα με το μοντέλο η “u” είναι διαφορά ανάμεσα στο χρονικό διάστημα που το πριόνι είναι διαθέσιμο, 8hr, και το διάστημα που χρησιμοποιείται, 2x+2y. Όμοια, η “v” είναι η διαφορά ανάμεσα στο χρονικό διάστημα που η μηχανή πλαναρίσματος είναι διαθέσιμη, 15hr, και το διάστημα που χρησιμοποιείται, 5x+3y. Έχουμε δείξει ότι μία εφικτή λύση είναι η x=2, y=1. Τότε
u=8-2·2-2·1=2 και **v=15-5·2-3·1=2**. Οπότε
x=2, y=1, u=2 και **v=2**, είναι μια **εφικτή λύση**.

Έστω τώρα οι τιμές x=1, y=1, u=4 και v=7 αυτές αποτελούν εφικτή λύση γιατί:
2·1+2·1+4=8 και 5·1+3·1+7=15, άρα η x=1, y=1 είναι εφικτή λύση.

Γεωμετρία των προβλημάτων ΓΠ

Θα μελετήσουμε την γεωμετρία των προβλημάτων ΓΠ αρχικά για έναν περιορισμό, στη συνέχεια για ένα σύνολο από περιορισμούς και τέλος για την αντικειμενική συνάρτηση. Έτσι προκύπτει ένας τρόπος λύσης για προβλήματα μέχρι τρεις (3) παραμέτρους.

Ο απλός περιορισμός για ένα πρόβλημα ΓΠ i-ιοστής τάξης είναι:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i,$$

Και μπορεί να γραφεί ως:

$$\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \leq b_i,$$

$$\mathbf{a}^{\mathrm{T}} = [a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}].$$

Γεωμετρία των προβλημάτων ΓΠ

Το σύνολο των σημείων $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ ονομάζεται κλειστός ημιχώρος (closed half-space). Αν η ανισότητα αντιστραφεί, τότε τα σημεία ικανοποιούν την

$$\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \geq b_i$$

Παράδειγμα 1. Έστω ο περιορισμός 2x +3y ⩽ 6 και το κλειστό ημιεπίπεδο

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \leq 6 \right\},$$

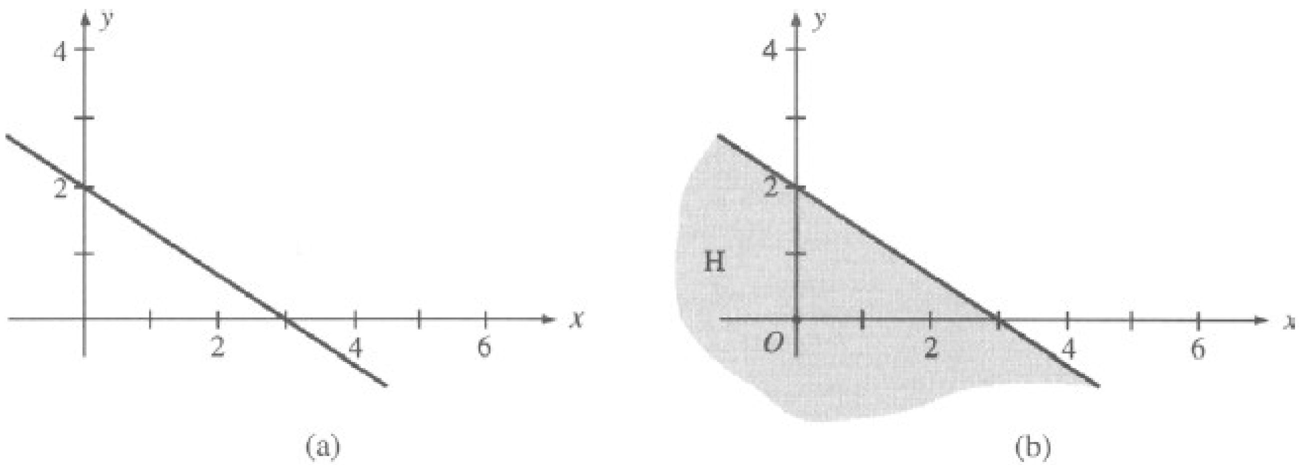
Που αποτελείται από σημεία που ικανοποιούν τον περιορισμό. Σημειώστε ότι τα σημεία (3,0) και (1,1) επισής ικανοποίουν τον περιορισμό και για αυτό ανήκουν στο H. Επίσης, τα σημεία (3,4) και (-1,3) δεν ικανοποίουν τον περιορισμό και για αυτό δεν ανήκουν στο H. Κάθε σημείο της ευθείας 2x+3y=6 ικανοποιεί τον περιορισμό και για αυτό ανήκει στο H.

Γεωμετρία των προβλημάτων ΓΠ

Παράδειγμα 1. Μπορούμε να σχεδιάσουμε το ημιεπίπεδο στον R^2 φέρνοντας την γραμμή και χρησιμοποιώντας ένα τυχαίο σημείο για να δούμε πιο μέρος της ευθείας ανήκει στο H. Ένας απλός τρόπος για να σχηματίσουμε την ευθεία είναι να βρούμε τα σημεία που τέμνει τους άξονες. Έτσι για την εκλογή του σημείου μελετάμε το αν η αρχή των αξόνων ανήκει στην ευθεία. Αν όχι τότε ελέγχουμε αν ικανοποιεί την ανισότητα. Αν ναι τότε το ημιεπίπεδο που περιέχει το σημείο είναι το H. Αν όχι, τότε το ημιεπίπεδο που δεν περιέχει το σημείο είναι το H. Αν το σημείο της αρχής των αξόνων είναι πάνω στην ευθεία τότε εκλέγεται ένα άλλο σημείο.

Γεωμετρία των προβλημάτων ΓΠ

Παράδειγμα 1. Υπολογίζογμε την x-συντεταγμένη x=3 και y=2. Αφού το (0,0) δεν ανήκει στη 2x+3y=6. Το (0,0) ικανοποιεί την ανισότητα, και το H βρίσκεται κάτω από την ευθεία.



Συνδυαστική Βελτιστοποίηση
Εισαγωγή στον γραμμικό προγραμματισμό (ΓΠ)

Γεωμετρία των προβλημάτων ΓΠ

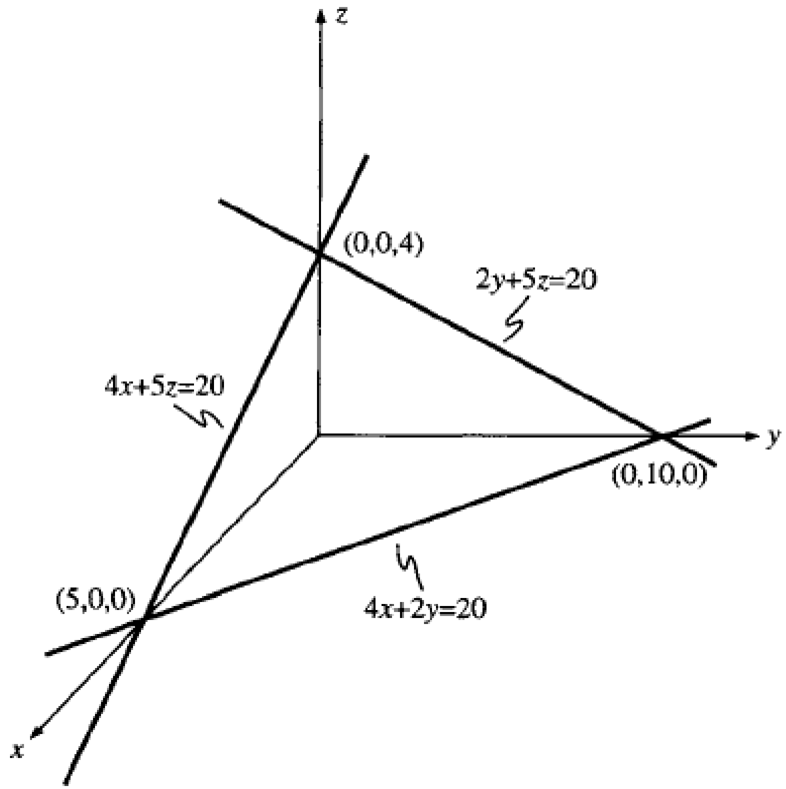
Παράδειγμα 2. Για τρεις μεταβλητές το H για τον R^3 ορίζεται από, π.χ, $4x+2y+5z \leqslant 20$, με:

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \leq 20 \right\}.$$

Και σχηματίζουμε το επίπεδο $4x+2y+5z=20$ και εκλέγουμε ένα σημείο. Για τη σχεδίαση του επιπέδου βρίσκουμε τα σημεία τομής του με τα επίπεδα xy, xz, yz. Αυτά αντιστοιχούν σε γραμμές
$z=0$ $4x+2y=20$ (xy),
$y=0$ $4x+5z=20$ (xz),
$x=0$ $2y+5z=20$ (yz), και τελικά το H είναι:

Γεωμετρία των προβλημάτων ΓΠ

Παράδειγμα 2. Αυτά αντιστοιχούν σε γραμμές
z=0 4x+2y=20 (xy),
y=0 4x+5z=20 (xz),
x=0 2y+5z=20 (yz), και τελικά το Η είναι:



Γεωμετρία των προβλημάτων ΓΠ

Προφανώς σε περισσότερες από 3 διαστάσεις δεν έχουμε τη δυνατότητα να σχεδιάσουμε το H. Έτσι, ενώ η κανονική μορφή ενός περιορισμού είναι:

$$\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = b.$$

Το γράφημα του στο R^n είναι ένα υπερεπίπεδο. Αν η εξίσωση ήταν μια ανισότητα, δλδ:

$$\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \leq b,$$

Τότε τα σημεία που την ικανοποιούν θα ορίζουν τον κλειστό ημιχώρο. Ώστε, το υπερεπίπεδο είναι το όριο ενός κλειστού ημιχώρου. Δηλαδή αποτελείται από τα σημεία του ημιχώρου που βρίσκονται στην ακμή του.

Γεωμετρία των προβλημάτων ΓΠ

Παράδειγμα 3: Η εξίσωση $4x+2y+5z=20$ ορίζει ένα υπερεπίπεδο Ĥ στον R^3. Το υπερεπίπεδο Ĥ είναι το όριο του κλειστού ημιχώρου H_1 που ορίζεται από την $4x+2y+5z \leqslant 20$. Ο ημιχώρος H_1 εκτείνεται κάτω από το υπερεπίπεδο Ĥ. Επίσης το Ĥ είναι το όριο του H_2: $4x+2y+5z \geq 20$. Το H_2 εκτείνεται πάνω από το Ĥ.

Το υπερεπίπεδο Ĥ διαιρεί τον χώρο R^n σε δύο κλειστούς ημιχώρους:

$$H_1 = \{x \in R^n \mid \mathbf{a}^T \leq b\}$$

$$H_2 = \{x \in R^n \mid \mathbf{a}^T \geq b\}.$$

Γεωμετρία των προβλημάτων ΓΠ

Παράδειγμα 3: Επίσης ισχύει: $H_1 \cap H_2 = \hat{H}$, δηλαδή το υπερεπίπεδο είναι η τομή δύο κλειστών ημιχώρων.

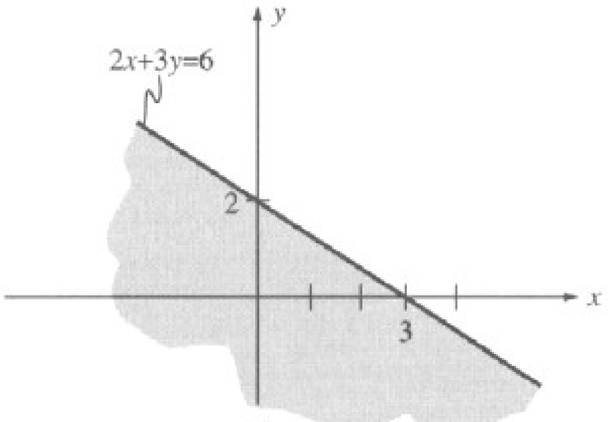
Θυμηθείτε ότι μια πιθανή λύση σε ένα πρόβλημα ΓΠ είναι ένα σημείο το οποίο ικανοποιεί όλες τους περιορισμούς. ΄Ετσι, το σύνολο των πιθανών λύσεων είναι η τομή όλων ημιχώρων που ορίζονται από τους περιορισμούς.

Γεωμετρία των προβλημάτων ΓΠ

Παράδειγμα 4: Σχεδιάστε το σύνολο όλων των πιθανών λύσεων που ικανοποιούν τις ανισότητες:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &\le 6 \\ -x + 2y &\le 4 \\ x &\ge 0 \\ y &\ge 0. \end{aligned}$$

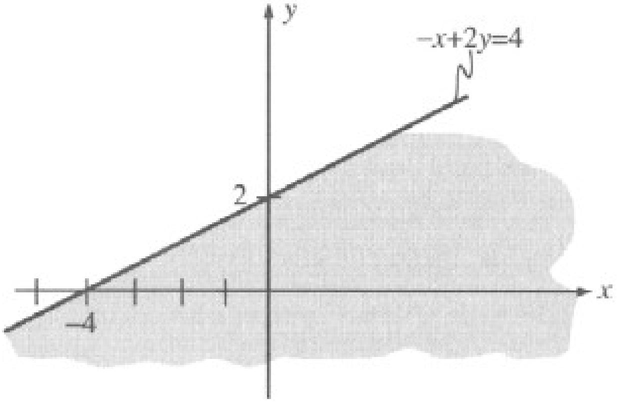
Για την πρώτη ανισότητα το σύνολο των λύσεων φαίνεται σαν σκιασμένη περιοχή στο παρακάτω σχήμα:



(a)

Γεωμετρία των προβλημάτων ΓΠ

Παράδειγμα 4: Για την δεύτερη ανισότητα το σύνολο των λύσεων φαίνεται σαν σκιασμένη περιοχή στο παρακάτω σχήμα:

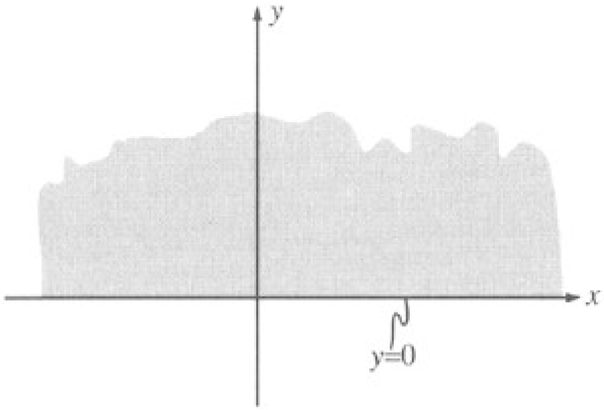


(b)

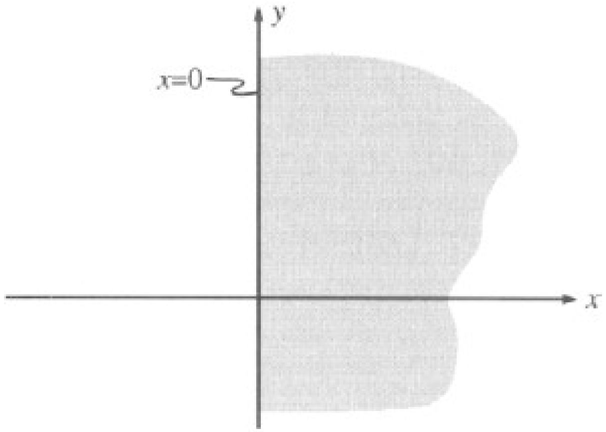
Για τον προσδιορισμό τους χρησιμοποιήθηκε το σημείο (0,0).

Γεωμετρία των προβλημάτων ΓΠ

Παράδειγμα 4: Για την τρίτη και τέταρτη ανισότητα το σύνολο των λύσεων φαίνεται σαν σκιασμένη περιοχή στα παρακάτω σχήματα, αντίστοιχα:



(c)

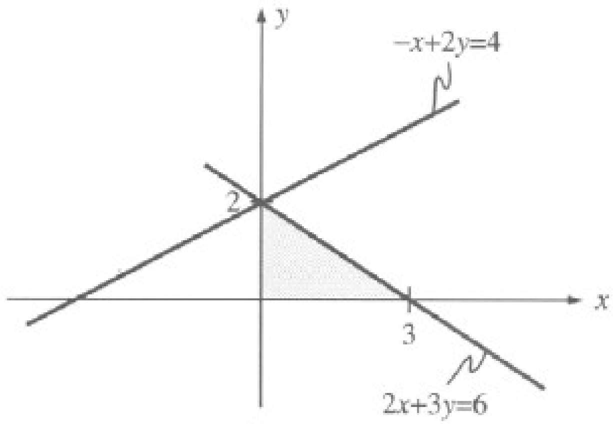


(d)

Για τον προσδιορισμό τους χρησιμοποιήθηκε το σημείο (1,1).

Γεωμετρία των προβλημάτων ΓΠ

Παράδειγμα 4: Η τομή όλων αυτών είναι



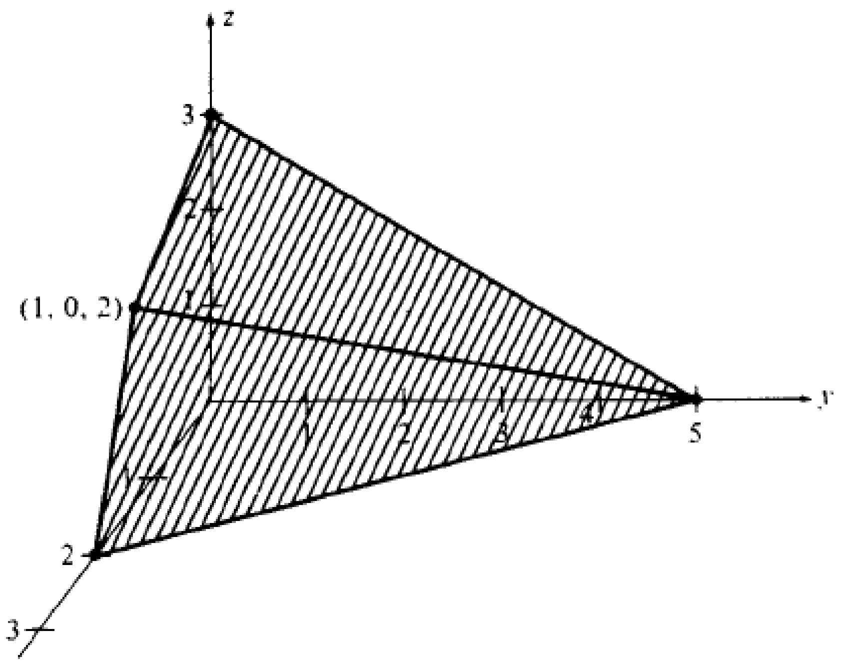
(c)

Γεωμετρία των προβλημάτων ΓΠ

Παράδειγμα 5: Χρησιμοποιήστε την ίδια τεχνική για το παρακάτω σύνολο των ανισώσεων:

$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$
$$z \geq 0$$
$$5x + 3y + 5z \leq 15$$
$$10x + 4y + 5z \leq 20.$$

Οι πρώτες τρεις μας περιορίζουν στο 1ο όγδοο του R^3. Οι άλλες δύο ορίζουν συγκεκριμένους ημιχώρους. Έτσι:



Γεωμετρία της Αντικειμενικής Συνάρτησης

Η αντικειμενική συνάρτηση κάθε προβλήματος ΓΠ μπορεί να γραφεί ως:

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}.$$

Αν k είναι μια σταθερά τότε το γράφημα της εξίσωσης $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = k$ είναι ένα υπερεπίπεδο.

Έστω ότι μας ζητείται η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Για το σκοπό αυτό αναζητούμε σημεία x στο σύνολο των πιθανών λύσεων για τα οποία η τιμή του k γίνεται όσο το δυνατό μεγαλύτερη. Γεωμετρικά αναζητάμε ένα υπερεπίπεδο το οποίο τέμνει το σύνολο των πιθανών λύσεων και για το οποίο το k είναι μέγιστο. Η τιμή του k αποτελεί μέτρο της απόστασης από την αρχή του υπερεπιπέδου. Μπορούμε να ξεκινήσουμε από μια πολύ μεγάλη τιμή του k και να την μειώνουμε μέχρι να βρούμε ένα υπερεπίπεδο το οποίο απλά εφάπτεται στο σύνολο των πιθανών λύσεων.

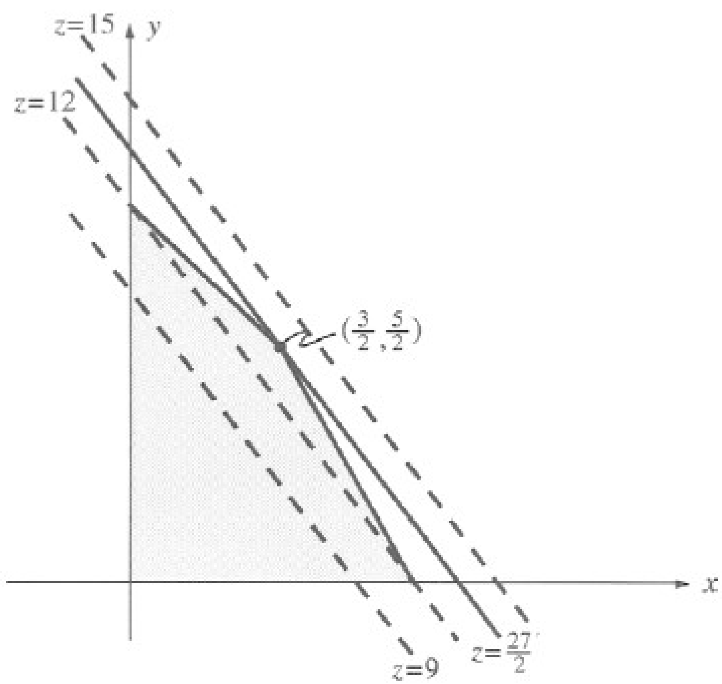
Γεωμετρία της Αντικειμενικής Συνάρτησης

Παράδειγμα 6: Έστω το πρόβλημα, μεγιστοποιήστε την $z = 4x + 3y$

Όταν ισχύουν οι

$$x + y \le 4$$
$$5x + 3y \le 15$$
$$x \ge 0, \quad y \ge 0$$

Το σύνολο των εφικτών λύσεων (σκιασμένη περιοχή) και των υπερεπιπέδων φαίνεται στο σχήμα:



Γεωμετρία της Αντικειμενικής Συνάρτησης

Παράδειγμα 6: Έστω το πρόβλημα, μεγιστοποιήστε την $z = 4x + 3y$

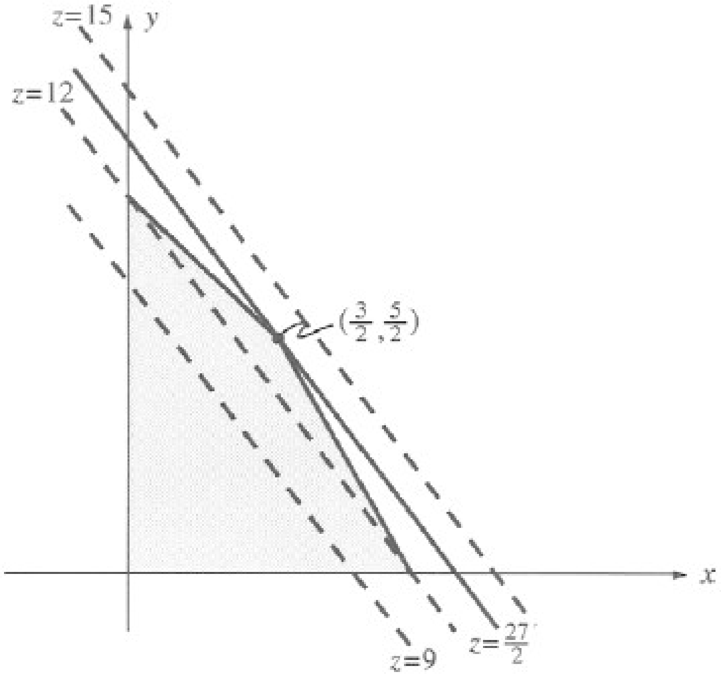
Όταν ισχύουν οι

$$x + y \leq 4$$
$$5x + 3y \leq 15$$
$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

Υπολογίζουμε τις παρακάτω τιμές:

$$z = 9, \quad z = 12, \quad z = \frac{27}{2}, \quad \text{and} \quad z = 15$$

Και φαίνεται ότι η max k είναι 27/2, η οποία υπολογίζεται για x=3/2, y=5/2.



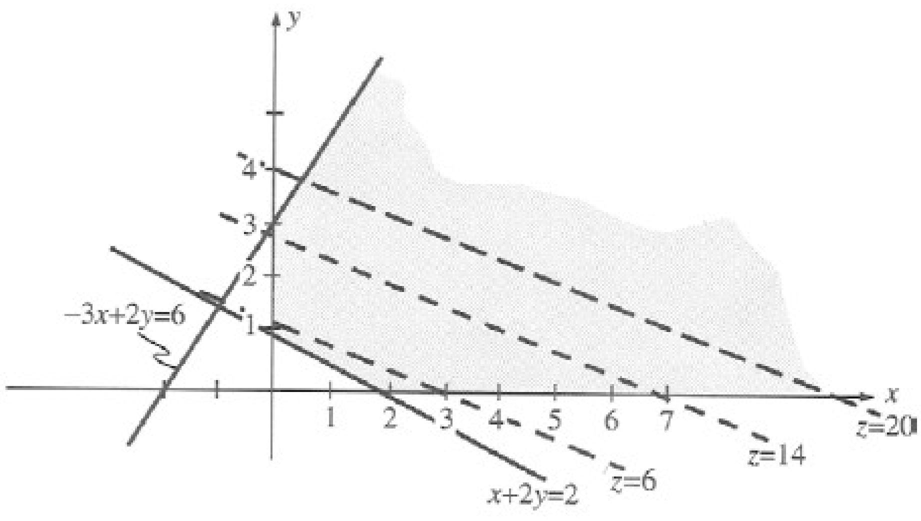
Γεωμετρία της Αντικειμενικής Συνάρτησης

Παράδειγμα 7: Έστω το πρόβλημα ΓΠ, μεγιστοποιήστε την $z = 2x + 5y$

όταν ισχύουν οι:

$$-3x + 2y \leq 6$$
$$x + 2y \geq 2$$
$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

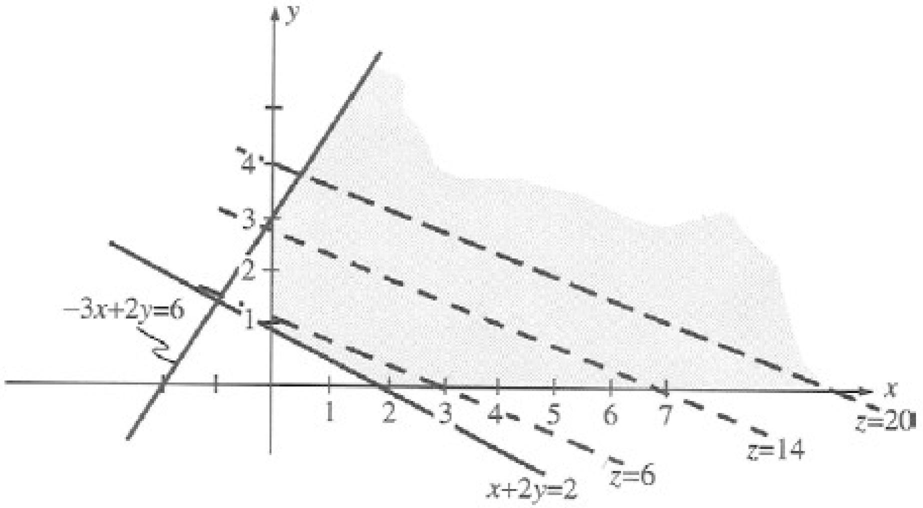
Το γράφημα του συνόλου των εφικτών λύσεων δίδεται ως η σκιασμένη περιοχή του παρακάτω σχήματος:



Γεωμετρία της Αντικειμενικής Συνάρτησης
Παράδειγμα 7: Ενώ έχουν σχεδιαστεί και τα γραφήματα των υπερεπιπέδων:

$z = 6, \quad z = 14, \quad \text{and} \quad z = 20.$

Από το σχήμα φαίνεται ότι υπάρχουν σημεία στα δεξιά του υπερεπιπέδου τα οποία ανήκουν ακόμη στο σύνολο των εφικτών λύσεων.
Άρα η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης μπορεί να γίνει αυθαίρετα μεγάλη.



Συνδυαστική Βελτιστοποίηση

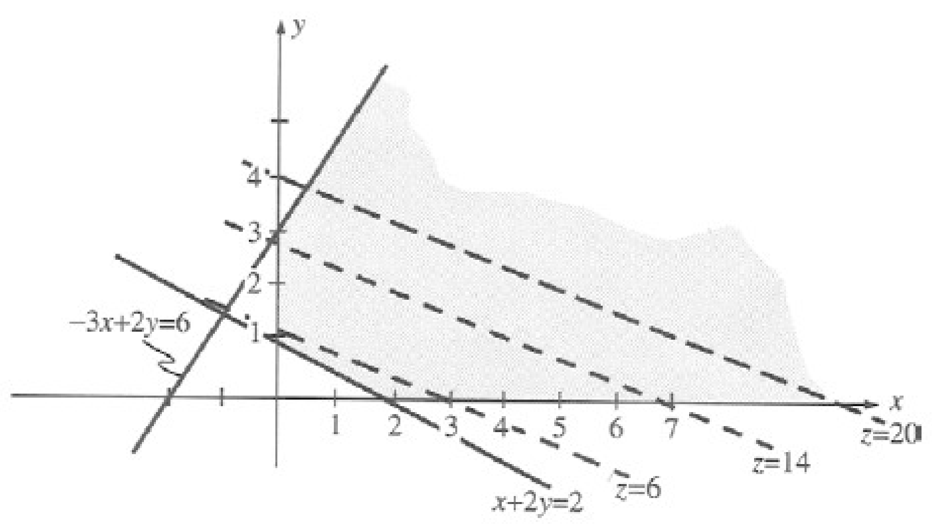
Εισαγωγή στον γραμμικό προγραμματισμό (ΓΠ)

Γεωμετρία της Αντικειμενικής Συνάρτησης

Παράδειγμα 8: Έστω ένα πρόβλημα ΓΠ με ίδιους περιορισμούς με το πρόβλημα 7. Αλλά τώρα ζητείται η ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης

$$z = 3x + 5y.$$

Από το σχήμα φαίνεται οι η βέλτιστη τιμή είναι
η z=5 η οποία λαμβάνεται για x=0, y=1. Μικρότερες τιμές για την αντικειμενική συνάρτηση π.χ. z=3, παράγει γραφήματα υπερεπιπέδων τα οποία δεν τέμνουν το σύνολο των εφικτών λύσεων (π.χ. z=3, και z=5.



Συνδυαστική Βελτιστοποίηση
Εισαγωγή στον γραμμικό προγραμματισμό (ΓΠ)

Γεωμετρία του συνόλου των εφικτών λύσεων

Θα μελετήσουμε την ερώτηση που αναφέρεται στο που μπορούμε στο σύνολο των εφικτών λύσεων μπορούμε να βρούμε ένα σημείο για το οποίο η αντικειμενική συνάρτηση λαμβάνει την βέλτιστη τιμή.

Αρχικά θα δείξουμε ότι αν δύο σημεία x_1, x_2 είναι εφικτές λύσεις, τότε κάθε σημείο του ευθυγράμμου τμήματος που τα ενώνει είναι επίσης μια εφικτή λύση. Το ευθύγραμμο τμήμα ορίζεται ως:

$$\{\mathbf{x} \in R^n \,|\, \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2, \quad 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Παρατηρήστε ότι αν λ=0 τότε προκύπτει το x_2, και αν λ=1 τότε προκύπτει το x_1. Τα **εσωτερικά σημεία** του ευθ. τμήματος προκύπτουν για 0<λ<1, ενώ τα x_1, x_2 αποτελούν τα **τελικά σημεία**.

Γεωμετρία του συνόλου των εφικτών λύσεων

Αν τα x_1, x_2 είναι λύσεις ενός προβλήματος ΓΠ και ένας περιορισμός είναι το

$$\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \leq b_i$$

τότε ισχύουν τα: $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_1 \leq b_i \quad \text{and} \quad \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_2 \leq b_i.$

Για κάθε σημείο $x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$, $0\leq\lambda\leq 1$, του ευθ. τμήματος ισχύει:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} &= \mathbf{a}^{\mathrm{T}}(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) \\
&= \lambda\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_2 \\
&\leq \lambda b_i + (1-\lambda)b_i \\
&= b_i.
\end{aligned}$$

Οπότε πράγματι το x ικανοποιεί τον περιορισμό

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση

Εισαγωγή στον γραμμικό προγραμματισμό (ΓΠ)

Γεωμετρία του συνόλου των εφικτών λύσεων

Έστω τώρα δύο εφικτές λύσεις x_1, x_2 σε κανονική μορφή με αντικειμενική συνάρτηση $c^T x$. Αν η αντικειμενική συνάρτηση έχει την ίδια τιμή k για τα x_1, x_2 τότε με όμοιο τρόπο όπως παραπάνω μπορούμε να δείξουμε ότι έχει την τιμή k για κάθε σημείο του ευθ. τμήματος. Υποθέστε ότι η τιμή είναι διαφορετική, και έστω: $c^T x_1 < c^T x_2$.

Αν $x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$, $0 \leq \lambda \leq 1$, τότε:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T\mathbf{x} &= \mathbf{c}^T(\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) \\ &= \lambda \mathbf{c}^T\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{c}^T\mathbf{x}_2 \\ &< \lambda \mathbf{c}^T\mathbf{x}_2 + (1-\lambda)\mathbf{c}^T\mathbf{x}_2 \\ &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}_2. \end{aligned}$$

Οπότε η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης σε κάθε εσωτερικό σημείο είναι μικρότερη από την τιμή σε ένα τελικό σημείο, όμοια μπορεί να δειχθεί ότι είναι μεγαλύτερη από την τιμή στο άλλο τελικό σημείο.

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση

Εισαγωγή στον γραμμικό προγραμματισμό (ΓΠ)

Γεωμετρία του συνόλου των εφικτών λύσεων

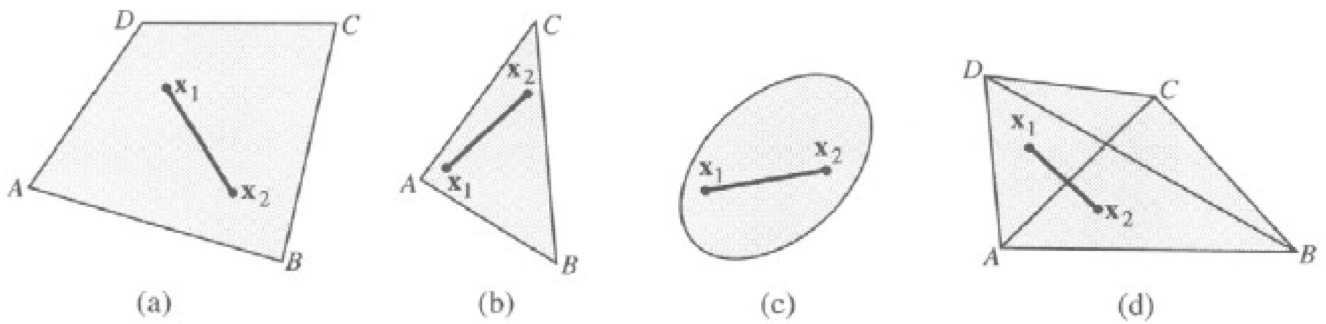
Συμπερασματικά, για τις εφικτές λύσεις x_1, x_2 και για τις εσωτερικές τιμές του ευθ. τμήματος που τις συνδέει η τιμή τηςαντικειμενικής συνάρτησης μπορεί να είναι α) σταθερή ή β) μέγιστη σε ένα τελικό σημείο και ελάχιστη στο άλλο.

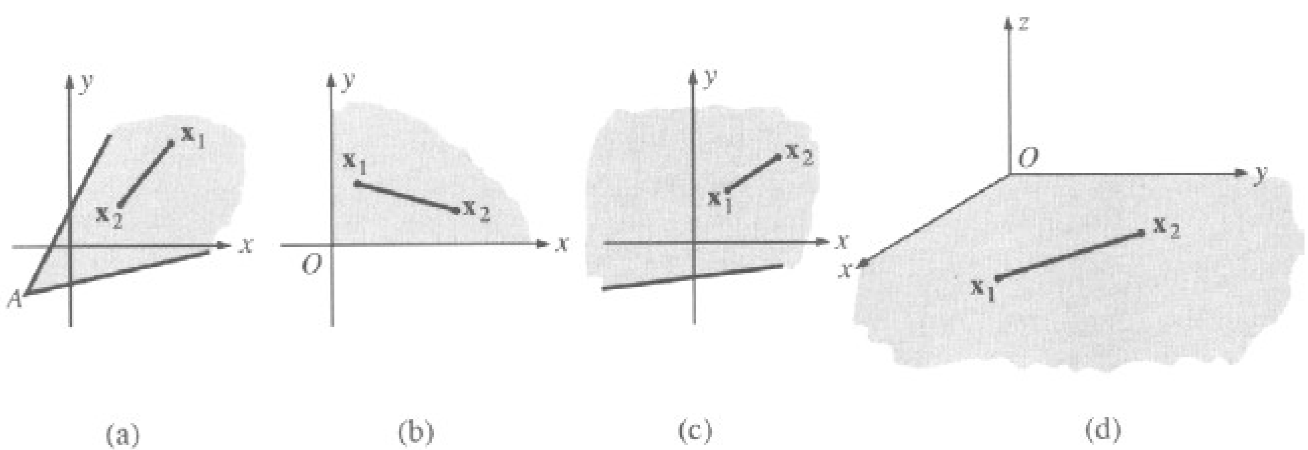
Γενικά η ιδιότητα που δηλώνει ότι ένα σύνολο περιέχει το ευθ. τμήμα που ενώνει δύο σημεία είναι κεφαλαιώδους σημασίας στον ΓΠ.

Ορισμός: Ένα υποσύνολο S του R^n καλείται κυρτό αν για κάθε δύο διακριτά σημεία x_1, x_2 που ανήκουν στο S και το ευθ. τμήμα που τα ενώνει ανήκει στο S. Δηλαδή το S είναι κυρτό αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in S$, και το $x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$, $0\leq\lambda\leq 1$, $\in S$.

Γεωμετρία του συνόλου των εφικτών λύσεων

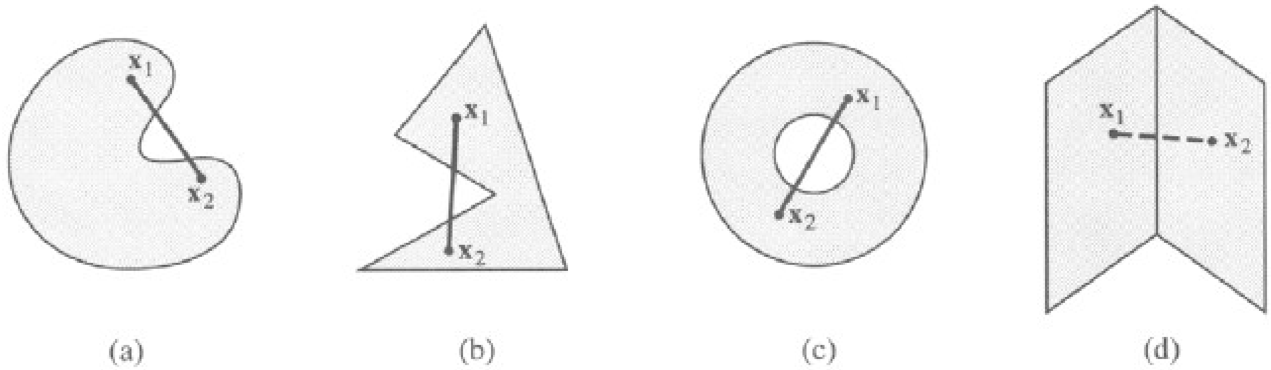
Κάποια κυρτά πολύγωνα:





Γεωμετρία του συνόλου των εφικτών λύσεων

Κάποια μη-κυρτά πολύγωνα:



Γεωμετρία του συνόλου των εφικτών λύσεων

Θεώρημα 1.1: Ένας κλειστός ημιχώρος είναι ένα κυρτό σύνολο.

Απόδειξη: Έστω ο ημιχώρος H_1 που ορίζεται από την $c^T x \leq k$. Και έστω x_1, $x_2 \in H_1$, και $x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$, $0\leq\lambda\leq 1$ τότε:

$$\begin{aligned}\mathbf{c}^T\mathbf{x} &= \mathbf{c}^T[\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2] \\ &= \lambda\mathbf{c}^T\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{c}^T\mathbf{x}_2.\end{aligned}$$

Επειδή $\lambda\geq 0$ και $1-\lambda\geq 0$

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq \lambda k + (1-\lambda)k = k.$$

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq k,$$

Οπότε $x\in H_1$.