Συνδυαστική Βελτιστοποίηση
Εισαγωγή στον γραμμικό προγραμματισμό (ΓΠ)

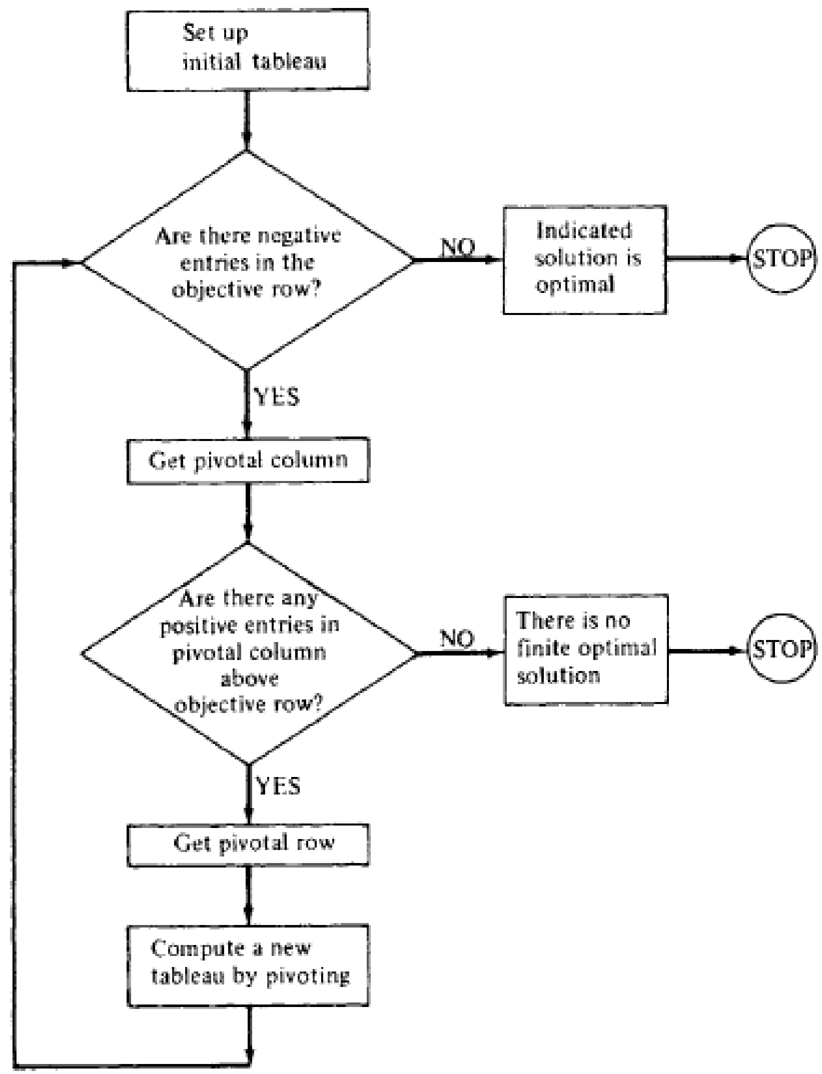
Η μέθοδος Simplex

Επιγραμματικά η μέθοδος έχει ως εξής:
1) Αρχικά σχηματίζουμε τον αρχικό πίνακα
2) Εφαρμογή του κανόνα για την βέλτιστη λύση. Αν η objective raw δεν έχει αρνητικές τιμές τότε η λύση είναι η βέλτιστη. Τερματίζεται ο υπολογισμός.
3) Βρίσκουμε την pivotal column με την πιο αρνητική τιμή στην objective raw. Σε περίπτωση που είναι περισσότερες από μία διαλέγουμε μία στην τύχη.
4) Βρίσκουμε την pivotal raw. Αυτό γίνεται αφού σχηματίσουμε τους λόγους-θ (τα πηλίκα των τιμών της δεξιότερης στήλης προς τα στοιχεία της pivotal column – όχι τα στοιχεία της objective raw. Η pivotal raw είναι τότε αυτή για την οποία βρίσκουμε την μικρότερη τιμή θ.

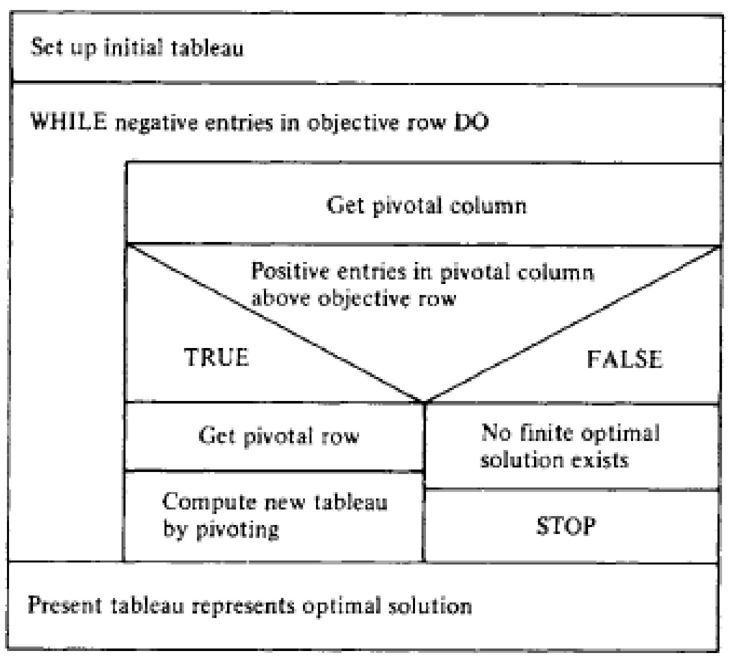
Αν καμία τιμή της pivotal column δεν είναι θετική τότε το πρόβλημα δεν έχει πεπερασμένη βέλτιστη λύση.
5) Εφαρμόζουμε το pivoting και επιστρέφουμε στο βήμα 2.

Η μέθοδος Simplex

Το διάγραμμα ροής έχει ως εξής:



ή



Η μέθοδος Simplex (παράδειγμα 1)

Παράδειγμα:

$$\begin{aligned}
&\text{Maximize} \quad z = 8x_1 + 9x_2 + 5x_3 \\
&\text{subject to} \\
&\qquad x_1 + x_2 + 2x_3 \le 2 \\
&\qquad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 3 \\
&\qquad 6x_1 + 6x_2 + 2x_3 \le 8 \\
&\qquad x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0.
\end{aligned}$$

εισάγουμε παραμέτρους υστέρησης:

$$\begin{aligned}
&\text{Maximize} \quad z = 8x_1 + 9x_2 + 5x_3 \\
&\text{subject to} \\
&x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\
&2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_5 = 3 \\
&6x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_6 = 8 \\
&x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 6.
\end{aligned}$$

Η μέθοδος Simplex (παράδειγμα 1)

ο αρχικός πίνακας είναι

		x_1	x_2 ↓	x_3	x_4	x_5	x_6	
	x_4	1	1	2	1	0	0	2
←	x_5	2	3	4	0	1	0	3
	x_6	6	6	2	0	0	1	8
		−8	−9	−5	0	0	0	0

μετά το πρώτο pivoting

		x_1 ↓	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
	x_4	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	1
	x_2	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	1
←	x_6	2	0	−6	0	−2	1	2
		−2	0	7	0	3	0	9

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση
Εισαγωγή στον γραμμικό προγραμματισμό (ΓΠ)

Η μέθοδος Simplex (παράδειγμα 1)

και τελικά

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	0	0	$\frac{5}{3}$	1	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$
x_2	0	1	$\frac{10}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_1	1	0	-3	0	-1	$\frac{1}{2}$	1
	0	0	1	0	1	1	11

οπότε οι τιμές είναι: $x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{3}, \quad x_3 = 0.$

και για τις μεταβλητές υστέρησης είναι: $x_4 = \frac{2}{3}, \quad x_5 = 0, \quad x_6 = 0.$

Η μέθοδος Simplex (παράδειγμα 2)

Παράδειγμα:

Maximize $z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4$

subject to

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 \qquad\qquad &\le 2 \\ -2x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 3x_4 &\le 10 \\ 2x_1 - 5x_2 \qquad + 3x_4 &\le 5 \\ x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3,4. \end{aligned}$$

εισάγουμε μεταβλητές υστέρησης:

Maximize $z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4$

subject to

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 \qquad\quad + x_5 \qquad\qquad &= 2 \\ -2x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 3x_4 \qquad + x_6 \qquad &= 10 \\ 2x_1 - 5x_2 \qquad + 3x_4 \qquad\qquad + x_7 &= 5 \\ x_j \ge 0, \quad j = 1,2,\ldots,7. \end{aligned}$$

Η μέθοδος Simplex (παράδειγμα 2)

Ο αρχικός πίνακας είναι:

		↓						
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_5	1	−1	−1	0	1	0	0	2
← x_6	−2	5	−3	−3	0	1	0	10
x_7	2	−5	0	3	0	0	1	5
	−2	−3	−1	−1	0	0	0	0

η πιο αρνητική τιμή στην αντικειμενική σειρά είναι η -3 και ο μικρότερος λόγος ο -2. Άρα ...

Η μέθοδος Simplex (άσκηση 1)

Maximize $z = 2x + 5y$
subject to

$$3x + 5y \leq 8$$
$$2x + 7y \leq 12$$
$$x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Η μέθοδος Simplex (άσκηση 2)

Maximize $z = x_1 + 3x_2 + 5x_3$
subject to

$$\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 + x_3 &\le 3 \\ x_1 + 4x_2 \qquad &\le 5 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

Η μέθοδος Simplex (άσκηση 3)

Maximize $z = 2x_1 + 3x_2 - x_3$
subject to

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - x_3 &\le 6 \\
x_1 - 3x_2 - 3x_3 &\le 10 \\
x_j \ge 0, \quad j &= 1, 2, 3.
\end{aligned}
$$