Συνδυαστική Βελτιστοποίηση
Εισαγωγή στον γραμμικό προγραμματισμό (ΓΠ)

Εικονικές Παράμετροι

Μέχρι στιγμής είδαμε την εφαρμογή της μεθόδου Simplex σε προβλήματα όπου το *δεξιό μέλος ήταν θετικό*. Δηλαδή όλοι οι περιορισμοί ήταν της μορφής:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{1}$$

όπου

$$b_i \geq 0.$$

Η παραδοχή ότι b≥0 μας δίδει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε σχετικά εύκολα μια εφικτή λύση ως: θέτουμε μηδέν τις πραγματικές παραμέτρους (δλδ όχι τις παραμέτρους υστέρησης) και υπολογίζουμε:

$$\mathbf{x} = (0, 0, \ldots, 0, b_1, b_2, \ldots, b_m).$$

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση
Εισαγωγή στον γραμμικό προγραμματισμό (ΓΠ)

Εικονικές Παράμετροι

Όμως υπάρχουν προβλήματα στα οποία δεν μπορούν όλοι οι περιορισμοί να μετατραπούν στην μορφή της (1). Για παράδειγμα ο περιορισμός:

$$2x + 3y \geq 4$$

μετατρέπεται στον

$$-2x - 3y \leq -4,$$

αλλά πλέον το δεξί μέλος είναι <0.

Εισάγοντας μια παράμετρο υστέρησης γίνεται:

$$-2x - 3y + u = -4. \tag{3}$$

Οπότε για x=y=0 προκύπτει u=-4 το οποίο δεν αποτελεί μια εφικτή λύση.

Εικονικές Παράμετροι

Είδαμε ότι για να εφαρμόσουμε τα παραπάνω έπρεπε:
1) το πρόβλημα να είναι στην κανονική του μορφή,
2) τα b_i να ήταν >0, και
3) να υπάρχει (αυστηρά) σε κάθε ισότητα μια παράμετρος με συντελεστή +1, ενώ ταυτόχρονα (αυστηρά) αυτή η παράμετρος θα πρέπει να εμφανίζεται μόνο σε μια ισότητα.

Παρόλα αυτά θα μπορούσαν να υπάρχουν εξισώσεις στην κανονική τους μορφή όπου μια τέτοια (όπως περιγράφεται στο -3-) μεταβλητή δεν υπάρχει. Την εξίσωση (3) μπορούμε να τη γράψουμε:

$$2x + 3y - u = 4.$$

Όμως τώρα δεν υπάρχει συντελεστής +1, και προφανώς τα x, y υπάρχουν και σε άλλες εξισώσεις, οπότε δεν μπορούν χαρακτηριστούν ειδικές παράμετροι.

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση
Εισαγωγή στον γραμμικό προγραμματισμό (ΓΠ)

Εικονικές Παράμετροι

Θα περιγράψουμε τη διαδικασία εισαγωγής μιας παραμέτρου η οποία μπορεί να δράσει ως βασική παράμετρος για την εύρεση μιας αρχικής εφικτής λύσης. Έστω το γενικό πρόβλημα:

$$\text{Maximize} \quad z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \tag{4}$$

subject to

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \ (\leq)(=)(\leq)\ b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \ (\leq)(=)(\geq)\ b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \ (\leq)(=)(\geq)\ b_m \end{array}\right\} \tag{5}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Εικονικές Παράμετροι

Στη συνέχεια γράφουμε το σύστημα των περιορισμών της (5) έτσι ώστε να μην υπάρχει αρνητικό δεξί μέλος, δλδ πολλαπλασιάζω τις αντίστοιχες ανισώσεις με -1. Με ανακατάταξη φέρνουμε τις “≤” πρώτες και τις “≥” στη συνέχεια, και στο τέλος τις “=”. Έστω ότι υπάρχουν r_1 περιορισμοί με ≥, r_2 με ≤ και r_3 με =.

Θεωρούμε την (5) στην εξής μορφή:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1, \quad b_1 \ge 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2, \quad b_2 \ge 0 \\ \vdots \\ a_{r_1 1}x_1 + a_{r_1 2}x_2 + \cdots + a_{r_1 n}x_n \le b_{r_1}, \quad b_{r_1} \ge 0 \end{array}\right\} \quad (7a)$$

$$\left.\begin{array}{l} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n \ge b'_1, \quad b'_1 \ge 0 \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n \ge b'_2, \quad b'_2 \ge 0 \\ \vdots \\ a'_{r_2 1}x_1 + a'_{r_2 2}x_2 + \cdots + a'_{r_2 n}x_n \ge b'_{r_2}, \quad b'_{r_2} \ge 0 \end{array}\right\} \quad (7b)$$

$$\left.\begin{array}{l} a''_{11}x_1 + a''_{12}x_2 + \cdots + a''_{1n}x_n = b''_1, \quad b''_1 \ge 0 \\ a''_{21}x_1 + a''_{22}x_2 + \cdots + a''_{2n}x_n = b''_2, \quad b''_2 \ge 0 \\ \vdots \\ a''_{r_3 1}x_1 + a''_{r_3 2}x_2 + \cdots + a''_{r_3 n}x_n = b''_{r_3}, \quad b''_{r_3} \ge 0 \end{array}\right\} \quad (7c)$$

Εικονικές Παράμετροι

Έπειτα μετατρέπουμε τις παραπάνω ανισότητες σε ισότητες με την εισαγωγή μεταβλητών υστέρησης. Κάθε τέτοια παράμετρος πρέπει να είναι θετική οπότε στις 7a εισάγεται με πρόσημο “+” ενώ στις 7β με πρόσημο “-”, και γίνονται:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \quad b_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r_1 \tag{8a}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a'_{ij} x_j - x_{n+r_1+i} = b'_i, \quad b'_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r_2. \tag{8b}$$

Εικονικές Παράμετροι (παράδειγμα)

Έστω το πρόβλημα:

$$\begin{aligned} &\text{Maximize} \quad z = 2x_1 + 5x_2 \\ &\text{subject to} \\ &\qquad 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ &\quad -2x_1 + x_2 \le -2 \\ &\qquad x_1 - 6x_2 = -2 \\ &\quad x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

Αρχικά ξαναγράφουμε τους περιορισμούς έτσι ώστε να μην έχουμε αρνητικά “δεξιά μέλη”. Οπότε προκύπτει το:

Εικονικές Παράμετροι (παράδειγμα)

Οπότε προκύπτει το:

$$
\begin{aligned}
&\text{Maximize} \quad z = 2x_1 + 5x_2 \\
&\text{subject to} \\
&\qquad 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\
&\qquad 2x_1 - x_2 \ge 2 \\
&\qquad -x_1 + 6x_2 = 2 \\
&\qquad x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Στη συνέχεια εισάγουμε μεταβλητές υστέρησης και:

Εικονικές Παράμετροι (παράδειγμα)

Στη συνέχεια εισάγουμε μεταβλητές υστέρησης και:

$$\text{Maximize} \quad z = 2x_1 + 5x_2$$

subject to

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad\quad = 6 \\ 2x_1 - \ \ x_2 \qquad\ \ - x_4 = 2 \\ -x_1 + 6x_2 \qquad\qquad\ \ = 2 \end{array}\right\}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Ενώ παρατηρούμε ότι δεν πληρούται το κριτήριο που θέλει σε κάθε εξίσωση να υπάρχει μια μεταβλητή με συντελεστή +1 η οποία να εμφανίζεται μόνο μια φορά σε όλο το σύστημα.

Η μέθοδος των δύο φάσεων

Έστω ένα πρόβλημα της μορφής:

$$\text{Maximize} \quad z = \sum_{j=1}^{s} c_j x_j \tag{10}$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{s} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{11}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, s \tag{12}$$

with $b_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Για την εύρεση μια αρχικής εφικτής λύσης, εισάγουμε μια μεταβλητή, έστω y_i, σε κάθε εξίσωση της (11). Αυτές οι μεταβλητές καλούνται τεχνητές και δεν έχουν καμία φυσική σημασία.

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση
Εισαγωγή στον γραμμικό προγραμματισμό (ΓΠ)

Η μέθοδος των δύο φάσεων

Το κέρδος φαίνεται αν y_i=0 για το πρόβλημα:

$$\text{Maximize} \quad z = \sum_{j=1}^{s} c_j x_j \tag{13}$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{s} a_{ij} x_j + y_i = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{14}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, s; \qquad y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{15}$$

with $b_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Το διάνυσμα x στον χωρο R^s είναι λύση στο πρόβλημα που ορίζουν οι (10), (11) και (12) μόνο αν το διάνυσμα $[x\ 0]^T$ του R^{s+m} είναι εφικτή λύση των (13), (14), και (15). Για το πρόβλημα αυτό είναι x=0, και y=b.

Η μέθοδος των δύο φάσεων (φάση 1)

Τώρα θα προσπαθήσουμε να μετατρέψουμε το πρόβλημα εύρεσης εφικτής λύσης (14,15,16) στο ίδιο πρόβλημα όταν όμως y_i=0. Δηλαδή να βρούμε μια εφικτή λύση για το (10,11,12). Αυτή είναι η ***φάση 1*** της μεθόδου ***δύο φάσεων***.

Εφόσον τα y_i πρέπει να είναι μη αρνητικά, ένας τρόπος που εξασφαλίζει ότι κάθε y_i είναι μηδέν είναι το να ζητάμε το άθροισμα τους να είναι μηδέν. Άρα θέτουμε ένα βοηθητικό πρόβλημα όπου ελαχιστοποιούμε τα y_i ως προς τις (14,15) και ελπίζοντας αυτή η ελάχιστη τιμή να είναι το 0. Αν δεν είναι μηδέν τότε θα είναι μια θετική τιμή, και τουλάχιστο ένα y_i θα πρέπει να είναι >0. Επιπλέον, ποτέ όλα τα y_i δε θα είναι μηδέν, εφόσον έχουμε βρει το ελάχιστο από το άθροισμα τους. Σε αυτή την περίπτωση το αρχικό πρόβλημα δεν έχει εφικτή λύση.

Η μέθοδος των δύο φάσεων (φάση 1)

Μετατρέπουμε το αρχικό πρόβλημα (10, 11, 12) στην μορφή με τις τεχνητές μεταβλητές και εισάγουμε την καινούρια αντικειμενική συνάρτηση. Τότε είναι:

$$\text{Minimize} \quad z' = \sum_{i=1}^{m} y_i \tag{16}$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{s} a_{ij}x_j + y_i = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{17}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, s; \qquad y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{18}$$

with $b_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Αυτό το πρόβλημα έχει αρχική εφικτή λύση την: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

$x_i=0$.

Η μέθοδος των δύο φάσεων (φάση 1)

Αν γράψουμε το πρόβλημα που αντιστοιχεί στις (16), (17), και (18) σε μορφή πίνακα, οι στήλες που αντιστοιχούν στα y_i είναι είναι οι στήλες ενός μοναδιαίου m x m πίνακα, άρα είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Οπότε προκύπτει μια βασική λύση για το πρόβλημα.

Για να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο Simplex θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε την (16) με -1 για να έχουμε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης και για να γράψουμε:

$$z + \sum_{i=1}^{m} y_i = 0, \tag{19}$$

where $z = -z'$.

Η μέθοδος των δύο φάσεων (φάση 1)

Θυμηθείτε ότι όταν μελέτησαμε την μέθοδο Simplex είδαμε ότι οι αρχικές βασικές μεταβλητές ήταν οι μεταβλητές υστέρησης και είχαν μηδενικούς συντελεστές στην αντικειμενική συνάρτηση (δλδ δεν συμμετείχαν). Οπότε και στον πίνακα είχαν μηδενικά οι αντίστοιχες στήλες. Αυτό χρειάζοταν για την επαλήθευση του κριτηρίου βέλτιστης τιμής. Για τον λόγο αυτό πρέπει να απομακρύνουμε τα y_i από την (19). Αυτό μπορεί να γίνει λύνοντας την (17) ως προς y_i. Δηλαδή:

$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{s} a_{ij} x_j,$$

και με αντικατάσταση στην (19) προκύπτει:

$$z + \sum_{i=1}^{m} \left(b_i - \sum_{j=1}^{s} a_{ij} x_j \right) = 0.$$

Η μέθοδος των δύο φάσεων (φάση 1)

Με αναδιάταξη η αντικειμενική συνάρτηση γίνεται:

$$z - \sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \right) x_j = - \sum_{i=1}^{m} b_i . \tag{20}$$

Και μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα από τις (20), (17) και (18).

Η μέθοδος των δύο φάσεων (φάση 1, παράδειγμα)

Έστω το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού στην κανονική του μορφή:

$$\text{Maximize} \quad z = x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5 + 2x_6$$

subject to

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \phantom{{}+x_6} &= 12 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 &= 18 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \phantom{{}+x_6} &= 24 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 6. \end{aligned}$$

Εισάγουμε y_1, y_2 και y_3, και έχουμε:

Η μέθοδος των δύο φάσεων (φάση 1, παράδειγμα)

Εισάγουμε y_1, y_2 και y_3, και έχουμε:

$$\text{Minimize} \quad z' = y_1 + y_2 + y_3 \tag{21}$$

subject to

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + y_1 &= 12 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 + y_2 &= 18 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 + y_3 &= 24 \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 6; \qquad y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \tag{23}$$

Μετατρέποντάς το σε πρόβλημα μεγιστοποίησης, η αντικειμενική συνάρτηση (21) μπορεί να γίνει:

$$z' + y_1 + y_2 + y_3 = 0. \tag{24}$$

Η μέθοδος των δύο φάσεων (φάση 1, παράδειγμα)

Για να απομακρύνουμε τα y_1, y_2 και y_3 από την (24) προσθέτουμε -1 φορές τους περιορισμούς της (22) στην (24), οπότε:

$$z' - 5x_1 - 10x_2 - 5x_3 - 3x_4 - 6x_5 - x_6 = -54. \tag{25}$$

Και η αρχική εφικτή λύση είναι για

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0 \quad \text{(nonbasic variables)}$$

τότε

$$y_1 = 12, \quad y_2 = 18, \quad y_3 = 24 \quad \text{(basic variables)}.$$

Η μέθοδος των δύο φάσεων (φάση 1, παράδειγμα)

Από τις (25), (22) και (23) προκύπτει ο αρχικός πίνακας:

	x_1	x_2 ↓	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3	
y_1	1	2	2	1	1	0	1	0	0	12
y_2	1	2	1	1	2	1	0	1	0	18
← y_3	3	6	2	1	3	0	0	0	1	24
	−5	−10	−5	−3	−6	−1	0	0	0	−54

Η πιο αρνητική τιμή είναι το -10, οπότε x_2 είναι η εισελθούσα μεταβλήτη. Οι λόγοι Θ είναι 12/2, 18/2 και 24/6 και ο min είναι ο 24/6, οπότε η απελθούσα μεταβλητή είναι η y_3. Ο pivot είναι το 6.

Η μέθοδος των δύο φάσεων (φάση 1, παράδειγμα)

Για τον πίνακα που προκύπτει:

			↓							
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3	
←	y_1	0	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	4
	y_2	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	1	0	1	$-\frac{1}{3}$	10
	x_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$	4
		0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{4}{3}$	-1	-1	0	0	$\frac{5}{3}$	-14

Η πιο αρνητική τιμή είναι το -5/3, οπότε x_3 είναι η εισελθούσα μεταβλήτη. Οι λόγοι Θ είναι 4/(4/3), 10/(1/3) και 4/(1/3) και ο min είναι ο 4/(4/3), οπότε η απελθούσα μεταβλητή είναι η y_1. Ο pivot είναι το 4.

Η μέθοδος των δύο φάσεων (φάση 1, παράδειγμα)

Για τον πίνακα που προκύπτει:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6 ↓	y_1	y_2	y_3	
	x_3	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	3
←	y_2	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	9
	x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	3
		0	0	0	$-\frac{1}{2}$	-1	-1	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	-9

Διαλέγουμε την x_6.

Η μέθοδος των δύο φάσεων (φάση 1, παράδειγμα)

Για τον πίνακα που προκύπτει:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3	
x_3	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	3
x_6	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	9
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	3
	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0

όλες οι τεχνητές μεταβλητές είναι μη-βασικές μεταβλητές και είναι μηδενικές. Οπότε προκύπτουν οι τιμές:

$$x_2 = 3, \quad x_3 = 3, \quad x_6 = 9$$

$$x_1 = x_4 = x_5 = y_1 = y_2 = y_3 = 0$$

Ενώ η αντικειμενική συνάρτηση είναι: z=0

Η μέθοδος των δύο φάσεων (φάση 2)

Όταν η αντικειμενική συνάρτηση είναι z=0, τότε πρέπει να αρχίσει η ***φάση 2***.

Υποθέτουμε ότι καμία τεχνητή μεταβλητή δεν είναι βασική μεταβλητή στο τέλος της φάσης 1 και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μηδέν. Η λύση της φάσης 1 χρησιμοποιείται για να βρούμε μια αρχική εφικτή λύση για το αρχικό πρόβλημα των (10), (11) και (12). Διαγράφοντας τα y από την βέλτιστη λύση, βρίσκουμε μια εφικτή λύση για το αρχικό πρόβλημα ακριβώς γιατί υποθέσαμε ότι δεν υπάρχουν τεχνητές μεταβλητές στην βέλτιστη λύση. Ο αρχικός πίνακας της φάσης2 είναι ο τελικός της φάσης 1, με τις ακόλουθες μετατροπές.
(α) διαγράψτε τις στήλες που περιέχουν τεχνητές μεταβλητές, και
(β) υπολογίστε μια καινούρια αντικειμενική σειρά ως: για κάθε μια από τις βασικές παραμέτρους στον τελικό πίνακα της φάσης 1, εισάγεται μηδενικά στην στήλη που αντιστοιχεί σε αυτή και στο αντίστοιχο στοιχείο της αντικειμενικής σειράς πολ/ζοντας την αντίστοιχη σειρά και προσθέτοντας στην αντικειμενική σειρά.

Η μέθοδος των δύο φάσεων (φάση 2, συνέχεια του παραδείγματος)

Διαγράφουμε τις στήλες (στον παρακάτω πίνακα) με τα y

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3	
x_3	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	3
x_6	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	9
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	3
	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0

και μετά χρησιμοποιούμε την αρχική αντικειμενική συνάρτηση:

$$z = x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5 + 2x_6.$$

Οπότε η αντικειμενική σειρά θα γίνει:

$$\boxed{-1 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \quad 1 \quad -2 \quad 0} \qquad (26)$$

Η μέθοδος των δύο φάσεων (φάση 2, συνέχεια του παραδείγματος)

Όμως τα στοιχεία της 2ης (το 2), 3ης (το 3) και 6ης (το -2) στήλης που βρίσκονται στην αντικειμενική σειρά πρέπει να μηδενιστούν δλδ
(α) προσθέτω (-2) φορές την σειρά του x_2,
(β) προσθέτω (-3) φορές την σειρά του x_3,
(γ) προσθέτω (+2) φορές την σειρά του x_6.

-1	2	3	1	1	-2	0	[Equation (26)]
-1	-2	0	0	-1	0	-6	(-2 times x_2 row)
0	0	-3	$-\frac{3}{2}$	0	0	-9	(-3 times x_3 row)
0	0	0	1	2	2	18	(2 times x_6 row)
-2	0	0	$\frac{1}{2}$	2	0	3	(objective row for Phase 2).

Οπότε σχηματίσαμε τον αρχικό πίνακα της φάσης 2.

Η μέθοδος των δύο φάσεων (φάση 2, συνέχεια του παραδείγματος)

Οπότε σχηματίσαμε τον αρχικό πίνακα της φάσης 2.

	x_1 ↓	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	3
x_6	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	1	9
← x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	3
	-2	0	0	$\frac{1}{2}$	2	0	3

Η μέθοδος των δύο φάσεων (φάση 2, συνέχεια του παραδείγματος)

Και ο επόμενος πίνακας είναι ο:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	3
x_6	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	1	9
x_1	1	2	0	0	1	0	6
	0	4	0	$\frac{1}{2}$	4	0	15

Και από τη στιγμή που η αντικειμενική σειρά δεν έχει αρνητικές τιμές, βρήκαμε τη βέλτιστη λύση:

$$x_1 = 6, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 0, \quad x_6 = 9,$$

Που δίνει z=15.