Συνδυαστική Βελτιστοποίηση
Εισαγωγή στον γραμμικό προγραμματισμό (ΓΠ)

Δυϊκότητα

Θα δείξουμε πώς μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης με ένα πρόβλημα ΓΠ στην συνήθη του μορφή.

Ένα πρόβλημα στην συνήθη του μορφή μπορεί να είναι ένα κατασκευαστικό πρόβλημα, στο οποίο οι πρώτες ύλες βρίσκονται σε τοποθεσίες ώστε να μεγιστοποιείται το κέρδος. Το αντίστοιχο πρόβλημα ελαχιστοποίησης αναφέρεται στην ελάττωση του κόστους.

Δυϊκότητα

Έστω λοιπόν τα δύο προβλήματα:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Maximize} & z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ \text{subject to} & \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Minimize} & z' = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{w} \\ \text{subject to} & \\ & \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{w} \geq \mathbf{c} \\ & \mathbf{w} \geq \mathbf{0}, \end{array}\right\}$$

Όπου ο A είναι πίνακας mxn, οι c, x είναι nx1 πίνακες στήλη, και b, w είναι mx1 πίνακες στήλη. Αυτά τα προβλήματα καλούνται δυϊκά. Το πρόβλημα της μεγιστοποίησης είναι το πρωτεύων και το άλλο το δυϊκό του.

Δυϊκότητα (παράδειγμα 1)

Το πρωτεύων είναι:

$$\text{Maximize} \quad z = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

subject to

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$

Και το δυϊκό του:

$$\text{Minimize} \quad z' = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

subject to

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$w_1 \geq 0, \quad w_2 \geq 0, \quad w_3 \geq 0.$$

Δυϊκότητα (παράδειγμα 1)

Παρατηρήστε ότι κατά το σχηματισμό του δυϊκού προβλήματος, οι συντελεστές του i-οστού περιορισμού του πρωτεύοντος γίνονται συντελεστές της w_i μεταβλητής στους περιορισμούς του δυϊκού. Αντίστροφα, οι συντελεστές του x_j γίνονται συντελεστές του j-οστού περιορισμού του δυϊκού προβλήματος. Ενώ, οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης του πρωτεύοντος γίνονται οι δεξιοί όροι του δυϊκού, και αντίστροφα.

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση
Εισαγωγή στον γραμμικό προγραμματισμό (ΓΠ)

Δυϊκότητα

Οι μετασχηματισμοί περιγράφονται στον παρακάτω πίνακα:

Primal problem	*Dual problem*
Maximization	Minimization
Coefficients of objective function	Right-hand sides of constraints
Coefficients of *i*th constraint	Coefficients of *i*th variable, one in each constraint
*i*th constraint is an inequality $\leq$	*i*th variable is ≥ 0
*i*th constraint is an equality	*i*th variable is unrestricted
*j*th variable is unrestricted	*j*th constraint is an equality
*j*th variable is ≥ 0	*j*th constraint is an inequality $\geq$
Number of variables	Number of constraints

Έτσι προκύπτει ότι α) αν ο j-ιοστός περιορισμός σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης είναι ανισότητα ≥ τότε η j-ιοστή μεταβλητή του δυϊκού προβλήματος είναι ≥0, β) αν έχουμε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης με περιορισμό ≥, αυτός πρέπει να μετατραπεί σε ≤ (πολ/σμος με -1) πριν την μετατροπή στο δυϊκό του. Το ίδιο πρέπει να γίνει σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης με περιορισμό ≤.

Δυϊκότητα (παράδειγμα 2)

Έστω το πρωτεύων πρόβλημα:

$$\begin{aligned} &\text{Maximize} \quad z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ &\text{subject to} \\ &\quad x_1 + 2x_2 - x_3 \le 4 \\ &\quad 2x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ &\quad x_1 - x_2 \le 6 \\ &x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \text{ unrestricted}, \end{aligned}$$

Τότε το δυϊκό του είναι:

$$\begin{aligned} &\text{Minimize} \quad z' = 4w_1 + 8w_2 + 6w_3 \\ &\text{subject to} \\ &\quad w_1 + 2w_2 + w_3 \ge 3 \\ &\quad 2w_1 - w_2 - w_3 \ge 2 \\ &\quad -w_1 + w_2 = 1 \\ &w_1 \ge 0, \quad w_3 \ge 0, \quad w_2 \text{ unrestricted}. \end{aligned}$$

Primal problem	*Dual problem*
Maximization	Minimization
Coefficients of objective function	Right-hand sides of constraints
Coefficients of ith constraint	Coefficients of ith variable, one in each constraint
ith constraint is an inequality $\le$	ith variable is ≥ 0
ith constraint is an equality	ith variable is unrestricted
jth variable is unrestricted	jth constraint is an equality
jth variable is ≥ 0	jth constraint is an inequality $\ge$
Number of variables	Number of constraints

Δυϊκότητα (παράδειγμα 2)

Έστω το πρωτεύων πρόβλημα:

$$\begin{aligned}
&\text{Minimize} \quad z = 2x_1 - 3x_2 + x_4\\
&\text{subject to}\\
&\quad x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 7\\
&\quad x_1 + 4x_2 - x_4 = 5\\
&\quad x_2 + x_3 + 5x_4 \geq 3\\
&x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0,
\end{aligned}$$

Τότε το δυϊκό του είναι:

$$\begin{aligned}
&\text{Maximize} \quad z' = -7w_1 + 5w_2 + 3w_3\\
&\text{subject to}\\
&\quad -w_1 + w_2 \leq 2\\
&\quad -2w_1 + 4w_2 + w_3 \leq -3\\
&\quad -w_1 + w_3 \leq 0\\
&\quad -w_2 + 5w_3 \leq 1\\
&w_1 \geq 0, \quad w_3 \geq 0, \quad w_2 \text{ unrestricted.}
\end{aligned}$$

Αφού πρώτα πολ/με με -1 τον 1ο περιορισμό.

Δυϊκότητα (εφαρμογή στην οικονομία)

Στην αρχή των μαθημάτων είχαμε δει το παράδειγμα με τον μύλο ξυλείας. Τότε το μοντέλο που κατασκευάστηκε ήταν το:

$$\text{Maximize} \quad z = 120x_1 + 100x_2$$
$$\text{subject to}$$
$$2x_1 + 2x_2 \leq 8$$
$$5x_1 + 3x_2 \leq 15$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Ο πρώτος περιορισμός αναφέρεται στον αριθμό των ωρών που είναι διαθέσιμο το πριόνι, ενώ ο δεύτερος στον αριθμό των ωρών για τις οποίες είναι διαθέσιμη η μηχανή πλαναρίσματος. Γενικά για τον i-ιοστό περιορισμό:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i,$$

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση
Εισαγωγή στον γραμμικό προγραμματισμό (ΓΠ)

Δυϊκότητα (εφαρμογή στην οικονομία)

Στον γενικό τύπο αυτό μπορούμε να θεωρήσουμε το b_i να είναι η τροφοδοσία από έναν προμηθευτή, ή πρώτης ύλης ή εισαγόμενου προϊόντος προς επεξεργασία. Ο συντελεστής a_{ij} αντιπροσωπεύει το ποσό του i-ιοστού εισαγόμενου ανά μονάδα του j-ιοστού εξαγόμενου. Για παράδειγμα, ο $a_{21}=5$ εκφράζει τις 5 hr πλαναρίσματος για 1000 μονάδες μέτρησης προϊοντος. Η μεταβλητή x_j είναι η άγνωστη ποσότητα του j-ιοστού προϊόντος που πρέπει να παραχθεί. Ο συντελεστής c_j στην αντικειμενική συνάρτηση εκφράζει το κέρδος, ή την τιμή για μια παραγόμενη μονάδα του j. Η βέλτιστη λύση $x_1=3/2$, $x_2=5/2$ μεγιστοποιεί την τελική τιμή όλων των προϊόντων για την:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j.$$

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση
Εισαγωγή στον γραμμικό προγραμματισμό (ΓΠ)

Δυϊκότητα (εφαρμογή στην οικονομία)

Το δυϊκό του πρόβλημα είναι:

$$
\begin{aligned}
&\text{Minimize} \quad z' = 8w_1 + 15w_2 \\
&\text{subject to} \\
&\qquad 2w_1 + 5w_2 \geq 120 \\
&\qquad 2w_1 + 3w_2 \geq 100 \\
&\qquad w_1 \geq 0, \quad w_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Όπου οι συντελεστές στον 1ο περιορισμό είναι τα ποσά που απαιτούνται από κάθε εισαγόμενο στον μύλο για την παραγωγή μιας μονάδας του πρώτου προϊόντος. Δηλαδή για το 1ο προϊόν χρειάζονται 2hr πριονίσματος και 5hr πλαναρίσματος. Το δεξιό μέλος είναι το κέρδος ή τιμή για μια μονάδα του 1ου προϊόντος. Όμοια, από τον δεύτερο περιορισμό καταλαβαίνουμε ότι για να φτιάξουμε μία μονάδα προϊόντος Β χρειαζόμαστε 2hr πριονίσματος και 3hr πλαναρίσματος, και τότε έχουμε κέρδος 100 $. Για το δυϊκό πρόβλημα η λύση είναι w_1=35 και w_2=10.

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση
Εισαγωγή στον γραμμικό προγραμματισμό (ΓΠ)

Δυϊκότητα (εφαρμογή στην οικονομία)

Σε ένα πρόβλημα ΓΠ το δυϊκό του έχει την μορφή:

$$
\begin{aligned}
&\text{Minimize} \quad z' = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{w} \\
&\text{subject to} \\
&\qquad \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{w} \geq \mathbf{c} \\
&\qquad\quad \mathbf{w} \geq \mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

Ενώ ο j-ιοστός περιορισμός είναι: $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \geq c_j.$

Το a_{ij} αναφέρεται στην ποσότητα του εισαγόμενου i ανά μονάδα προϊόντος j, και στα δεξιά είναι η τιμή ανά μονάδα του j, αυτό σημαίνει ότι οι μονάδες του w_j είναι “τιμή ανά μονάδα εισαγόμενου i”.

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση

Εισαγωγή στον γραμμικό προγραμματισμό (ΓΠ)

Δυϊκότητα (εφαρμογή στην οικονομία)

Το κέρδος σε μια βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος προβλήματος είναι $c^T x$, αλλά και $b^T w$. Οπότε αυξάνοντας το i-ιοστό εισαγόμενο b_i κατά μια μονάδα τότε αυξάνεται και το $b^T w$, οπότε και το κέρδος, κατά w_i μονάδες. Για αυτό σε μια βέλτιστη λύση του δυϊκού προβλήματος η w_i περιγράφει τη συνεισφορά της μιας μονάδας i-οστού εισαγόμενου στο κέρδος.

Το αριστερό μέλος του j-ιοστού περιορισμού του δυϊκού προβλήματος δίδει το συνολικό ποσοστό των εισαγομένων για την παραγωγή μιας μονάδας του j-ιοστού προϊόντος. Και αυτή η τιμή πρέπει να είναι τουλάχιστο όσο το αντίστοιχο κέρδος ανά μονάδα αυτού του προϊόντος.

Εφόσον $b^T w$ τότε για την αύξηση του κέρδους πρέπει να αυξηθεί κάποια από τις τιμές των πρώτων υλών. Το w_i που αναφέραμε παραπάνω αποτελεί την οριακή τιμή του i-ιοστού εισαγόμενου. Αντίστοιχα θα εκφράζει και το χάσιμο αν δεν χρησιμοποιηθεί η αντίστοιχη πρώτη ύλη.

Δυϊκότητα (εφαρμογή σε πρόβλημα δίαιτας)

Το πρότυπο για το πρόβλημα της δίαιτας που είχαμε δει ήταν:

$$\begin{aligned} &\text{Minimize} \quad z = 20x_1 + 25x_2 \\ &\text{subject to} \\ &\qquad 2x_1 + 3x_2 \geq 18 \\ &\qquad x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ &\qquad 4x_1 + 3x_2 \geq 24 \\ &\qquad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Και το δυϊκό του:

$$\begin{aligned} &\text{Maximize} \quad z' = 18w_1 + 12w_2 + 24w_3 \\ &\text{subject to} \\ &\qquad 2w_1 + w_2 + 4w_3 \leq 20 \\ &\qquad 3w_1 + 3w_2 + 3w_3 \leq 25 \\ &\qquad w_1 \geq 0, \quad w_2 \geq 0, \quad w_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση
Εισαγωγή στον γραμμικό προγραμματισμό (ΓΠ)

Δυϊκότητα (εφαρμογή σε πρόβλημα δίαιτας)

Έστω N_1, N_2, N_3 τα συστατικά λίπος, H/C και πρωτεϊνες, αντίστοιχα. Έστω τα γεύματα F_1, F_2, και τα αντικατάστατα γεύματα P_1, P_2, P_3, έτσι ώστε μια μονάδα P_i να παρέχει μία μονάδα N_i. Ας υποθέσουμε επίσης ότι οι τιμές είναι w_i για τα P_i. Θυμίζουμε ότι το a_{ij} σημαίνει ποσότητα συστατικού N_i σε μια μερίδα φαγητού F_j. Για τα αντικατάστατα ισχύει:

$$2w_1 + w_2 + 4w_3 \leq 20$$

$$3w_1 + 3w_2 + 3w_3 \leq 25$$

Δυϊκότητα (εφαρμογή σε πρόβλημα δίαιτας)

Οπότε συνδυάζει τα P_i έτσι ώστε τα θρεπτικά τους συστατικά να είναι σαν των F_1, ενώ ταυτόχρονα το κόστος για αντικάταστατο του F_i να μην είναι υψηλότερο από το ίδιο το F_i. Επειδή απαιτούνται 18 μονάδες N_1 από το P_1, και 12 μονάδες N_2 από το P_2, και 24 μονάδες N_3 από το P_3, τότε ο κατασκευαστής θέλει να μεγιστοποιήσει την:

$$z' = 18w_1 + 12w_2 + 24w_3$$

Το θεώρημα Δυϊκότητας

Έστω ένα πρόβλημα ΓΠ στο οποίο έχουμε βάλει τεχνητές παραμέτρους και παραμέτρους υστέρησης για να το φέρουμε στην κανονική του μορφή:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Maximize} \quad z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ \text{subject to} \\ \qquad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{array}\right\}$$

Ο A πλέον είναι mxs και περιλαμβάνει έναν sxs μοναδιαίο πίνακα (από τις παραμέτρους υστέρησης), ο b είναι mx1, και ο c είναι sx1. Θυμηθήτε ότι η x_j είναι μια παράμετρος υστέρησης τότε ο αντίστοιχος c_j είναι 0.

Το θεώρημα Δυϊκότητας

Για τον πίνακα της μεθόδου Simplex, έστω i_1, i_2 η πρώτη και η δεύτερη βασική μεταβλητή της εφικτής λύσης, αντίστοιχα. Έστω N το σύνολο των δεικτών των μη-βασικών μεταβλητών. Επισής η στήλη j του A συμβολίζεται ως A_j. Άρα μπορούμε να γράψουμε:

$$\sum_{r=1}^{m} x_{i_r}\mathbf{A}_{i_r} + \sum_{j\in N} x_j\mathbf{A}_j = \mathbf{b}.$$

Και επειδή οι μη-βασικές μεταβλητές είναι 0 προκύπτει:

$$x_{i_1}\mathbf{A}_{i_1} + x_{i_2}\mathbf{A}_{i_2} + \cdots + x_{i_m}\mathbf{A}_{i_m} = \mathbf{b}.$$

Και από όλους τους m A πίνακες στήλη σχηματίζουμε έναν νέο πίνακα B mxm. Έτσι η βασική μεταβλητή είναι ένα διάνυσμα και το κόστος επίσης ως:

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_{i_1} \\ x_{i_2} \\ \vdots \\ x_{i_m} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{c}_B = \begin{bmatrix} c_{i_1} \\ c_{i_2} \\ \vdots \\ c_{i_m} \end{bmatrix}.$$

Το θεώρημα Δυϊκότητας

Οπότε η

$$x_{i_1}\mathbf{A}_{i_1} + x_{i_2}\mathbf{A}_{i_2} + \cdots + x_{i_m}\mathbf{A}_{i_m} = \mathbf{b}.$$

Γράφεται ως:

$$\mathbf{B}\mathbf{x}_{\mathrm{B}} = \mathbf{b}.$$

Και τελικά:

$$\mathbf{x}_{\mathrm{B}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}.$$

Λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των γραμμών του B, τα διανύσματα που αντιστοιχούν στις γραμμές αποτελούν μια βάση του χώρου R^m, οπότε η j-ιοστή στήλη του αρχικού πίνακα μπορεί να γραφτεί σαν γραμμικός συνδυασμός των καινούριων A (δες ισότητα στην κορυφή, οι δείκτες αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές). Έτσι:

$$\mathbf{A}_j = t_{1j}\mathbf{A}_{i_1} + t_{2j}\mathbf{A}_{i_2} + \cdots + t_{mj}\mathbf{A}_{i_m}, \quad j = 1, 2, \ldots, s.$$

Το θεώρημα Δυϊκότητας

Έτσι ισχύει: $\mathbf{B}\mathbf{t}_j = \mathbf{A}_j$

$$\mathbf{t}_j = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j$$

Δηλαδή κάθε στήλη του πίνακα μπορεί να βρεθεί από την αντίστοιχη στήλη του αρχικού πίνακα πολ/ντάς την από τα αριστερά με B^{-1}. Επίσης:

$$z_j = \mathbf{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\mathbf{t}_j$$

$$z_j = \mathbf{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j.$$

Το θεώρημα Δυϊκότητας

Θυμηθήτε ότι: $$z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{s} c_j x_j$$

Χωρίζουμε το άθροισμα στο δεξί μέλος με τις βασικές και τις μη-βασικές παραμέτρους:

$$z = \sum_{r=1}^{m} c_{i_r} x_{i_r} + \sum_{j \in N} c_j x_j.$$

Για την εφαρμογή του κριτηρίου εύρεσης της βέλτιστης λύσης θα πρέπει οι συντελεστές του 1ου αθροίσματος να γίνουν μηδέν. Έτσι, προσθέτουμε $(-c_{i_1}) \times \text{first row} + (-c_{i_2}) \times \text{second row} + \cdots + (-c_{i_m}) \times m\text{th row}$ του νέου πίνακα στην παραπάνω. Συμβολικά η r-γραμμή του πίνακα είναι:

$$\sum_{j=1}^{s} t_{rj} x_j = \mathbf{x}_{\mathrm{B}r}$$

Και προσθέτοντας κατάλληλες φορές τις γραμμές του πίνακα στην αντικειμενική συνάρτηση προκύπτει:

$$z - \sum_{r=1}^{m} c_{i_r} \mathbf{x}_{\mathrm{B}r} = \sum_{j \in N} c_j x_j - \sum_{r=1}^{m} c_{i_r} \sum_{j \in N} t_{r_j} x_j.$$

Το θεώρημα Δυϊκότητας

Τελικά, και έπειτα από αναδιάταξη όρων και πράξεις βρίσκουμε ότι στην αντικειμενική γραμμή τα στοιχεία δίδονται από την σχέση:

$$z_j - c_j = \mathbf{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} \mathbf{t}_j - c_j.$$

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση
Εισαγωγή στον γραμμικό προγραμματισμό (ΓΠ)

Το θεώρημα Δυϊκότητας (παράδειγμα)

Maximize $z = 8x_1 + 9x_2 + 5x_3$

subject to

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \quad\quad\quad &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \quad + x_5 \quad &= 3 \\ 6x_1 + 6x_2 + 2x_3 \quad\quad + x_6 &= 8 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 6, & \end{aligned}$$

where

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \text{and} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Μετά την πρώτη επανάληψη της μεθόδου Simplex προκύπτει ο πίνακας

Το θεώρημα Δυϊκότητας (παράδειγμα)

Μετά την πρώτη επανάληψη της μεθόδου Simplex προκύπτει ο πίνακας

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	1
x_2	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	1
x_6	2	0	-6	0	-2	1	2
	-2	0	7	0	3	0	9

Οπότε απο τους δείκτες στην αριστερή στήλη είναι:

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ενώ ισχύει και: $\mathbf{c}_B^T = [c_4 \quad c_2 \quad c_6] = [0 \quad 9 \quad 0].$

Το θεώρημα Δυϊκότητας (παράδειγμα)

Υπό μορφή πινάκων γράφουμε:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A}_1 x_1 + \mathbf{A}_2 x_2 + \cdots + \mathbf{A}_6 x_6 = \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} x_2 + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_6 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Και αναδιατάσσουμε γιατί ως βασικές μεταβλητές φαίνονται οι x_2, x_4, x_6:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_4 + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_6 + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix},$$

Που προκύπτουν από τους παρακάτω πίνακες:

Το θεώρημα Δυϊκότητας (παράδειγμα)

Που προκύπτουν από τους παρακάτω πίνακες:

Tableau 2.5

		x_1	x_2 ↓	x_3	x_4	x_5	x_6	
	x_4	1	1	2	1	0	0	2
←	x_5	2	3	4	0	1	0	3
	x_6	6	6	2	0	0	1	8
		−8	−9	−5	0	0	0	0

Tableau 2.6

		x_1 ↓	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
	x_4	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	1
	x_2	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	1
←	x_6	2	0	−6	0	−2	1	2
		−2	0	7	0	3	0	9

Το θεώρημα Δυϊκότητας (παράδειγμα)

Και για την αντικειμενική συνάρτηση γράφουμε:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

and

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Then

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

which agrees with the right-hand side of the tableau. Furthermore, $\mathbf{t}_1 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_1$ or

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$