Συνδυαστική Βελτιστοποίηση

Εισαγωγή στον γραμμικό προγραμματισμό (ΓΠ)

Ανάλυση “Ευαισθησίας”.

Έχοντας λύσει ένας πρόβλημα ΓΠ θα πρέπει να αναρωτηθούμε αν η λύση έχει φυσική σημασία. Είναι επίσης πολύ πιθανό να έχουμε χρησιμοποιήσει δεδομένα για τα οποία δεν είμαστε σίγουροι για την ακρίβειά τους. Δηλαδή, να έχουμε προσεγγίσεις των πραγματικών, και δυστυχώς πολλές φορές όχι καλές προσεγγίσεις. Για τον λόγο αυτό είναι επιθυμητή η ύπαρξη εργαλείων που να μας επιτρέπουν να προσδιορίζουμε την επίδραση που θα έχει η μεταβολή των παραμέτρων στην λύση. Προφανώς υπάρχει η δυνατότητα να ξαναυπολογίσουμε την λύση... από την αρχή. Όμως, ο τελικός πίνακας με τη βέλτιστη λύση περιέχει όλη την απαραίτητη πληροφορία για την μέτρηση της “ευαισθησίας”.

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση
Εισαγωγή στον γραμμικό προγραμματισμό (ΓΠ)

Ανάλυση “Ευαισθησίας”.

Για τον σκοπό αυτό πρέπει να ελεγχθούν πέντε (5) σημεία.
1) τι γίνεται αν αλλάξουν ένας οι περισσότεροι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης;
2) τι γίνεται αν αλλάξουν μία οι περισσότερες τιμές του πίνακα **b** (δεξιά μέλη των ανισώσεων);
3) τι γίνεται αν αλλάξουν μία οι περισσότερες τιμές του πίνακα **A** (αριστερά μέλη των ανισώσεων);
4) πώς επηρεάζει η προσθήκη μιας μεταβλητής;
5) πώς επηρεάζει η προσθήκη ενός περιορισμού;
Θα δούμε μόνο τις απλές περιπτώσεις των (1) και (2).

Ανάλυση “Ευαισθησίας”.

Έστω το πρόβλημα στην μορφή:

$$\begin{aligned}&\text{Maximize} \quad z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}\\&\text{subject to}\\&\qquad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\\&\qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\end{aligned}$$

και ότι έχει βρεθεί η βέλτιστη λύση, ενώ υπάρχει διαθέσιμος ο τελικός πίνακας της simplex.

Οι οποιεσδήποτε αλλαγές στα δεδομένα του προβλήματος δεν είναι σίγουρο ότι θα μεταβάλουν την βέλτιστη λύση (οπότε δε θα απαιτούνται και περαιτέρω υπολογισμοί). Είναι επίσης σύνηθες κάποια υπολογιστικά πακέτα να δίνουν την βέλτιστη λύση για ένα εύρος τιμών **b**, **c**. Μια άλλη περίπτωση είναι η λύση να γίνει από βέλτιστη απλά εφικτή. Σε αυτήν την περίπτωση απαιτούνται λίγες ακόμη επαναλήψεις του αλγορίθμου simplex για την εύρεση της βέλτιστης λύσης.

Ανάλυση "Ευαισθησίας" - Αλλαγή στην αντικειμενική συνάρτηση.

Έστω ότι το c_k μεταβάλλεται σε $\hat{c}_k = c_k + \Delta c_k$. Η προηγούμενη βέλτιστη λύση θα πρέπει να μεταπίπτει σε εφικτή, εφόσον ούτε ο **A** ούτε ο **B** άλλαξαν. Το κριτήριο βέλτιστης λύσης είναι:

$$z_j - c_j = \mathbf{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} \mathbf{t}_j - c_j,$$

Όπου τα t_j είναι στήλες του τελικού πίνακα. Αν k είναι ο δείκτης μιας από τις βασικές παραμέτρους, τότε ο $\mathbf{c}_\mathbf{B}$ αλλάζει και κάθε z_j-c_j πρέπει να ξαναυπολογιστεί.

Ανάλυση “Ευαισθησίας” - Αλλαγή στην αντικειμενική συνάρτηση.

Αν η x_k είναι μη βασική παράμετρος, ο πίνακας $\mathbf{c_B}$ δεν αλλάζει ενώ αλλάζει το z_k-c_k. Τότε:

$$z_k - \hat{c}_k = (z_k - c_k) - \Delta c_k .$$

Οπότε

$$z_k - \hat{c}_k \geq 0$$

αν και μόνο αν:

$$z_k - c_k \geq \Delta c_k .$$

Δηλαδή ο c_k μπορεί να μεταβάλλεται σύμφωνα με το z_k-c_k ενώ η λύση θα παραμένει βέλτιστη. Βέβαια η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης δε θα αλλάξει γιατί ο συντελεστής της x_k στην αντικειμενική συνάρτηση είναι μηδέν.

Ανάλυση “Ευαισθησίας” - Αλλαγή στην αντικειμενική συνάρτηση.

Αν η x_k είναι βασική παράμετρος και ο $k=i_r$, οπότε η καινούρια τιμή του $\mathbf{c_B}$ θα είναι:

$$\hat{\mathbf{c}}_B = \begin{bmatrix} c_{i_1} \\ c_{i_2} \\ \vdots \\ c_{i_r} + \Delta c_{i_r} \\ \vdots \\ c_{i_m} \end{bmatrix} = \mathbf{c}_B + \Delta c_{i_r} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow r\text{th entry.} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Αν $\mathbf{e_r}$ είναι ένας πίνακας στήλη που έχει μόνο “0” εκτός από την r-ιοστή γραμμή που έχει “1”. Τότε:

$$\hat{\mathbf{c}}_B = \mathbf{c}_B + \Delta c_{i_r} \mathbf{e}_r .$$

Ανάλυση “Ευαισθησίας” - Αλλαγή στην αντικειμενική συνάρτηση.

Για όλα τα *j* εκτός $j=i_r$, είναι:

$$\hat{z}_j - c_j = \hat{\mathbf{c}}_B^T \mathbf{t}_j - c_j = \mathbf{c}_B^T \mathbf{t}_j + \Delta c_{i_r} \mathbf{e}_r^T \mathbf{t}_j - c_j = z_j - c_j + t_{rj}\,\Delta c_{i_r}.$$

Θυμηθείτε ότι οι βασικές παράμετροι ορίζονται από τις ανισώσεις. Ενώ, για κάθε βασική παράμετρο x_{ik} θα πρέπει να ισχύει $\hat{z}_{i_k} - c_{i_k} = 0.$ Ώστε, η αρχική βέλτιστη λύση παραμένει βέλτιστη όταν μεταβάλλεται ο συντελεστής μιας βασικής παραμέτρου αν και μόνο αν για όλες τις μη-βασικές παραμέτρους:

$$z_j - c_j + t_{rj}\,\Delta c_{i_r} \geq 0$$

$$z_j - c_j \geq -t_{rj}\,\Delta c_{i_r}.$$

Αν $t_{rj} = 0$ τότε η παραπάνω ανισότητα ισχύει για όλα τα Δc_{i_r}.

Ανάλυση “Ευαισθησίας” - Αλλαγή στην αντικειμενική συνάρτηση.

Αν $t_{rj} > 0$, τότε διαιρούμε την ανισότητα με το $-t_{rj}$, και αντιστρέφουμε την ανισότητα:

$$\Delta c_{i_r} \geq -\frac{z_j - c_j}{t_{rj}}$$

για εκείνα τα j για τα οποία η x_j δεν είναι βασική και $t_{rj} > 0$,

Αν $t_{rj} < 0$, τότε διαιρούμε την ανισότητα με το $-t_{rj}$, και δεν αντιστρέφουμε την ανισότητα:

$$\Delta c_{i_r} \leq -\frac{z_j - c_j}{t_{rj}}$$

για εκείνα τα j για τα οποία η x_j δεν είναι βασική και $t_{rj} < 0$,

Ανάλυση "Ευαισθησίας" - Αλλαγή στην αντικειμενική συνάρτηση.

Από όλα τα παραπάνω προκύπτει ότι πρέπει:

$$\max_j \left\{ -\frac{z_j - c_j}{t_{rj}} \middle| t_{rj} > 0 \right\} \leq \Delta c_{i_r} \leq \min_j \left\{ -\frac{z_j - c_j}{t_{rj}} \middle| t_{rj} < 0 \right\},$$

Και το j αναφέρεται σε όλες τις μη βασικές μεταβλητές.

Ανάλυση "Ευαισθησίας" - Αλλαγή στην αντικειμενική συνάρτηση (παράδειγμα 1).

Έστω το πρόβλημα:

$$\text{Maximize} \quad z = x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5 + 2x_6$$

subject to

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 &= 12 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 &= 18 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 &= 24 \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 6.$$

Με βέλτιστη λύση σύμφωνα με τον πίνακα:

		1	−2	−3	−1	−1	2	
$\mathbf{c}_B$		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\mathbf{x}_B$
−3	x_3	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	3
2	x_6	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	1	9
1	x_1	1	2	0	0	1	0	6
		0	4	0	$\frac{1}{2}$	4	0	15

Ανάλυση “Ευαισθησίας” - Αλλαγή στην αντικειμενική συνάρτηση (παράδειγμα 1).

Εφόσον τα x_2, x_4, x_5 είναι μη βασικές μεταβλητές χρησιμοποιούμε την $z_k - c_k \geq \Delta c_k$. και βρίσκουμε ότι το c_2 μπορεί να αυξηθεί κατα 4, z_2-c_2=4, το c_4 κατα 1/2, και το c_5 κατά 4.

Στη συνέχεια εξετάζουμε τους συντελεστές των βασικών μεταβλητών στην αντικειμενική συνάρτηση. Για να βρούμε το εύρος για το c_1 υπολογίζουμε:

$$\max\left\{-\frac{z_j - c_j}{t_{3j}} \middle| t_{3j} > 0\right\} = \max\{-\tfrac{4}{2}, -\tfrac{4}{1}\} = -2$$

$$\min\left\{-\frac{z_j - c_j}{t_{3j}} \middle| t_{3j} < 0\right\}.$$

Ανάλυση “Ευαισθησίας” - Αλλαγή στην αντικειμενική συνάρτηση (παράδειγμα 1).

Εφόσον δεν υπάρχει j για το οποίο $t_{3j} < 0$ δεν υπάρχει άνω όριο για το c_1. Όποτε η λύση παραμένει βέλτιστη αν:

$$-2 \leq \Delta c_1 < \infty$$

Για το c_3 υπολογίζουμε:

$$\max\left\{-\frac{z_j - c_j}{t_{1j}}\middle| t_{1j} > 0\right\} = \max\left\{\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right\} = -1.$$

Εφόσον δεν υπάρχει j για το οποίο $t_{1j} < 0$ δεν υπάρχει άνω όριο για το c_3. Όποτε η λύση παραμένει βέλτιστη αν:

$$-1 \leq \Delta c_3 < \infty$$

Και για το c_6, αν: $-1 \leq \Delta c_6 < \infty$.

Ανάλυση “Ευαισθησίας” - Αλλαγή στην αντικειμενική συνάρτηση (παράδειγμα 1).
Έτσι η βέλτιστη λύση:

$$x_1 = 6, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 0, \quad x_6 = 9$$

Παραμένει βέλτιστη για αλλαγές:

k	Δc_k	k	Δc_k
1	$-2 \leq \Delta c_1 < \infty$	4	$-\infty < \Delta c_4 \leq \frac{1}{2}$
2	$-\infty < \Delta c_2 \leq 4$	5	$-\infty < \Delta c_5 \leq 4$
3	$-1 \leq \Delta c_3 < \infty$	6	$-1 \leq \Delta c_6 < \infty$

Ανάλυση “Ευαισθησίας” - Αλλαγή στην αντικειμενική συνάρτηση (παράδειγμα 2).

Έστω το πρόβλημα με την ξυλεία στην κανονική του μορφή:

$$\text{Maximize} \quad z = 120x_1 + 100x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad &= 8 \\ 5x_1 + 3x_2 \qquad + x_4 &= 15 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \end{aligned}$$

Και ο τελευταίος πίνακας:

$\mathbf{c}_B$		120 x_1	100 x_2	0 x_3	0 x_4	$\mathbf{x}_B$
100	x_2	0	1	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
120	x_1	1	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
		0	0	35	10	430

Ανάλυση “Ευαισθησίας” - Αλλαγή στην αντικειμενική συνάρτηση (παράδειγμα 2).

Ο ιδιοκτήτης θέλει να ξέρει πόσο μπορεί να αυξήσει την τιμή από τα προϊόντα (άρα και το κέρδος) χωρίς να αυξήσει την παραγόμενη ποσότητα.

Η αλλαγή στο c_1 που δεν επηρεάζει τη βέλτιστη λύση είναι:

$$\frac{-10}{\frac{1}{2}} = -20 \leq \Delta c_1 \leq \frac{-35}{-\frac{3}{4}} = \frac{140}{3}.$$

Η αλλαγή στο c_2 που δεν επηρεάζει τη βέλτιστη λύση είναι:

$$\frac{-35}{\frac{5}{4}} = -28 \leq \Delta c_2 \leq \frac{-10}{-\frac{1}{2}} = 20.$$

Αυτοί οι υπολογισμοί δείχνουν ότι αν η τιμή του A γίνει \$166(2/3) από \$120 ή αν η τιμή του B γίνει \$120 από \$100, τότε με την ίδια παραγόμενη πόσοτητα A(1500) και B(2500) θα έχει μεγιστοποιήσει το κέρδος του. Αν διαλέξει να αυξήσει την c_1 τότε ο πίνακας γίνεται:

		$166\frac{2}{3}$	100	0	0	
$\mathbf{c}_B$		x_1	x_2	x_3	x_4	$\mathbf{x}_B$
100	x_2	0	1	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
$166\frac{2}{3}$	x_1	1	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
		0	0	60	0	480

Ανάλυση “Ευαισθησίας” - Αλλαγή στο διάνυσμα **b**.

Έστω ότι το b_k γίνεται $\hat{b}_k = b_k + \Delta b_k$. Το κριτήριο βέλτιστης λύσης δεν εξαρτάται από τον b, όμως και η παλιά βέλτιστη λύση μπορεί να μην είναι πλέον εφικτή. Για τον υπολογισμό των καινούριων τιμών των βασικών παραμέτρων έχουμε:

$$\hat{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k + \Delta b_k \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} + \Delta b_k \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow k\text{th entry.}$$

Τώρα $B^{-1}e_k$ είναι η k-ιοστή στήλη του B^{-1}. Στον τελικό πίνακα είναι η στήλη που πήρε τη θέση της k-ιοστής στήλης του μοναδιαίου πίνακα του αρχικού πίνακα.

Ανάλυση “Ευαισθησίας” - Αλλαγή στο διάνυσμα **b** (παράδειγμα)

Για το παράδειγμα με τον μύλο ξυλείας βλέπουμε οτι μια αλλαγή Δb_1, για τη διαθεσιμότητα του πριονιού:

$$\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} + \Delta b_1 \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

Και αν η $\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{B}}$ πρέπει να παραμένει εφικτή τότε για το Δb_1 είναι:

$$\frac{5}{2} + \frac{5}{4}\Delta b_1 \geq 0$$
$$\frac{3}{2} - \frac{3}{4}\Delta b_1 \geq 0$$

$$-2 \leq \Delta b_1 \leq 2.$$

Ανάλυση “Ευαισθησίας” - Αλλαγή στο διάνυσμα **b** (παράδειγμα)

Για το παράδειγμα με τον μύλο ξυλείας βλέπουμε οτι μια αλλαγή Δb_2, για τη διαθεσιμότητα της μηχανής πλαναρίσματος θα πρέπει:

$$-3 \leq \Delta b_2 \leq 5,$$

Αν όμως η Δb_1 δεν ικανοποιεί την ανισότητα, η παλιά λύση γίνεται μη εφικτή. Για παράδειγμα αν η διαθεσιμότητα του πριονιού αυξηθεί από 8->12 hr (Δb_1=4). Οπότε:

$$\hat{\mathbf{x}}_B = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Ανάλυση "Ευαισθησίας" - Αλλαγή στο διάνυσμα **b** (παράδειγμα)

Εισάγοντας αυτή την τιμή στον πίνακα:

$\mathbf{c}_B$		120 x_1	100 x_2	0 x_3	0 x_4	$\mathbf{x}_B$
100	x_2	0	1	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
120	x_1	1	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
		0	0	35	10	430

Προκύπτει ο:

	$\mathbf{c}_B$		120 x_1	100 x_2	0 x_3 ↓	0 x_4	$\mathbf{x}_B$
	100	x_2	0	1	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{15}{2}$
←	120	x_1	1	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
			0	0	35	10	570

Ανάλυση “Ευαισθησίας” - Αλλαγή στο διάνυσμα **b** (παράδειγμα)

Και με μια επανάληψη της μεθόδου simplex καταλήγουμε στον πίνακα:

		120	100	0	0	
$\mathbf{c}_B$		x_1	x_2	x_3	x_4	$\mathbf{x}_B$
100	x_2	$\frac{5}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	5
0	x_3	$-\frac{4}{3}$	0	1	$-\frac{2}{3}$	2
		$\frac{140}{3}$	0	0	$\frac{100}{3}$	500

Από τον οποίο προκύπτει ότι αν το πριόνι είναι διαθέσιμο 12 hr, τότε ο μύλος θα πρέπει να παρασκευάζει μόνο προϊόν τύπου B.