Σημειώσεις για το μάθημα
Λογική για Υπολογιστές

Χρήστος Νομικός

Rev.04

1 Προτασιακή Λογική

1.1 Στοιχεία Μαθηματικής Λογικής

Οι κυριότεροι στόχοι της Λογικής είναι οι παρακάτω:

- Ο καθορισμός μίας τυπικής γλώσσας, στην οποία διατυπώνονται προτάσεις.
- Η αυστηρή ερμηνεία των συμβόλων που περιέχονται στη γλώσσα, ώστε να καθοριστεί ποιές προτάσεις είναι αληθείς και ποιές ψευδείς.
- Η εύρεση ενός αποδεικτικού συστήματος (αλγορίθμου) με το οποίο θα μπορούμε να αποδεικνύουμε ότι μία πρόταση είναι λογική συνέπεια ενός συνόλου προτάσεων.

Ορισμός 1.1 (λογική συνέπεια) *Γράφουμε $\Sigma \models \phi$ για να δηλώσουμε ότι η πρόταση ϕ είναι λογική συνέπεια του συνόλου προτάσεων Σ.*

Ορισμός 1.2 *Αν έχουμε κατασκευάσει ένα αποδεικτικό συστημα τότε γράφουμε $\Sigma \vdash \phi$ για να δηλώσουμε ότι η πρόταση ϕ αποδεικνύεται από το Σ στο αποδεικτικό μας σύστημα.*

Ορισμός 1.3 (ορθό) *Ένα αποδεικτικό σύστημα ονομάζεται ορθό αν $\Sigma \vdash \phi$ συνεπάγεται $\Sigma \models \phi$, δηλαδή αν οι προτάσεις που αποδεικνύονται από ένα σύνολο υποθέσεων Σ είναι λογικές συνέπειες του Σ.*

Ορισμός 1.4 (πλήρες) *Ένα αποδεικτικό σύστημα ονομάζεται πλήρες αν $\Sigma \models \phi$ συνεπάγεται $\Sigma \vdash \phi$, δηλαδή αν όλες οι λογικές συνέπειες του Σ αποδεικνύονται.*

1.2 Προτασιακή Λογική

1.2.1 Σύνταξη

Το αλφάβητο της προτασιακής λογικής αποτελείται από:

- Ένα αριθμήσιμο πλήθος προτασιακών μεταβλητών
- Τους λογικούς συνδέσμους $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- Τις παρενθέσεις (και)

Η ερμηνεία των λογικών συνδέσμων είναι πάντοτε η ίδια: $\neg$: όχι (άρνηση), $\wedge$: και, $\vee$: ή, $\rightarrow$: συνεπάγεται και $\leftrightarrow$: ισοδυναμεί. Αντίθετα οι προτασιακές μεταβλητές δεν έχουν συγκεκριμένη ερμηνεία.

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω αλφάβητο σχηματίζουμε *προτασιακούς τύπους*. Φυσικά δεν είναι οποιαδήποτε ακολουθία συμβόλων προτασιακός τύπος.

Ορισμός 1.5 (προτασιακός τύπος) *Η έννοια του προτασιακού τύπου ορίζεται επαγωγικά:*

1. *Κάθε προτασιακή μεταβλητή είναι προτασιακός τύπος.*
2. *Αν ϕ και ψ είναι προτασιακοί τύποι, τότε*

   $$(\neg\phi), (\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \rightarrow \psi), (\phi \leftrightarrow \psi)$$

   είναι επίσης προτασιακοί τύποι.
3. *Μόνο οι ακολουθίες συμβόλων που κατασκευάζονται με βάση τα 1 και 2 είναι προτασιακοί τύποι.*

Για παράδειγμα αν A, B, C είναι προτασιακές μεταβλητές τότε το

$$(((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)))$$

είναι προτασιακός τύπος, ενώ το

$$A \leftrightarrow \neg()B \rightarrow$$

δεν είναι προτασιακός τύπος.

Οι παρενθέσεις είναι δυνατό να περιοριστούν, αν ορίσουμε προτεραιότητες στη εφαρμογή των συνδέσμων.

Στη συνέχεια θα θεωρούμε ότι οι σύνεσμοι $\wedge$ και $\vee$ έχουν την ίδια προτεραιότητα, η οποία είναι μικρότερη από την προτεραιότητα του $\neg$ και μεγαλύτερη από την προτεραιότητα του $\rightarrow$. Τέλος την μικρότερη προτεραιότητα έχει ο σύνδεσμος $\leftrightarrow$. Τελεστές που έχουν την ίδια προτεραιότητα προσεταιρίζονται από αριστερά προς τα δεξιά.

1.2.2 Σημασιολογία

Έστω $\mathcal{P}$ το σύνολο των προτασιακών μεταβλητών. Ονομάζουμε *ανάθεση αληθοτιμών* μία συνάρτηση $v : \mathcal{P} \longrightarrow \{T, F\}$.

Μία ανάθεση αληθοτιμών δηλαδή καθορίζει ποιές προτασιακές μεταβλητές αντιστοιχούν σε αληθείς προτάσεις (τιμή T) και ποιές σε ψευδείς (τιμή F).

Η τιμή αλήθειας για σύνθετους προτασιακούς τύπους (δηλαδή προτασιακούς τύπους που δεν είναι προτασιακές μεταβλητές) καθορίζεται χρησιμοποιώντας την προκαθορισμένη ερμηνεία των λογικών συνδέσμων.

Συγκεκριμένα, ορίζουμε την επέκταση $\hat{v}$ της v, σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

$\hat{v}(\phi)$	$\hat{v}(\psi)$	$\hat{v}(\neg\phi)$	$\hat{v}(\phi \wedge \psi)$	$\hat{v}(\phi \vee \psi)$	$\hat{v}(\phi \rightarrow \psi)$	$\hat{v}(\phi \leftrightarrow \psi)$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

Λέμε ότι η ανάθεση αληθοτιμών v *ικανοποιεί* τον προτασιακό τύπο ϕ ανν $\hat{v}(\phi) = T$.

Ένας προτασιακός τύπος είναι *ικανοποιήσιμος* αν υπάρχει υπάρχει ανάθεση αληθοτιμών που τον ικανοποιεί.

1.2.3 Ταυτολογίες

Ένας προτασιακός τύπος λέγεται *ταυτολογία* αν ικανοποιείται από κάθε ανάθεση αληθοτιμών.

Οι παρακάτω προτασιακοί τύποι είναι ταυτολογίες (η απόδειξη μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας πίνακες αληθοτιμών):

1. $A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$
2. $A \vee B \leftrightarrow B \vee A$
3. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (B \leftrightarrow A)$
4. $(A \wedge B) \wedge C \leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$
5. $(A \vee B) \vee C \leftrightarrow A \vee (B \vee C)$
6. $((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C) \leftrightarrow (A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C))$
7. $A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
8. $A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
9. $\neg\neg A \leftrightarrow A$
10. $\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow A \wedge \neg B$
11. $\neg(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$
12. $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
13. $\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
14. $A \vee \neg A$
15. $\neg(A \wedge \neg A)$
16. $A \rightarrow B \leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$
17. $A \wedge B \rightarrow C \leftrightarrow A \rightarrow (B \rightarrow C)$

Οι παραπάνω προτασιακοί τύποι εξακολουθούν να είναι ταυτολογίες, ακόμη και αν οι προτασιακές μεταβλητές A, B, C, αντικατασταθούν με οποιουσδήποτε προτασιακούς τύπους ϕ, ψ, ω.

Οι ταυτολογίες 1-3 (4-6) δηλώνουν την αντιμεταθετική (αντίστοιχα προσεταιριστική) ιδιότητα των συνδέσμων $\wedge, \vee, \leftrightarrow$.

Οι ταυτολογίες 7 και 8 δηλώνουν την επιμεριστική ιδιότητα του $\wedge$ ως προς $\vee$ και του $\vee$ ως προς $\wedge$ αντίστοιχα.

Οι ταυτολογίες 9-13 δηλώνουν ιδιότητες της άρνησης. Ειδικότερα οι 12-13 δηλώνουν τους κανόνες του De Morgan.

Επίσης οι ταυτολογίες 1-13,16,17 καθορίζουν ισάριθμα ζεύγη από ταυτολογικά ισοδύναμες προτάσεις.

Λόγω της προσεταιριστικής ιδιότητας επιτρέπεται να παραλείπουμε παρενθέσεις όταν έχουμε ίδιους διαδοχικούς τελεστές, που είναι είτε όλοι $\wedge$ είτε όλοι $\vee$ είτε όλοι $\leftrightarrow$.

1.2.4 Ταυτολογική Συνεπαγωγή/Ισοδυναμία

Έστω Σ ένα σύνολο προτασιακών τύπων (ενδεχόμενα άπειρο). Λέμε ότι το Σ *ταυτολογικά συνεπάγεται* τον προτασιακό τύπο ϕ (συμβολισμός $\Sigma \models \phi$) αν κάθε ανάθεση αληθοτιμών που ικανοποιεί όλους τους προτασιακούς τύπους του Σ ικανοποιεί και τον ϕ.

Για παράδειγμα $\{\phi \to \psi, \phi\} \models \psi$.

Αν το Σ περιέχει μόνο μία πρόταση, γράφουμε $\sigma \models \phi$ αντί για $\{\sigma\} \models \phi$.

Δύο προτασιακοί τύποι ϕ και ψ λέγονται *ταυτολογικά ισοδύναμοι* (συμβολισμός $\phi \equiv \psi$) ανν $\phi \models \psi$ και $\psi \models \phi$.
Μπορεί να εύκολα να αποδειχτεί ότι ισχύουν τα παρακάτω:

- Αν το Σ δεν είναι ικανοποιήσιμο τότε για κάθε προτασιακό τύπο ϕ ισχύει $\Sigma \models \phi$.
- $\phi \models \psi$ ανν $\models \phi \to \psi$.
- Γενικότερα $\Sigma \cup \{\phi\} \models \psi$ ανν $\Sigma \models \phi \to \psi$.
- $\phi \equiv \psi$ ανν $\models \phi \leftrightarrow \psi$.

Στην ειδική περίπτωση που $\Sigma = \emptyset$, το $\emptyset \models \phi$ σημαίνει ότι ϕ είναι ταυτολογία. Αυτό συμβαίνει γιατί το κενό σύνολο προτασιακών τύπων ικανοποιείται από όλες τις αναθέσεις αληθοτιμών (για να μην ικανοποιείται ένα σύνολο προτασιακών τύπων Σ από μία ανάθεση αληθοτιμών θα πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον ένας προτασιακός τύπος στο Σ που δεν ικανοποιείται).

Γράφουμε $\models \phi$ (αντί για $\emptyset \models \phi$), για να δηλώσουμε ότι ο ϕ είναι ταυτολογία.

1.2.5 Πραγματοποίηση Λογικών Συναρτήσεων

Έστω μία λογική συνάρτηση $f : \{T, F\}^n \longrightarrow \{T, F\}$. Λέμε ότι ο προτασιακός τύπος ϕ με προτασιακές μεταβλητές $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *πραγματοποιεί* την f αν για οποιαδήποτε ανάθεση αληθοτιμών v ισχύει $\hat{v}(\phi) = f(v(A_1), v(A_2), \ldots, v(A_n))$.

Αυτό σημαίνει ότι για να υπολογίσουμε την τιμή της f για μία n-άδα αληθοτιμών, αρκεί να αναθέσουμε τις αληθοτιμές αυτές στις προτασιακές μεταβλητές του ϕ και να αποτιμήσουμε την αληθοτιμή του.

Είναι εύκολο να δειχτεί ότι δύο προτασιακοί τύποι πραγματοποιούν την ίδια συνάρτηση αν και μόνο αν είναι ταυτολογικά ισοδύναμοι.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι κάθε λογική συνάρτηση είναι πραγματοποιήσιμη.

Αρχικά παρατηρούμε ότι για κάθε ανάθεση αληθοτιμών v στις μεταβλητές $A_1, A_2, \ldots A_n$, μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν προτασιακό τύπο ϕ_v, ο οποίος ικανοποιείται από τη v και δεν ικανοποιείται από καμία άλλη ανάθεση αληθοτιμών.

Συγκεκριμένα $\phi_v = l_1 \wedge l_2 \wedge \ldots \wedge l_n$, όπου $l_i = A_i$ αν $v(A_i) = T$ και $l_i = \neg A_i$ αν $v(A_i) = F$.

Για να πραγματοποιεί ένας προτασιακός τύπος τη συνάρτηση f θα πρέπει να αληθεύει για ένα σύνολο αναθέσεων αληθοτιμών $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, το οποίο καθορίζεται από τον πίνακα αληθοτιμών της f.

Ένας προτασιακός τύπος με την παραπάνω ιδιότητα είναι ο $\phi = \phi_{v_1} \vee \phi_{v_2} \vee \ldots \vee \phi_{v_k}$.

Σημειώνουμε, ότι αν το παραπάνω σύνολο από αναθέσεις αληθοτιμών είναι κενό, τότε η f είναι η σταθερή συνάρτηση με τιμή F και πραγματοποιείται από το προτασιακό τύπο $A_1 \wedge \neg A_1$.

Συνεπώς κάθε λογική συνάρτηση είναι πραγματοποιήσιμη από έναν προτασιακό τύπο που χρησιμοποιεί μόνο τους συνδέσμους $\neg, \wedge, \vee$, και ο οποίος έχει μία πολύ συγκεκριμένη δομή: η άρνηση εφαρμόζεται απευθείας στις μεταβλητές, η σύζευξή εφαρμόζεται στις μεταβλητές ή τις αρνήσεις τους και η διάζευξη στις προτάσεις που προκύπτουν μετά τη σύζευξη.

Η παραπάνω μορφή ονομάζεται διαζευκτική κανονική μορφή (DNF).

Για παράδειγμα η συνάρτηση με πίνακα αληθοτιμών

A	B	C	$f(A,B,C)$
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

πραγματοποιείται από τον προτασιακό τύπο $(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)$.

Επειδή κάθε προτασιακός τύπος πραγματοποιεί κάποια συνάρτηση, η οποία επίσης πραγματοποιείται από έναν προτασιακό τύπο σε DNF, συμπεραίνουμε ότι κάθε προτασιακός τύπος είναι ισοδύναμος μέ έναν προτασιακό τύπο σε DNF.

1.2.6 Επάρκεια Συνδέσμων

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι 16 διαφορετικές λογικές συναρτήσεις δύο θέσεων (γενικότερα υπάρχουν 2^{2^n} λογικές συναρτήσεις n θέσεων). Από αυτές οι 2 είναι σταθερές, οι 4 εξαρτώνται μόνο από το ένα όρισμα. Στις υπόλοιπες 10 αντιστοιχούν σύνδεσμο δύο θέσων, 4 από τους οποίους έχουμε συμπεριλάβει στη γλώσσα της προτασιακής λογικής.

$f(\phi,\psi)$	$f(T,T)$	$f(T,F)$	$f(F,T)$	$f(F,F)$
T	T	T	T	T
$\phi \vee \psi$	T	T	T	F
$\phi \leftarrow \psi$	T	T	F	T
ϕ	T	T	F	F
$\phi \rightarrow \psi$	T	F	T	T
ψ	T	F	T	F
$\phi \leftrightarrow \psi$	T	F	F	T
$\phi \wedge \psi$	T	F	F	F
$\phi \mid \psi$	F	T	T	T
$\phi + \psi$	F	T	T	F
$\neg\psi$	F	T	F	T
$\phi > \psi$	F	T	F	F
$\neg\phi$	F	F	T	T
$\phi < \psi$	F	F	T	F
$\phi \downarrow \psi$	F	F	F	T
F	F	F	F	F

Ένα σύνολο συνδέσμων ονομάζεται επαρκές αν κάθε λογική συνάρτηση μπορεί να πραγματοποιηθεί χρησιμοποιώντας μόνο αυτούς τους σύνδεσμους. Για παράδειγμα το σύνολο συνδέσμων $\{\neg, \wedge, \vee\}$ είναι επαρκές.
Αν γνωρίζουμε ότι ένα σύνολο συνδέσμων S είναι επαρκές και θέλουμε να δείξουμε ότι και το S' είναι επαρκές, αρκεί για κάθε σύνδεσμο $\star \in S - S'$ να δείξουμε ότι $A \star B \equiv \phi$, όπου ϕ ένας προτασιακός τύπος που χρησιμοποιεί μόνο τις μεταβλητές A, B και συνδέσμους από το S'.

Π.χ. το σύνολο $\{\neg, \wedge\}$ είναι επίσης επαρκές καθώς $\phi \vee \psi \equiv \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$.

Αλλα επαρκή σύνολα συνδέσμων είναι $\{\neg, \vee\}$, $\{|\}$, $\{\downarrow\}$. Αντίθετα το σύνολο $\{\wedge, \vee\}$ δεν είναι επαρκές.

2 Πρωτοβάθμια (ή Κατηγορηματική) Λογική

Η προτασιακή λογική είναι αρκετά φτωχή για τις απαιτήσεις των μαθηματικών: υπάρχουν λογικές συνέπειες οι οποίες δεν είναι ταυτολογικές συνέπειες, δηλαδή δεν οφείλονται στον τρόπο που δομούνται οι προτάσεις χρησιμοποιώντας μεταβλητές και λογικούς συνδέσμους, αλλά στο ότι οι προτάσεις αναφέρονται σε κοινά αντικείμενα ή ιδιότητες.

Για παράδειγμα από τις προτάσεις ‘αν ένας ακέραιος είναι μεγαλύτερος από το 1 τότε είναι μικρότερος από το τετράγωνό του’ και ‘ο x είναι ακέραιος μεγαλύτερος από το 1’, μπορούμε λογικά να συμπεράνουμε ότι ‘ο x είναι μικρότερος από το τετράγωνό του’.

Ωστόσο κάτι τέτοιο δεν μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας την προτασιακή λογική, στην οποία οι τρείς παραπάνω προτάσεις αντιστοιχούν σε τρεις προτασιακές μεταβλητές p, q, r που ερμηνεύονται τελείως ανεξάρτητα.

2.1 Σύνταξη

Ένα αλφάβητο της πρωτοβάθμιας λογικής περιέχει:

- Ένα σύνολο V από σύμβολα μεταβλητών
- Ένα σύνολο (ενδεχόμενα κενό) από σύμβολα σταθερών
- Ένα σύνολο (ενδεχόμενα κενό) από σύμβολα συναρτήσεων n-ορισμάτων, για κάθε $n > 0$
- Ένα σύνολο (ενδεχόμενα κενό) από σύμβολα κατηγορημάτων n-ορισμάτων, για κάθε $n > 0$
- Τους λογικούς συνδέσμους $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- Τους ποσοδείκτες $\forall, \exists$
- Σημεία στίξης ( ) ,

Οι ακολουθίες συμβόλων που μας ενδιαφέρουν στην πρωτοβάθμια λογική είναι οι όροι, οι ατομικές προτάσεις και οι προτάσεις.

Η έννοια του όρου ορίζεται επαγωγικά:

- Κάθε μεταβλητή είναι όρος.
- Κάθε σταθερά είναι όρος.
- Αν $t_1, t_2, \ldots, t_n$ είναι όροι και f είναι σύμβολο συνάρτησης n-ορισμάτων τότε $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ είναι επίσης όρος.

Αν $t_1, t_2, \ldots, t_n$ είναι όροι και p είναι σύμβολο κατηγορήματος n-ορισμάτων τότε $p(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ είναι ατομική πρόταση.

Η έννοια της πρότασης ορίζεται επαγωγικά:

- Κάθε ατομική πρόταση είναι πρόταση
- Αν ϕ και ψ είναι προτάσεις τότε

  $$(\neg\phi), (\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \rightarrow \psi), (\phi \leftrightarrow \psi)$$

  είναι επίσης προτάσεις.
- Αν ϕ είναι πρόταση και x είναι μεταβλητή τότε

  $$(\forall x\ \phi), (\exists x\ \phi)$$

  είναι επίσης προτάσεις.

2.2 Ελεύθερες Μεταβλητές

Μία μεταβλητή η οποία εμφανίζεται σε μία πρόταση, χωρίς όμως να βρίσκεται στην εμβέλεια κάποιου ποσοδείκτη ονομάζεται ελεύθερη μεταβλητή. Πιο αυστηρά:

- Αν ϕ είναι ατομική πρόταση, τότε η x εμφανίζεται ελεύθερη στην ϕ ανν η x περιέχεται στην ϕ.
- Αν $\phi = \neg\psi$, τότε η x εμφανίζεται ελεύθερη στην ϕ ανν η x εμφανίζεται ελεύθερη στην ψ.
- Αν $\phi = \psi \wedge \omega$ ή $\phi = \psi \vee \omega$ ή $\phi = \psi \rightarrow \omega$ ή $\phi = \psi \leftrightarrow \omega$, τότε η x εμφανίζεται ελεύθερη στην ϕ ανν η x εμφανίζεται ελεύθερη στην ψ ή η x εμφανίζεται ελεύθερη στην ω.
- Αν $\phi = \forall y\ \psi$ ή $\phi = \exists y\ \psi$, τότε η x εμφανίζεται ελεύθερη στην ϕ ανν η x εμφανίζεται ελεύθερη στην ψ και $x \neq y$.

Μια πρόταση που δεν περιέχει ελεύθερες μεταβλητές ονομάζεται κλειστή πρόταση.

2.3 Σημασιολογία

Η ερμηνεία των συμβόλων της πρωτοβάθμιας λογικής γίνεται χρησιμοποιώντας μοντέλα. Ένα μοντέλο M αντιστοιχεί:

- στα σύμβολα $\forall$ και $\exists$ ένα μή κενό σύνολο $|M|$, που αποτελεί το σύμπαν των στοιχείων που μας απασχολούν.
- σε κάθε σύμβολο σταθεράς c ένα στοιχείο $M(c) \in |M|$
- σε κάθε σύμβολο συνάρτησης n ορισμάτων f, μία συνάρτηση $M(f)$ από το $|M|^n$ στο $|M|$
- σε κάθε σύμβολο κατηγορήματος n ορισμάτων p, ένα σύνολο $M(p) \subseteq |M|^n$

Όπως φαίνεται παραπάνω ένα μοντέλο δεν ερμηνεύει τις μεταβλητές.

Η ερμηνεία των υπολοίπων συμβόλων αρκεί για τον καθορισμό της αλήθειας κάθε πρότασης η οποία δεν περιέχει ελεύθερες μεταβλητές.

Αν ωστόσο μία πρόταση περιέχει ελεύθερες μεταβλητές, τότε για να καθοριστεί αν είναι αληθείς πρέπει να υπάρχει μία ερμηνεία των μεταβλητών, δηλαδή μία συνάρτηση s από το V στο $|M|$.

Μπορούμε να επεκτείνουμε ένα μοντέλο M με τη βοήθεια μίας ερμηνείας μεταβλητών s ώστε κάθε όρος να ερμηνεύεται ως ένα στοιχείο του σύμπαντος $|M|$.

Η επέκταση $\hat{M}_s$ του M με βάση την s ορίζεται αναδρομικά:

- Αν x μεταβλητή τότε $\hat{M}_s(x) = s(x)$
- Αν c σύμβολο σταθεράς τότε $\hat{M}_s(c) = M(c)$
- Αν f είναι σύμβολο συνάρτησης n-ορισμάτων και $t_1, t_2, \ldots, t_n$ είναι όροι τότε $\hat{M}_s(f(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = M(f)(\hat{M}_s(t_1), \hat{M}_s(t_2), \ldots, \hat{M}_s(t_n))$

Παρατηρούμε ότι αν ένας όρος δεν περιέχει μεταβλητές, τότε η ερμηνεία του είναι ανεξάρτητη της ερμηνείας μεταβλητών s. Στη συνέχεια θα συμβολίζουμε με $\hat{M}(t)$ την ερμηνεία ενός όρου t χωρίς μεταβλητές.

Γράφουμε $M, s \models \phi$ για να δηλώσουμε ότι η πρόταση ϕ είναι αληθής στο μοντέλο M με την ερμηνεία μεταβλητών s (λέμε ισοδύναμα ότι το M ικανοποιεί την ϕ με την s).

Αν δεν ισχύει $M, s \models \phi$ γράφουμε $M, s \not\models \phi$.

Ο παρακάτω αναδρομικός ορισμός της αλήθειας οφείλεται στον Tarski.

- $M, s \models p(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ ανν $(\hat{M}_s(t_1), \hat{M}_s(t_2), \ldots, \hat{M}_s(t_n)) \in M(p)$
- $M, s \models \neg\phi$ ανν $M, s \not\models \phi$
- $M, s \models \phi \wedge \psi$ ανν $M, s \models \phi$ και $M, s \models \psi$
- $M, s \models \phi \vee \psi$ ανν $M, s \models \phi$ ή $M, s \models \psi$
- $M, s \models \phi \to \psi$ ανν $M, s \models \phi$ συνεπάγεται $M, s \models \psi$
- $M, s \models \phi \leftrightarrow \psi$ ανν $M, s \models \phi$ ισοδυναμεί $M, s \models \psi$
- $M, s \models \forall x\ \phi$ ανν για κάθε $d \in |M|$ ισχύει $M, s[x|d] \models \phi$
- $M, s \models \exists x\ \phi$ ανν υπάρχει $d \in |M|$ τέτοιο ώστε $M, s[x|d] \models \phi$

Στον παραπάνω ορισμό συμβολίζουμε με $s[x|d]$ την ερμηνεία μεταβλητών που συμφωνεί παντού με την s, εκτός από την μεταβλητή x την οποία ερμηνεύει ως το στοιχείο d:

$$s[x|d](y) = \begin{cases} d & \text{αν } y \text{ είναι η μεταβλητή } x \\ s(y) & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Παράδειγμα 1

Υποθέστε ότι η πρωτοβαθμια γλώσσα μας περιέχει μόνο ένα σύμβολο κατηγορήματος δύο ορισμάτων R. Θεωρούμε το μοντέλο M όπου

$$|M| = \{A, B, C, D\}$$

$$M(R) = \{(A, A), (A, B), (A, C), (D, A)\}$$

Έστω s η ερμηνεία μεταβλητών με $s(x) = A$ για κάθε μεταβλητή x.

Θα δείξουμε χρησιμοποιώντας τον ορισμό της αλήθειας ότι:

$$M, s \models \exists x \forall y\ (R(x, y) \vee R(y, x))$$

Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει στοιχείο $d \in |M|$ τέτοιο ώστε

$$M, s[x|d] \models \forall y \ (R(x,y) \vee R(y,x))$$

Επιλέγουμε $d = A$. Θα δείξουμε ότι:

$$M, s[x|A] \models \forall y \ (R(x,y) \vee R(y,x))$$

Θα πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε στοιχείο $d' \in |M|$

$$M, s[x|A][y|d'] \models (R(x,y) \vee R(y,x))$$

Αρα θα πρέπει να δείξουμε ότι ισχύουν όλα τα παρακάτω:

$$M, s[x|A][y|A] \models (R(x,y) \vee R(y,x))$$

$$M, s[x|A][y|B] \models (R(x,y) \vee R(y,x))$$

$$M, s[x|A][y|C] \models (R(x,y) \vee R(y,x))$$

$$M, s[x|A][y|D] \models (R(x,y) \vee R(y,x))$$

Θα αποδείξουμε τον δεύτερο από τους παραπάνω ισχυρισμούς. Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύονται και οι υπόλοιποι.

Για απλοποίηση του συμβολισμού θέτουμε $r = s[x|A][y|B]$.

Θα πρέπει να δείξουμε ότι:

$$M, r \models R(x,y)$$

είτε ότι

$$M, r \models R(y,x)$$

Θα αποδείξουμε το πρώτο. Με βάση τον ορισμό της αλήθειας πρέπει να δείξουμε ότι

$$(\hat{M}_r(x), \hat{M}_r(y)) \in M(R)$$

Όμως

$$\hat{M}_r(x) = r(x) = s[x|A][y|B](x) = s[x|A](x) = A$$

και

$$\hat{M}_r(y) = r(y) = s[x|A][y|B](y) = B$$

Συνεπώς:

$$(\hat{M}_r(x), \hat{M}_r(y)) = (A, B) \in M(R)$$

Παράδειγμα 2

Υποθέστε ότι η πρωτοβαθμια γλώσσα μας περιέχει ένα σύμβολο κατηγορήματος δύο ορισμάτων p, ένα σύμβολο συνάρτησης δύο ορισμάτων f και ένα σύμβολο σταθεράς c.

Θεωρούμε το μοντέλο M όπου

$$|M| = \{0, 1, 2\}$$

$$M(p) = \{(0, 1), (0, 2), (1, 2)\}$$

$$M(c) = 1$$

$$M(f)(i, j) = (i + j) \bmod 3$$

Θα δείξουμε χρησιμοποιώντας τον ορισμό της αλήθειας ότι:

$$M, s \models \forall x \exists y\ p(f(x, y), c)$$

για κάθε ερμηνεία μεταβλητών s.

Θα πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε στοιχείο $d \in M$

$$M, s[x|d] \models \exists y\ p(f(x, y), c)$$

δηλαδή ότι

$$M, s[x|0] \models \exists y\ p(f(x, y), c)$$

$$M, s[x|1] \models \exists y\ p(f(x, y), c)$$

$$M, s[x|2] \models \exists y\ p(f(x, y), c)$$

Θα αποδείξουμε τον πρώτο από τους παραπάνω ισχυρισμούς. Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύονται και οι υπόλοιποι.

Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει στοιχείο $d' \in |M|$ τέτοιο ώστε

$$M, s[x|0][y|d'] \models p(f(x, y), c)$$

Επιλέγουμε $d' = 0$. Θα δείξουμε ότι:

$$M, s[x|0][y|0] \models p(f(x,y), c)$$

Για απλοποίηση του συμβολισμού θέτουμε $r = s[x|0][y|0]$.

Ισοδύναμα θα πρέπει να δείξουμε ότι

$$(\hat{M}_r(f(x,y)), \hat{M}_r(c)) \in M(p)$$

Όμως

$$\begin{aligned} \hat{M}_r(f(x,y) &= M(f)(\hat{M}_r(x), \hat{M}_r(y)) = M(f)(r(x), r(y)) \\ &= M(f)(0,0) = (0+0) \bmod 3 = 0 \end{aligned}$$

και

$$\hat{M}_r(c) = M(c) = 1$$

Συνεπώς

$$(\hat{M}_r(f(x,y)), \hat{M}_r(c)) = (0,1) \in M(p)$$

Παρατηρούμε ότι η ερμηνεία των λογικών συνδέσμων είναι η ίδια όπως στην προτασιακή λογική. Αν $M, s \models \phi$ για κάθε ερμηνεία μεταβλητών s, τότε γράφουμε απλά $M \models \phi$.

Μπορεί να αποδειχτεί ότι αν οι ερμηνείες μεταβλητών s_1 και s_2 συμφωνούν σε όλες τις ελεύθερες μεταβλητές της ϕ τότε για κάθε μοντέλο M ισχύει ότι

$M, s_1 \models \phi$ ανν $M, s_2 \models \phi$.

Ειδικότερα, αν η ϕ δεν έχει ελεύθερες μεταβλητές τότε το αν ισχύει $M, s \models \phi$ είναι ανεξάρτητο από την s.

2.4 Λογική Συνεπαγωγή/Ισοδυναμία

Έστω Γ ένα σύνολο προτάσεων (ενδεχόμενα άπειρο). Λέμε ότι ο ένα μοντέλο M ικανοποιεί το Γ με την ερμηνεία μεταβλητών s αν το M ικανοποιεί κάθε πρόταση του Γ με τη s.

Λέμε ότι το Γ λογικά συνεπάγεται την πρόταση ϕ (συμβολισμός $\Gamma \models \phi$) αν για κάθε μοντέλο M και κάθε ερμηνεία μεταβλητών s, τέτοια ώστε το M να

ικανοποιεί το Γ με τη s, το Γ ικανοποιεί και την ϕ με τη s. Για παράδειγμα $\{\forall x\ (p(x) \to q(x)), p(a)\} \models q(a)$.
Αν το Γ περιέχει μόνο μία πρόταση, γράφουμε $\psi \models \phi$ αντί για $\{\psi\} \models \phi$.

Οι προτάσεις ϕ και ψ λέγονται λογικά ισοδύναμες (συμβολισμός $\phi \equiv \psi$) ανν $\phi \models \psi$ και $\psi \models \phi$.

Στην ειδική περίπτωση που $\Gamma = \emptyset$, το $\emptyset \models \phi$ σημαίνει ότι η ϕ αληθεύει σε κάθε μοντέλο με οποιαδήποτε ερμηνεία μεταβλητών. Μία τέτοια πρόταση ονομάζεται έγκυρη.

Γράφουμε $\models \phi$ (αντί για $\emptyset \models \phi$), για να δηλώσουμε ότι η ϕ είναι έγκυρη.

Παρατηρούμε ότι αν σε μία ταυτολογία, αντικαταστήσουμε τις προτασιακές μεταβλητές με προτάσεις της πρωτοβάθμιας λογικής, τότε η πρόταση που προκύπτει είναι έγκυρη.

Ωστόσο υπάρχουν έγκυρες προτάσεις οι οποίες δεν είναι στιγμιότυπα ταυτολογιών, π.χ. $(\forall x\ (p(x) \to q(x)) \land p(a)) \to q(a)$.

2.5 Κανονική μορφή Prenex

Μία πρόταση ϕ λέμε ότι βρίσκεται σε κανονική μορφή prenex ανν $\phi = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n \psi$, όπου $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ και ψ πρόταση χωρίς ποσοδείκτες.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι κάθε πρόταση είναι ισοδύναμη με μία πρόταση σε κανονική μορφή prenex. Κάνουμε χρήση των παρακάτω λογικών ισοδυναμιών (μπορούν να αποδειχτούν χρησιμοποιώντας τον ορισμό της αλήθειας):

1. $\phi \lor \psi \equiv \neg(\neg\phi \land \neg\psi)$
2. $\phi \to \psi \equiv \neg(\phi \land \neg\psi)$
3. $\phi \leftrightarrow \psi \equiv \neg(\phi \land \neg\psi) \land \neg(\neg\phi \land \psi)$
4. $\phi \land \psi \equiv \psi \land \phi$
5. Αν $\phi \equiv \psi$ τότε $\forall x\ \phi \equiv \forall x\ \psi$ και $\exists x\ \phi \equiv \exists x\ \psi$
6. $\neg\forall x\ \phi \equiv \exists x\ \neg\phi$
7. $\neg\exists x\ \phi \equiv \forall x\ \neg\phi$
8. Αν η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στην ϕ τότε $\phi \land \forall x\ \psi \equiv \forall x\ (\phi \land \psi)$
9. Αν η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στην ϕ τότε $\phi \land \exists x\ \psi \equiv \exists x\ (\phi \land \psi)$
10. $\forall x\ \phi \equiv \forall y\ \phi^x_y$
11. $\exists x\ \phi \equiv \exists y\ \phi^x_y$

όπου ϕ_y^x η πρόταση που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε κάθε ελεύθερη εμφάνιση της x στην ϕ με y. Π.χ αν $\phi = p(x,1) \wedge q(x) \rightarrow \forall x\ s(x,x)$ τότε $\phi_y^x = p(y,1) \wedge q(y) \rightarrow \forall x\ s(x,x)$.

Συμβολίζουμε με $prenex(\phi)$ το σύνολο όλων των προτάσεων σε κανονική μορφή prenex που είναι λογικά ισοδύναμες με την ϕ. Θα δείξουμε πως μπορούμε να μετατρέψουμε μία πρόταση ϕ σε μία λογικά ισοδύναμη πρόταση $\phi' \in prenex(\phi)$.

Αρχικά χρησιμοποιώντας τις ισοδυναμίες 1-3, μπορούμε να απαλείψουμε τους συνδέσμους $\vee, \rightarrow$ και $\leftrightarrow$.

Απομένει να δείξουμε πώς θα κατασκευάσουμε την ϕ' για μία πρόταση ϕ που περιέχει μόνο τους συνδέσμους $\wedge$ και $\neg$.

- Αν η ϕ είναι ατομική πρόταση, τότε $\phi' = \phi$.
- Αν $\phi = \forall x\ \psi$ και $\psi' \in prenex(\psi)$, τότε $\phi' = \forall x\ \psi'$, λόγω του 5.
- Αν $\phi = \exists x\ \psi$ και $\psi' \in prenex(\psi)$, τότε $\phi' = \exists x\ \psi'$, λόγω του 5.
- Αν $\phi = \neg\psi$ και $\psi' \in prenex(\psi)$, τότε $\phi \equiv \neg\psi'$. Χρησιμοποιώντας τις ισοδυναμίες 6 και 7, ο σύνδεσμος $\neg$ μπορεί να έρθει δεξιά από τους ποσοδείκτες.
- Αν $\phi = \psi \wedge \omega$, $\psi' \in prenex(\psi)$ και $\omega' \in prenex(\omega)$ τότε $\phi \equiv \psi' \wedge \omega'$. Αρχικά, χρησιμοποιώντας τις ισοδυναμίες 10 και 11, μετονομάζουμε όλες τις δεσμευμένες μεταβλητές στην ω' που εμφανίζονται ελεύθερες στην ψ'. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τις ισοδυναμίες 8 και 9, οι ποσοδείκτες της ω' μπορούν να μεταφερθούν προς τα έξω. Μετά χρησιμοποιούμε την ισοδυναμία 4 και επαναλαμβανουμε την ίδια διαδικασία για τους ποσοδείκτες της ψ'.

Για παράδειγμα έστω $\phi = \forall y\ (\exists x\ p(x,y) \rightarrow \forall y\ q(y))$. Τότε:

$$
\begin{aligned}
\phi &\equiv \forall y\ \neg(\exists x\ p(x,y) \wedge \neg\forall y\ q(y)) \\
&\equiv \forall y\ \neg(\exists x\ p(x,y) \wedge \exists y\ \neg q(y)) \\
&\equiv \forall y\ \neg(\exists x\ p(x,y) \wedge \exists z\ \neg q(z)) \\
&\equiv \forall y\ \neg\exists z\ (\exists x\ p(x,y) \wedge \neg q(z)) \\
&\equiv \forall y\ \neg\exists z\ (\neg q(z) \wedge \exists x\ p(x,y)) \\
&\equiv \forall y\ \neg\exists z\ \exists x\ (\neg q(z) \wedge p(x,y))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\equiv \forall y\, \forall z\, \neg\exists x\, (\neg q(z) \wedge p(x,y)) \\
&\equiv \forall y\, \forall z\, \forall x\, \neg(\neg q(z) \wedge p(x,y)) \in prenex(\phi)
\end{aligned}
$$

2.6 Ένα αποδεικτικό σύστημα

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε ένα αποδεικτικό σύστημα για την πρωτοβάθμια λογική. Το αποδεικτικό σύστημα αποτελείται από λογικά αξιώματα και κανόνες απαγωγής.

Χρησιμοποιούμε ένα ελαττωμένο αλφάβητο στο οποίο δεν περιλαμβάνονται οι λογικοί σύνδεσμοι $\wedge, \vee, \leftrightarrow$ ούτε ο ποσοδείκτης $\exists$ (αυτό δεν μειώνει την εκφραστική δυνατότητα της γλώσσας καθώς το σύνολο συνδέσμων $\{\neg, \rightarrow\}$ που απομένει είναι επαρκές, ενώ $\exists x\ \phi \equiv \neg\forall x\ \neg\phi$).

Για οποιεσδήποτε προτάσεις ϕ, ψ, ω, οι παρακάτω προτάσεις είναι λογικά αξιώματα:

1. $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$
2. $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \omega)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \omega))$
3. $(\neg\psi \rightarrow \neg\phi)) \rightarrow ((\neg\psi \rightarrow \phi) \rightarrow \psi)$
4. $\forall x\ \phi \rightarrow \phi^x_t$, όπου t όρος τέτοιος ώστε καμία ελεύθερη μεταβλητή του να μην δεσμεύεται κατά την αντικατάσταση.
5. $\forall x\ (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \forall x\ \psi)$, όπου η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στην ϕ.

Χρησιμοποιούνται δύο κανόνες απαγωγής:

1. Modus Ponens:

   $$\frac{\phi \rightarrow \psi \qquad \phi}{\psi}$$

   (από τις προτάσεις $\phi \rightarrow \psi$ και ϕ απάγεται η ψ).

2. Κανόνας Γενίκευσης:

   $$\frac{\phi}{\forall x\ \phi}$$

   (από την πρόταση ϕ απάγεται η $\forall x\ \phi$).

Ονομάζουμε απόδειξη μίας πρότασης ϕ από ένα σύνολο προτάσεων Γ μία πεπερασμένη ακολουθία προτάσεων $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ τέτοια ώστε $\phi = \phi_n$ και για κάθε $i,\ 1 \leq i \leq n$ να ισχύει ένα από τα παρακάτω:

- ϕ_i είναι λογικό αξίωμα.
- $\phi_i \in \Gamma$.
- Υπάρχουν $j, k < i$ τέτοια ώστε το ϕ_i να απάγεται από τα ϕ_j και ϕ_k με modus ponens (δηλαδή $\phi_j = \phi_k \to \phi_i$).
- Υπάρχει $j < i$ τέτοιο ώστε το ϕ_i να απάγεται από το ϕ_j με τον κανόνα της γενίκευσης (δηλαδή $\phi_i = \forall x\ \phi_j$)).

Γράφουμε $\Gamma \vdash \phi$ για να δηλώσουμε ότι η ϕ αποδεικνύεται από το Γ.

Μπορεί κανείς να δείξει εύκολα ότι τα λογικά αξιώματα είναι έγκυρες προτάσεις και ότι οι κανόνες απαγωγής, αν ξεκινήσουν από έγκυρες προτάσεις, παράγουν προτάσεις που είναι επίσης έγκυρες. Αυτό έχει ως συνέπεια οι προτάσεις που αποδεικνύονται από ένα σύνολο Γ να είναι λογικές συνέπειες του Γ:

Θεώρημα 2.1 (Θεώρημα Ορθότητας) *Αν $\Gamma \vdash \phi$ τότε $\Gamma \models \phi$.*

Το εντυπωσιακό είναι ότι κάθε λογική συνέπεια ενός συνόλου προτάσεων Γ μπορεί να αποδειχτεί από τό Γ χρησιμοποιώντας το παραπάνω αποδεικτικό σύστημα! Αυτό αποδείχθηκε το 1930 από τον Αυστριακό λογικό Gödel:

Θεώρημα 2.2 (Θεώρημα Πληρότητας) *Αν $\Gamma \models \phi$ τότε $\Gamma \vdash \phi$.*

Ένα σύνολο προτάσεων Γ λέγεται συνεπές αν $\Gamma \nvdash \phi \wedge \neg\phi$. Αν ένα σύνολο δεν είναι συνεπές τότε οποιαδήποτε πρόταση μπορεί να αποδειχτεί από αυτό.

Τα δύο παρακάτω θεωρήματα είναι συνέπεια των θεωρημάτων ορθότητας και πληρότητας.

Θεώρημα 2.3 *Ένα σύνολο προτάσεων Γ είναι συνεπές αν και μόνο αν είναι ικανοποιήσιμο.*

Θεώρημα 2.4 (Θεώρημα Συμπάγειας) *α) Αν $\Gamma \models \phi$ τότε υπάρχει πεπερασμένο σύνολο $\Gamma' \subseteq \Gamma$ τέτοιο ώστε $\Gamma' \models \phi$*
β) Το Γ είναι ικανοποιήσιμο αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του είναι ικανοποιήσιμο.

2.7 Θεωρίες

Στη συνέχεια λέγοντας πρόταση θα ενοούμε πάντα πρόταση χωρίς ελεύθερες μεταβλητές.

Ορισμός 2.1 (Θεωρία) *Θεωρία ονομάζεται ένα σύνολο προτάσεων, το οποίο είναι κλειστό ως προς λογική συνεπαγωγή (το T λέγεται κλειστό ως προς λογική συνεπαγωγή αν για κάθε πρόταση ϕ, $T \models \phi$ συνεπάγεται $\phi \in T$).*

Η μικρότερη δυνατή θεωρία (η οποία είναι υποσύνολο οποιασδήποτε άλλης θεωρίας) αποτελείται από όλες τις έγκυρες προτάσεις. Η μεγαλύτερη δυνατή θεωρία αποτελείται από όλες τις προτάσεις (η θεωρία αυτή προφανώς είναι μη ικανοποιήσιμη).

Για κάθε κλάση μοντέλων $\mathcal{C}$, το σύνολο των προτάσεων που αληθεύουν σε κάθε μοντέλο της $\mathcal{C}$ μπορεί να αποδειχτεί ότι είναι θεωρία, η οποία συμβολίζεται $\mathcal{T}h(\mathcal{C})$.

Μπορούμε να παράγουμε μία θεωρία ξεκινώντας από ένα σύνολο προτάσεων Σ. Συγκεκριμένα το σύνολο $\mathcal{C}n(\Sigma) = \{\phi \mid \Sigma \models \phi\}$, το οποίο περιέχει όλες τις λογικές συνέπειες του Σ είναι μία θεωρία.

Μία θεωρία T λέγεται αξιωματικοποιήσιμη αν υπάρχει ένα αποφασίσιμο (decidable) σύνολο Σ (το σύνολο των μη λογικών αξιωμάτων της θεωρίας) τέτοιο ώστε $T = \mathcal{C}n(\Sigma)$.

Ένα σύνολο λέγεται αποφασίσιμο αν υπάρχει αλγόριθμος ο οποίος δεδομένου ενός στοιχείου, μπορεί να αποφασίσει αν το στοιχείο ανήκει στο σύνολο ή όχι.

Αποδεικνύεται ότι υπάρχουν σύνολα που δεν είναι αποφασίσιμα.

Μία θεωρία T ονομάζεται πλήρης αν για κάθε πρόταση ϕ, είτε $\phi \in T$, είτε $\neg\phi \in T$.

Για παράδειγμα η ελάχιστη θεωρία δεν είναι πλήρης, καθώς υπάρχουν προτάσεις που δεν είναι έγκυρες ούτε οι αρνήσεις τους είναι έγκυρες (π.χ. $\forall x\ p(x)$).

Αντίθετα για κάθε μοντέλο $\mathcal{M}$, η θεωρία $\mathcal{T}h(\{\mathcal{M}\})$ είναι πλήρης.

Αν μία θεωρία είναι πλήρης και αξιωματικοποιήσιμη τότε είναι και αποφασίσιμη, δηλαδή υπάρχει αλγόριθμος που αποφασίζει για το αν μία πρόταση ϕ

ανήκει στη θεωρία.

Ο αλγόριθμος χρησιμοποιώντας το αποδεικτικό σύστημα της προηγούμενης ενότητας προσπαθεί να αποδείξει είτε την ϕ είτε την $\neg\phi$, από το σύνολο μη λογικών αξιωμάτων της θεωρίας (εδώ χρησιμοποιείται το οτι το σύνολο των μη λογικών αξιωμάτων είναι αποφασίσιμο).
Επειδή η θεωρία είναι πλήρης και το αποδεικτικό σύστημα είναι επίσης πλήρες, ο αλγόριθμος μπορεί σε πεπερασμένο χρόνο να σχηματίσει μία από τις δύο αποδείξεις.

Αν αποδείξει την ϕ τότε συμπεραίνει ότι η ϕ ανήκει στη θεωρία, ενώ αν αποδείξει την $\neg\phi$ συμπεραίνει ότι η ϕ δεν ανήκει στη θεωρία.

Αν μία θεωρία είναι αξιωματικοποιήσιμη αλλα όχι πλήρης, τότε δεν είναι απαραίτητα αποφασίσιμη: αν η ϕ ανήκει στην θεωρία, ο παραπάνω αλγόριθμος θα μπορέσει να σχηματίσει μία απόδειξη της ϕ.

Αν όμως η ϕ και η $\neg\phi$ δεν ανήκουν στη θεωρία, τότε ο αλγόριθμος θα συνεχίσει να τρέχει χωρίς ποτέ να μπορέσει να αποδείξει καμία από τις ϕ ή $\neg\phi$.

Συνεπώς ο αλγόριθμος μπορεί σε πεπερασμένο χρόνο να διαπιστώσει ότι μία πρόταση ανήκει στη θεωρία, ωστόσο δεν μπορεί να διαπιστώσει ότι μία πρόταση δεν ανήκει στη θεωρία.

2.8 Θεωρία Αριθμών

Στη συνέχεια θα μας απασχολήσει η Θεωρία Αριθμών δηλαδή, το σύνολο των προτάσεων που αληθεύουν στην αριθμητική των ακεραίων.

Υποθέτουμε ότι το αλφάβητό μας περιέχει τα σύμβολα κατηγορημάτων $<, =$, τη σταθερά 0 και τα σύμβολα συναρτήσεων $S, +, \cdot$.

Θεωρούμε το μοντέλο $\mathcal{N}$, όπου $|\mathcal{N}| = \mathbb{N}$ είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών και τα διάφορα σύμβολα έχουν την προφανή ερμηνεία (το S είναι σύμβολο συνάρτησης μίας θέσης και ερμηνεύεται ως ο επόμενος ακέραιος).

Σύμφωνα με όσα έχουμε πει η θεωρία αριθμών $Th(\{\mathcal{N}\})$ είναι πλήρης. Ο Gödel απέδειξε το 1931 ότι η θεωρία αριθμών δεν είναι αξιωματικοποιήσιμη.

Θεώρημα 2.5 (Θεώρημα μη Πληρότητας) *Δεν υπάρχει (πλήρης) αξιωματικοποίηση της θεωρία αριθμών.*

Η σημασία αυτού του θεωρήματος είναι η παρακάτω: αν επιλέξουμε ένα οποιοδήποτε αποφασίσιμο σύνολο αξιωμάτων $\Sigma \subset \mathcal{T}h(\{\mathcal{N}\})$ τότε $\mathcal{C}n(\Sigma) \neq \mathcal{T}h(\{\mathcal{N}\})$ η αλλιώς το $\mathcal{C}n(\Sigma)$ είναι μία μη πλήρης θεωρία.

Συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος είναι ότι δεν μπορεί να κατασκευαστεί αλγόριθμος που να αποφασίζει αν μία πρόταση αληθεύει στην αριθμητική των ακεραίων.

3 Ταυτοποίηση (Unification)

Ορισμός 3.1 (Αντικατάσταση) *Ονομάζουμε αντικατάσταση ένα σύνολο*

$$\mathcal{T}h = \{V_1/t_1, V_2/t_2, \ldots, V_n/t_n\},$$

όπου κάθε V_i είναι μεταβλητή, κάθε t_i όρος διαφορετικός από τη μεταβλητή V_i και οι μεταβλητές $V_1, V_2, \ldots, V_n$ είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Κάθε στοιχείο V_i/t_i ονομάζεται δέσμευση της μεταβλητής V_i. Η $\mathcal{T}h$ ονομάζεται αντικατάσταση χωρίς μεταβλητές αν κανένας όρος t_i δεν περιέχει μεταβλητές. Η $\mathcal{T}h$ ονομάζεται αντικατάσταση μόνο με μεταβλητές αν κάθε όρος t_i είναι μεταβλητή.

Ορισμός 3.2 (Έκφραση) *Ονομάζουμε έκφραση μία ακολουθία συμβόλων που είναι όρος, literal, σύζευξη από literals ή διάζευξη από literals. Ονομάζουμε απλή έκφραση μία ακολουθία συμβόλων που είναι όρος, ή ατομική πρόταση.*

Ορισμός 3.3 *Έστω $\mathcal{T}h = \{V_1/t_1, V_2/t_2, \ldots, V_n/t_n\}$ μία αντικατάσταση και E μία έκφραση. Συμβολίζουμε με $E\mathcal{T}h$ την έκφραση που προκύπτει από την E με ταυτοχρονη αντικατάσταση κάθε εμφάνισης κάθε μεταβλητής V_i, $1 \leq i \leq n$ με τον όρο t_i. Η έκφραση $E\mathcal{T}h$ ονομάζεται στιγμιότυπο της E μέσω της $\mathcal{T}h$.*

Ορισμός 3.4 (Σύνθεση) *Έστω $\mathcal{T}h = \{U_1/s_1, U_2/s_2, \ldots, U_m/s_m\}$ και $\sigma = \{V_1/t_1, V_2/t_2, \ldots, V_n/t_n\}$ αντικαταστάσεις. Ονομάζουμε σύνθεση $\mathcal{T}h\sigma$ των $\mathcal{T}h$ και σ την αντικατάσταση που προκύπτει από το σύνολο*

$$\{U_1/s_1\sigma, U_2/s_2\sigma, \ldots, U_m/s_m\sigma, V_1/t_1, V_2/t_2, \ldots, V_n/t_n\}$$

αν διαγραφεί κάθε δέσμευση $U_i/s_i\sigma$ για την οποία $U_i = s_i\sigma$ και κάθε δέσμευση V_j/t_j όπου $V_j \in \{U_1, U_2, \ldots, U_m\}$.

Ορισμός 3.5 *Ονομάζουμε ταυτοτική αντικατάσταση την αντικατάσταση* ϵ *που αντιστοιχεί στο κενό σύνολο δεσμεύσεων (*$\epsilon = \{\}$*).*

Θεώρημα 3.1 *Έστω* $\mathcal{T}h$ *αντικατάσταση. Τότε* $\mathcal{T}h\epsilon = \epsilon\mathcal{T}h = \mathcal{T}h$.

Απόδειξη Προφανές από τον ορισμό της σύνθεσης και του ϵ.

Θεώρημα 3.2 *Έστω* E *έκφραση και* $\mathcal{T}h, \sigma$ *αντικαταστάσεις. Τότε* $(E\mathcal{T}h)\sigma = E(\mathcal{T}h\sigma)$.

Απόδειξη Αρκεί να αποδείξουμε το αποτέλεσμα όταν η E είναι μία μεταβητή X.
Έστω $\mathcal{T}h = \{U_1/s_1, U_2/s_2, \ldots, U_m/s_m\}$
και $\sigma = \{V_1/t_1, V_2/t_2, \ldots, V_n/t_n\}$

Αν $X \notin \{U_1, U_2, \ldots, U_m, V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ τότε $(Q\mathcal{T}h)\sigma = Q\sigma = Q = Q(\mathcal{T}h\sigma)$.

Αν $X = U_i \in \{U_1, U_2, \ldots, U_m\}$ τότε $(Q\mathcal{T}h)\sigma = (U_i\mathcal{T}h)\sigma = s_i\sigma = U_i(\mathcal{T}h\sigma) = X(\mathcal{T}h\sigma)$.

Αν $X = V_j \in \{V_1, V_2, \ldots, V_n\} - \{U_1, U_2, \ldots, U_m\}$ τότε $(Q\mathcal{T}h)\sigma = (V_j\mathcal{T}h)\sigma = V_j\sigma = t_j = V_j(\mathcal{T}h\sigma) = X(\mathcal{T}h\sigma)$.

Θεώρημα 3.3 *Έστω* $\mathcal{T}h, \sigma, \gamma$ *αντικαταστάσεις. Τότε* $(\mathcal{T}h\sigma)\gamma = \mathcal{T}h(\sigma\gamma)$.

Απόδειξη Αρκεί να αποδείξουμε το ότι για τυχαία μεταβλητή X ισχύει $X((\mathcal{T}h\sigma)\gamma) = X(\mathcal{T}h(\sigma\gamma))$. Όμως

$$X((\mathcal{T}h\sigma)\gamma) = (X(\mathcal{T}h\sigma))\gamma = ((X\mathcal{T}h)\sigma))\gamma = (X\mathcal{T}h)(\sigma\gamma) = X(\mathcal{T}h(\sigma\gamma))$$

όπου κάθε μία από τις ισότητες ισχύει λόγω του προηγούμενου θεωρήματος.

Ορισμός 3.6 *Έστω* E, F *εκφράσεις. Λέμε ότι οι* E *και* F *είναι παραλλαγές η μία της άλλης αν υπάρχουν αντικαταστάσεις* $\mathcal{T}h$ *και* σ *τέτοιες ώστε* $E = F\mathcal{T}h$ *και* $F = E\sigma$.

Ορισμός 3.7 *Έστω* E *έκφραση και* V *το σύνολο των μεταβλητών που εμφανίζονται στην* E. *Ονομάζουμε μετονομασία για την* E *μία αντικατάσταση μόνο με μεταβλητές* $\{Q_1/Y_1, Q_2/Y_2, \ldots, Q_n/Y_n\}$ *τέτοια ώστε* $\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_n\} \subseteq V$, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ *είναι διαφορετικές μεταβλητές και* $(V - \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_n\}) \cap \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\} = \emptyset$.

Θεώρημα 3.4 *Έστω E και F εκφράσεις που είναι παραλλαγές η μία της άλλης. Τότε υπάρχουν αντικαταστάσεις $\mathcal{T}h$ και σ τέτοιες ώστε $E = F\mathcal{T}h$ και $F = E\sigma$, όπου $\mathcal{T}h$ είναι μετονομασία για την F και σ είναι μετονομασία για την E.*

Απόδειξη Έστω αντικαταστάσεις $\mathcal{T}h'$ και σ' τέτοιες ώστε $E = F\mathcal{T}h'$ και $F = E\sigma'$.

Έστω σ η αντικατάσταση που προκύπτει από την σ' με διαγραφή κάθε δέσμευσης X/t όπου το X δεν εμφανίζεται στην E.

Ισχύει $E\sigma = E\sigma' = F$ συνεπώς $E\sigma\mathcal{T}h' = F\mathcal{T}h' = E$.

Από τη σχέση $E\sigma\mathcal{T}h' = E$, συμπεραίνουμε ότι και οι υπολοιπόμενες δύο ιδιότητες ώστε η σ να είναι μετονομασία της E ικανοποιούνται.

Για τη $\mathcal{T}h$ εργαζόμεστε με το ίδιο τρόπο.

Ορισμός 3.8 *Έστω S ένα πεπερασμένο σύνολο απλών εκφράσεων και $\mathcal{T}h$ μία αντικατάσταση. Συμβολίζουμε με $S\mathcal{T}h$ το σύνολο απλών εκφράσεων $\{E\mathcal{T}h \mid E \in S\}$.*

Ορισμός 3.9 *Έστω S ένα πεπερασμένο σύνολο απλών εκφράσεων. Μία αντικατάσταση $\mathcal{T}h$ ονομάζεται ταυτοποιητής του S αν $|S\mathcal{T}h| = 1$.*

Ορισμός 3.10 *Έστω S ένα πεπερασμένο σύνολο απλών εκφράσεων. Ένας ταυτοποιητής $\mathcal{T}h$ του S ονομάζεται πιο γενικός ταυτοποιητής (mgu) του S αν για κάθε ταυτοποιητή σ του S υπάρχει μία αντικατάσταση γ τέτοια ώστε $\sigma = \mathcal{T}h\gamma$.*

Ορισμός 3.11 *Έστω S ένα πεπερασμένο σύνολο απλών εκφράσεων και έστω x το μέγιστου μήκους κοινό prefix όλων των εκφράσεων του S. Το σύνολο διαφωνίας του S είναι το σύνολο των όρων που ακολουθούν το x στις εκφράσεις του S.*

3.1 Αλγόριθμος Ταυτοποίησης

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΤΑΥΤΟΠΟΙΗΣΗΣ
Είσοδος

S: πεπερασμένο σύνολο απλών εκφράσεων

Αρχικοποίηση

$k := 0$, $\sigma_0 = \varepsilon$,*unifiable:=true*

Αλγόριθμος

while unifiable **and** $|S\sigma_k| > 1$ **do**

$D_k(S\sigma_k) :=$ σύνολο διαφωνίας του $S\sigma_k$

if $\exists V, t \in D_k(S\sigma_k)$: V μεταβλητή που δεν εμφανίζεται στην t **then**

$\sigma_{k+1} := \sigma\{V/t\}$

$k := k + 1$

else

unifiable := false

end if

end while

if unifiable

return σ_k

else

αποτυχία

Θεώρημα 3.5 *Ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΤΑΥΤΟΠΟΙΗΣΗΣ με είσοδο ένα ένα πεπερασμένο σύνολο απλών εκφράσεων S τερματίζει πάντοτε και επιστρέφει ένα έναν πιο γενικό ταυτοποιητή του S, αν το S είναι ταυτοποιήσιμο, αλλιώς επιστρέφει αποτυχία.*

Απόδειξη: Ο αλγόριθμος τερματίζει πάντοτε καθώς το S περιέχει ένα πεπερασμένο πλήθος μεταβλητών και σε κάθε επανάληψη του while το πλήθος των μεταβλητών μειώνεται κατά ένα.

Αν το S δεν είναι ταυτοποιήσιμο τότε για κάθε k ισχύει $|S\sigma_k| > 1$. Συνεπώς μετά την έξοδο από το while η μεταβλητή $unifiable$ έχει τιμή $false$ και ο αλγόριθμος επιστρέφει αποτυχία.

Έστω ότι το S είναι ταυτοποιήσιμο και έστω $\mathcal{T}h$ ένας ταυτοποιητής του. Θα δείξουμε πρώτα (με επαγωγή στο k) ότι για κάθε αντικατάσταση σ_k που παράγεται από τον αλγόριθμο υπάρχει μία αντικατάσταση γ_k τέτοια ώστε $\mathcal{T}h = \sigma_k\gamma_k$.

Για $k = 0$ θέτουμε $\gamma_0 = \mathcal{T}h$. Τότε $\mathcal{T}h = \epsilon\mathcal{T}h = \sigma_0\gamma_0$.

Επαγωγική υπόθεση: υπάρχει γ_k τέτοια ώστε $\mathcal{T}h = \sigma_k\gamma_k$.

Έστω ότι ο αλγόριθμος παράγει την αντικατάσταση σ_{k+1}. Τότε $\sigma_{k+1} = \sigma_k\{V/t\}$ όπου V μεταβλητή και t έκφραση που δεν περιέχει τη V που ανήκουν στο σύνολο διαφωνίας D_k του $S\sigma_k$.

Επειδή $|S\mathcal{T}h = 1|$ και $S\mathcal{T}h = S(\sigma_k\gamma_k) = (S\sigma_k)\gamma_k$, συμπεραίνουμε ότι $|(S\sigma_k)\gamma_k| = 1$, και άρα γ_k είναι ταυτοποιητής του $(S\sigma_k)$ όπως επίσης και του D_k. Ειδικότερα ισχύει $V\gamma_k = t\gamma_k$.

Ορίζουμε $\gamma_{k+1} = \gamma_k - \{V/V\gamma_k\}$.

Αν το γ_k έχει μία δέσμευση για τη V τότε:

$$\begin{aligned}
\gamma_k &= \{V/V\gamma_k\} \cup \gamma_{k+1} \\
&= \{V/t\gamma_k\} \cup \gamma_{k+1} \\
&= \{V/t\gamma_{k+1}\} \cup \gamma_{k+1} \\
&= \{V/t\}\gamma_{k+1}
\end{aligned}$$

Αν το γ_k δεν έχει μία δέσμευση για τη V, τότε $\gamma_{k+1} = \gamma_k$.

Επίσης θα πρέπει $D_k\gamma_k = \{V\}$. Απο αυτό συμπεραίνουμε ότι $D_k = \{V, U_1, \ldots, U_m\}$, $m > 0$, και $\gamma_k \supseteq \{U_1/V, \ldots, U_m/V\}$.

Συνεπώς $\gamma_k = \{V/t\}\gamma_k = \{V/t\}\gamma_{k+1}$ (καθώς $t = U_i$ για κάποιο i και $U_i\gamma_k = V$).

Σε κάθε περίπτωση

$$\mathcal{T}h = \sigma_k\gamma_k = \sigma_k(\{V/t\}\gamma_{k+1}) = (\sigma_k\{V/t\})\gamma_{k+1} = \sigma_{k+1}\gamma_{k+1}$$

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι αν $|S\sigma_k| > 1$ τότε πάντα το σύνολο διαφωνίας D_k περιέχει μία μεταβλητή V και μία έκφραση t που δεν περιέχει τη V.

Στο D_k υπάρχουν δύο εκφράσεις που ξεκινούν με διαφορετικό σύμβολο. Αν καμία από αυτέ δεν είναι μεταβλητή τότε δεν είναι δυνατό να ταυτοποιηθούν.

Αρα το D_k περιέχει μία μεταβλητή V.

Έστω μία οποιοσδήποτε έκφραση t του D_k διαφορετική της V. Αν η V εμφανίζεται στην t τότε $V\gamma_k \neq t\gamma_k$ (άτοπο). Αρα η V δεν εμφανίζεται στην t.

Συνεπώς, όσο ισχύει $|S\sigma_k| > 1$ ο αλγόριθμος πάντοτε μπορεί να σχηματίσει το σ_{k+1} και η $unifiable$ δεν γινεται ποτέ $false$.

Αρα ο αλγόριθμος τερματίζει επειδή $|S\sigma_n| = 1$, που σημαίνει ότι το σ_n αποτελεί ταυτοποιητή του S.

Επιπλέον όπως έχουμε δείξει, για κάθε ταυτοποιητή $\mathcal{T}h$ του S υπάρχει γ_n τέτοιο ώστε $\mathcal{T}h = \sigma_n\gamma_n$, που συνεπάγεται ότι ο σ_n είναι ένας πιο γενικός ταυτοποιητής του S.

4 Σταθερά σημεία (Fixed-points)

Ορισμός 4.1 *Σχέση επί του S είναι ονομάζεται κάθε υποσύνολο του $S \times S$.*

Ορισμός 4.2 *Μια σχέση R επί του S ονομάζεται ανακλαστική αν $(x, x) \in R$, για κάθε στοιχείο $x \in S$. (κάθε στοιχείο σχετίζεται με τον εαυτό του).*

Ορισμός 4.3 *Μια σχέση R επί του S ονομάζεται αντισυμμετρική αν $(x, y) \in R$ και $(y, x) \in R$ συνεπάγεται $x = y$, για οποιαδήποτε στοιχεία $x, y \in S$.*

Ορισμός 4.4 *Μια σχέση R επί του S ονομάζεται μεταβατική αν $(x, y) \in R$ και $(y, z) \in R$ συνεπάγεται $(x, z) \in R$, για οποιαδήποτε στοιχεία $x, y, z \in S$. (αν το x σχετίζεται με το y και το y σχετίζεται με το z τότε και το x σχετίζεται με το z).*

Ορισμός 4.5 *Μια σχέση ονομάζεται μερική διάταξη αν είναι ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική.*

Συνήθως χρησιμοποούμε το $\leq$ ή παραλλαγές του για να συμβολίσουμε μια μερική διάταξη Επίσης γράφουμε $x \leq y$ αντί για $(x, y) \in \leq$.

Ορισμός 4.6 *Το ζεύγος $(S, \leq)$ όπου S ένα σύνολο και $\leq$ μία σχέση μερικής διάταξης επί του S ονομάζεται μερικά διατεταγμένο σύνολο.*

Ορισμός 4.7 *Έστω $(S, \leq)$ ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο. Ένα στοιχείο a του S ονομάζεται:*

- *μεγιστικό αν δεν υπάρχει $b \in S$, $b \neq a$ τέτοιο ώστε $a \leq b$.*
- *ελαχιστικό αν δεν υπάρχει $b \in S$, $b \neq a$ τέτοιο ώστε $b \leq a$.*
- *μέγιστο αν για κάθε $b \in S$, ισχύει $b \leq a$.*
- *ελάχιστο αν για κάθε $b \in S$, ισχύει $a \leq b$.*

Παρατηρούμε ότι:

- Ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο μπορεί να έχει κανένα, ένα, ή περισσότερα μεγιστικά (ελαχιστικά) στοιχεία.
- Αν ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο έχει μέγιστο (ελάχιστο) στοιχείο, τότε αυτό είναι μοναδικό.
- Κάθε μέγιστο (ελάχιστο) στοιχείο είναι και μεγιστικό (ελαχιστικό), χωρίς να ισχύει απαραίτητα το αντίστροφο.

Ορισμός 4.8 *Έστω $(S, \leq)$ ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο και $X \subseteq S$.*

- *Το a ονομάζεται άνω φράγμα του X αν για κάθε $x \in X$ ισχύει $x \leq a$.*
- *Το a ονομάζεται ελαχιστικό άνω φράγμα του X αν είναι άνω φράγμα του X και δεν υπάρχει άνω φράγμα $b \neq a$ του X τέτοιο ώστε $b \leq a$.*
- *Το a ονομάζεται ελάχιστο άνω φράγμα του X αν είναι άνω φράγμα του X και για κάθε άνω φράγμα b του X ισχύει $a \leq b$.*

Το ελάχιστο άνω φράγμα του X ώς προς τη μερική διάταξη $\leq$ συμβολίζεται $lub_{\leq}(X)$ ή πιο απλά $lub(X)$.

Ορισμός 4.9 *Έστω $(S, \leq)$ ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο και $X \subseteq S$.*

- *Το a ονομάζεται κάτω φράγμα του X αν για κάθε $x \in X$ ισχύει $a \leq x$.*
- *Το a ονομάζεται μεγιστικό κάτω φράγμα του X αν είναι κάτω φράγμα του X και δεν υπάρχει κάτω φράγμα $b \neq a$ του X τέτοιο ώστε $a \leq b$.*
- *Το a ονομάζεται μέγιστο κάτω φράγμα του X αν είναι κάτω φράγμα του X και για κάθε κάτω φράγμα b του X ισχύει $b \leq a$.*

Το μέγιστο κάτω φράγμα του X ώς προς τη μερική διάταξη $\leq$ συμβολίζεται $glb_{\leq}(X)$ ή πιο απλά $glb(X)$.

Ορισμός 4.10 *Ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο $(L, \leq)$ ονομάζεται δικτυωτό (lattice) αν για κάθε $a, b \in S$, υπάρχουν τα $lub(\{a, b\})$ και $glb(\{a, b\})$.*

Ορισμός 4.11 *Ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο $(L, \leq)$ ονομάζεται πλήρες δικτυωτό (complete lattice) αν για κάθε υποσύνολο X του L, υπάρχουν τα $lub(X)$ και $glb(X)$.*

Σε κάθε πλήρες δικτυωτό $(L, \leq)$ υπάρχει μέγιστο στοιχείο $\top = lub(L)$ και ελάχιστο στοιχείο $\perp = glb(L)$.

Ορισμός 4.12 *Έστω $(L, \leq)$ ένα πλήρες δικτυωτό και $X \subseteq L$. Το X ονομάζεται κατευθυνόμενο αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο A του X έχει ένα άνω φράγμα στο X.*

Ορισμός 4.13 *Έστω $(L, \leq)$ ένα πλήρες δικτυωτό και T μία συνάρτηση από το L στο L. Η T λέγεται μονοτονική αν $x \leq y$ συνεπάγεται $T(x) \leq T(y)$, για κάθε $x, y \in L$.*

Ορισμός 4.14 *Έστω $(L, \leq)$ ένα πλήρες δικτυωτό και T μία συνάρτηση από το L στο L. Η T λέγεται συνεχής για κάθε κατευθυνόμενο υποσύνολο X του L ισχύει $T(lub(X)) = lub(\{T(x) \mid x \in X\})$.*

Θεώρημα 4.1 *Έστω $(L, \leq)$ ένα πλήρες δικτυωτό και T μία συνάρτηση από το L στο L. Αν η T είναι συνεχής τότε είναι και μονοτονική.*

Απόδειξη Άσκηση

Ορισμός 4.15 *Έστω $(L, \leq)$ ένα πλήρες δικτυωτό και T μία συνάρτηση από το L στο L. Το $a \in L$ ονομάζεται σταθερό σημείο της T αν $T(a) = a$. Το a ονομάζεται ελάχιστο (μέγιστο) σταθερό σημείο της T αν για κάθε σταθερό σημείο b της T ισχύει $a \leq b$ (αντίστοιχα $b \leq a$).*

Συμβολίζουμε το ελάχιστο και το μέγιστο σταθερό σημείο της T (αν υπάρχου) αντιστοιχα $lfp(T)$ και $gfp(T)$.

Θεώρημα 4.2 *Έστω $(L, \leq)$ ένα πλήρες δικτυωτό και T μία μονοτονική συνάρτηση από το L στο L. Τότε η T έχει ελάχιστο και μέγιστο σταθερό σημείο. Επιπλέον*

$$lfp(T) = glb(\{x \mid T(x) = x\}) = glb(\{x \mid T(x) \leq x\})$$

και

$$gfp(T) = lub(\{x \mid T(x) = x\}) = lub(\{x \mid x \leq T(x)\})$$

Απόδειξη Θέτουμε $F = \{x \mid T(x) = x\}$, $G = \{x \mid T(x) \leq x\}$, $f = glb(F)$ και $g = glb(G)$.

Για κάθε $x \in G$ ισχύει $g \leq x$ (επειδή g είναι κάτω φράγμα του G)
$\Rightarrow$
Για κάθε $x \in G$ ισχύει $T(g) \leq T(x)$ (επειδή T μονοτονική)
$\Rightarrow$
Για κάθε $x \in G$ ισχύει $T(g) \leq x$ (από τον ορισμό του G και τη μεταβατικότητα της $\leq$)

Αρα το $T(g)$ είναι κάτω φράγμα του G και επειδή g είναι μέγιστο κάτω φράγμα του G, ισχύει $T(g) \leq g$. Συνεπώς $g \in G$.

Η $T(g) \leq g$ λογω της μονοτονικότητας της T συνεπάγεται ότι $T(T(g)) \leq T(g)$. Συνεπώς $T(g) \in G$ και επειδή g είναι κάτω φράγμα του G, έχουμε $g \leq T(g)$.

Επειδή η $\leq$ είναι αντισυμμετρική, από τις $T(g) \leq g$ και $g \leq T(g)$ συμπεραίνουμε ότι $T(g) = g$, δηλαδή το g είναι σταθερό σημείο του T. Συνεπώς $g \in F$.

Αν b είναι ένα σταθερό σημείο του T, τότε $b \in G$, συνεπώς $g \leq b$. Άρα $g = lfp(T)$.

Από τον ορισμό του του f προκύπτει ότι $f \leq g$.

Επειδή $F \subseteq G$ και $g = glb(G)$, συμπεραίνουμε ότι το g είναι κάτω φράγμα του F. Άρα $g \leq f$.

Από τις $f \leq g$ και $g \leq f$ συμπεραίνουμε ότι $g = f$.

Η απόδειξη για το $gfp(T)$ είναι παρόμοια.

Πόρισμα: Έστω $(L, \leq)$ ένα πλήρες δικτυωτό και T μία μονοτονική συνάρτηση από το L στο L. Για κάθε $a \in L$ τέτοιο ώστε $a \leq T(a)$ υπάρχει ένα σταθερό σημείο a' τέτοιο ώστε $a \leq a'$ και για κάθε $b \in L$ τέτοιο ώστε $T(b) \leq b$ υπάρχει ένα σταθερό σημείο b' τέτοιο ώστε $b' \leq b$.

Απόδειξη: Επιλέγουμε $a' = gfp(T)$ και $b' = lfp(T)$.

Ορισμός 4.16 *Έστω $(L, \leq)$ ένα πλήρες δικτυωτό και T μία μονοτονική συνάρτηση από το L στο L. Ορίζουμε:*

- $T^{\uparrow 0} = \perp$
- $T^{\uparrow \alpha} = T(T^{\uparrow (\alpha - 1)})$ *αν α είναι επόμενος διατακτικός.*
- $T^{\uparrow \alpha} = lub\{T^{\uparrow \beta} \mid \beta < \alpha\}$ *αν α είναι οριακός διατακτικός.*
- $T^{\downarrow 0} = \top$
- $T^{\downarrow \alpha} = T(T^{\downarrow (\alpha - 1)})$ *αν α είναι επόμενος διατακτικός.*
- $T^{\downarrow \alpha} = glb\{T^{\downarrow \beta} \mid \beta < \alpha\}$ *αν α είναι οριακός διατακτικός.*

Ειδικότερα:

- $T^{\uparrow (i+1)} = T(T^{\uparrow i})$ *για κάθε φυσικό αριθμό i.*
- $T^{\uparrow \omega} = lub\{T^{\uparrow i} \mid i \text{ φυσικός αριθμός}\}$ *όπου ω μικρότερος οριακός διατακτικός, που ταυτίζεται με το σύνολο των φυσικών αριθμών.*

Θεώρημα 4.3 *Έστω $(L, \leq)$ ένα πλήρες δικτυωτό και T μία μονοτονική συνάρτηση από το L στο L. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:*

1. *για κάθε α, $T^{\uparrow \alpha} \leq lfp(T)$*
2. *για κάθε α, $T^{\uparrow \alpha} \leq T^{\uparrow (\alpha+1)}$*
3. *για κάθε α, γ, αν $\gamma < \alpha$ τότε $T^{\uparrow \gamma} \leq T^{\uparrow \alpha}$*
4. *για κάθε α, β, αν $\alpha < \beta$ και $T^{\uparrow \alpha} = T^{\uparrow \beta}$ τότε $T^{\uparrow \alpha} = lfp(T)$*
5. *Υπάρχει ένα α τέτοιο ώστε για κάθε γ, αν $\alpha \leq \gamma$ τότε $T^{\uparrow \gamma} = lfp(T)$*

Απόδειξη:

1. Με επαγωγή στους διατακτικούς. Για $\alpha = 0$ ισχύει: $T^{\uparrow 0} = \bot \leq lfp(T)$. Επαγωγική υπόθεση: έστω ότι ισχύει για όλους τους διατακτικούς $\beta < \alpha$.

   - αν ο α είναι επόμενος διατακτικός τότε

     $$T^{\uparrow\alpha} = T(T^{\uparrow(\alpha-1)}) \leq T(lfp(T)) = lfp(T),$$

     από την επαγωγική υπόθεση, τη μονοτονικότητα της T και την ιδιότητα του σταθερού σημείου.

   - αν ο α είναι οριακός διατακτικός τότε

     $$T^{\uparrow\alpha} = lub\{T^{\uparrow\beta} \mid \beta < \alpha\} \leq lfp(T),$$

     από την επαγωγική υπόθεση και τον ορισμό του lub.

2. Με επαγωγή στους διατακτικούς. Για $\alpha = 0$ ισχύει: $T^{\uparrow 0} = \bot \leq T^{\uparrow 1}$. Επαγωγική υπόθεση: έστω ότι ισχύει για όλους τους διατακτικούς $\beta < \alpha$.

   - αν ο α είναι επόμενος διατακτικός τότε

     $$T^{\uparrow\alpha} = T(T^{\uparrow(\alpha-1)}) \leq T(T^{\uparrow\alpha}) = T^{\uparrow(\alpha+1)},$$

     από την επαγωγική υπόθεση και τη μονοτονικότητα της T.

   - αν ο α είναι οριακός διατακτικός τότε

     $$\begin{aligned} T^{\uparrow\alpha} &= lub\{T^{\uparrow\beta} \mid \beta < \alpha\} \\ &\leq lub\{T^{\uparrow(\beta+1)} \mid \beta < \alpha\} \\ &\leq T(lub\{T^{\uparrow\beta} \mid \beta < \alpha\}) \\ &= T^{\uparrow(\alpha+1)} \end{aligned}$$

     από την επαγωγική υπόθεση και τη μονοτονικότητα της T.

3. Με επαγωγή στους διατακτικούς. Για $\alpha = 0$ ισχύει τετριμένα. Επαγωγική υπόθεση: έστω ότι για όλους τους διατακτικούς $\beta < \alpha$ ισχύει ότι για κάθε $\gamma < \beta$, $T^{\uparrow\gamma} \leq T^{\uparrow\beta}$.

   - αν ο α είναι επόμενος διατακτικός τότε

     $$T^{\uparrow\gamma} \leq T^{\uparrow(\alpha-1)} \leq T^{\uparrow\alpha},$$

     από την επαγωγική υπόθεση και το (2).

   - αν ο α είναι οριακός διατακτικός τότε

     $$T^{\uparrow\gamma} \leq lub\{T^{\uparrow\beta} \mid \beta < \alpha\} = T^{\uparrow\alpha},$$

     από την επαγωγική υπόθεση και τον ορισμό του lub.

4. Λόγω του (3) έχουμε $T^{\uparrow\alpha} \leq T^{\uparrow(\alpha+1)} \leq T^{\uparrow\beta}$. Επειδή $T^{\uparrow\alpha} = T^{\uparrow\beta}$, συμπεραίνουμε ότι $T^{\uparrow\alpha} = T^{\uparrow(\alpha+1)} = T(T^{\uparrow\alpha})$. Συνεπώς το $T^{\uparrow\alpha}$ είναι σταθερό σημείο και λόγω του (1) προκύπτει ότι $T^{\uparrow\alpha} = lfp(T)$.

5. Έστω ζ ο ελάχιστος διατακτικός με μεγαλύτερη πληθικότητα από την πληθικότητα του L. Ορίζουμε τη συνάρτηση h από το ζ στο L με $h(\delta) = T^{\uparrow\delta}$. Τότε υπάρχουν α και β τέτοια ώστε $\alpha < \beta$ και $h(\alpha) = h(\beta)$, δηλαδή $T^{\uparrow\alpha} = T^{\uparrow\beta}$. Από το (4) συμπεραίνουμε ότι $T^{\uparrow\alpha} = lfp(T)$. Το ζητούμενο προκύπτει λόγω των (1) και (3).

Θεώρημα 4.4 *Έστω $(L, \leq)$ ένα πλήρες δικτυωτό και T μία μονοτονική συνάρτηση από το L στο L. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:*

1. *για κάθε α, $gfp(T) \leq T^{\downarrow\alpha}$*
2. *για κάθε α, $T^{\downarrow(\alpha+1)} \leq T^{\downarrow\alpha}$*
3. *για κάθε α, γ, αν $\gamma < \alpha$ τότε $T^{\downarrow\alpha} \leq T^{\downarrow\gamma}$*
4. *για κάθε α, β, αν $\alpha < \beta$ και $T^{\downarrow\alpha} = T^{\downarrow\beta}$ τότε $T^{\downarrow\alpha} = gfp(T)$*
5. *Υπάρχει ένα α τέτοιο ώστε για κάθε γ, αν $\alpha \leq \gamma$ τότε $T^{\downarrow\gamma} = gfp(T)$*

Απόδειξη: Όπως το προηγούμενο θεώρημα.

Θεώρημα 4.5 *Έστω $(L, \leq)$ ένα πλήρες δικτυωτό και T μία συνεχής συνάρτηση από το L στο L. Τότε $lfp(T) = T^{\uparrow\omega}$.*

Απόδειξη: Το σύνολο $\{T^{\uparrow n} \mid n < \omega\}$, είναι κατευθυνόμενο. Συνεπώς

$$\begin{aligned}
T(T^{\uparrow\omega}) &= T(lub\{T^{\uparrow n} \mid n < \omega\}) \\
&= lub\{T(T^{\uparrow n}) \mid n < \omega\} \\
&= lub\{T^{\uparrow(n+1)} \mid n < \omega\} \\
&= lub\{T^{\uparrow n} \mid n < \omega\} \\
&= T^{\uparrow\omega}
\end{aligned}$$

Αρα το $T^{\uparrow\omega}$ είναι σταθερό σημείο και επιπλέον $T^{\uparrow\omega} \leq lfp(T)$. Συνεπώς $T^{\uparrow\omega} = lfp(T)$.

5 Λογικός Προγραμματισμός

Ορισμός 5.1 *Έστω ϕ μία πρόταση της πρωτοβάθμιας λογικής και $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ το σύνολο των μεταβλητών που εμφανίζονται ελεύθερες στην ϕ. Συμβολίζουμε με $\forall(\phi)$ την πρόταση $\forall Q_1 \forall Q_2 \ldots \forall Q_n \phi$ και με $\exists(\phi)$ την πρόταση $\exists Q_1 \exists Q_2 \ldots \exists Q_n \phi$.*

Ορισμός 5.2 *Ονομάζουμε literal μία πρόταση η οποία είναι είτε ατομική πρόταση είτε άρνηση ατομικής πρότασης. Στην πρώτη περίπτωση το literal λέγεται θετικό, ενώ στη δεύτερη αρνητικό.*

Ορισμός 5.3 *Ονομάζουμε clause μία πρόταση της μορφής $\forall(L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_m)$, όπου κάθε L_i είναι literal.*

Το clause

$$\forall(A_1 \vee \ldots \vee A_k \vee \neg B_1 \vee \ldots \vee \neg B_n)$$

γράφεται ισοδύναμα

$$\forall((B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \rightarrow (A_1 \vee \ldots \vee A_k))$$

Στο πλαίσιο του λογικού προγραμματισμού, θα παριστάνουμε το παραπάνω clause ως:

$$A_1, \ldots, A_k \leftarrow B_1, \ldots, B_n$$

Ορισμός 5.4 *Ονομάζουμε definite clause μία πρόταση της μορφής:*

$$A \leftarrow B_1, \ldots, B_n \ \ (n \geq 0)$$

Το A ονομάζεται κεφαλή και το $B_1, \ldots, B_n$ ονομάζεται σώμα του clause.

Ορισμός 5.5 *Ονομάζουμε κανόνα ένα definite clause της μορφής:*

$$A \leftarrow B_1, \ldots, B_n \ \ (n \geq 1)$$

Ορισμός 5.6 *Ονομάζουμε μοναδιαίο clause ή γεγονός ένα definite clause της μορφής:*

$$A \leftarrow$$

Ορισμός 5.7 *Ονομάζουμε λογικό πρόγραμμα ένα σύνολο από definite clauses.*

Ορισμός 5.8 *Ονομάζουμε στόχο ένα clause της μορφής:*

$$\leftarrow B_1, \ldots, B_n \ \ (n \geq 1)$$

Στο συμβολισμό της πρωτοβάθμιας λογικής, ενας στόχος είναι μία πρόταση της μορφής

$$\forall Q_1 \forall Q_2 \ldots \forall Q_k (\neg B_1 \vee \ldots \vee \neg B_n)$$

που γράφεται ισοδύναμα

$$\neg \exists Q_1 \exists Q_2 \ldots \exists Q_k (B_1 \wedge \ldots \wedge B_n)$$

Ορισμός 5.9 *Ονομάζουμε κενό clause το clause που δεν περιέχει κανένα literal. Το κενό clause συμβολίζεται με $\Box$.*

Ορισμός 5.10 *Ονομάζουμε Horn clause ένα clause που περιέχει ένα το πολύ θετικό literal.*

Παρατηρούμε ότι ένα Horn clause είναι κανόνας, γεγονός ή στόχος.

Ορισμός 5.11 (Herbrand Universe) *Ονομάζουμε Herbrand Universe U_P ενός λογικού προγράμματος P το σύνολο των όρων χωρίς μεταβλητές που σχηματίζονται από τα σύμβολα σταθερών και συναρτήσεων που εμφανίζονται στο P. (Αν το P δεν περιέχει σταθερές προσθέτουμε μία αυθαίρετη σταθερά π.χ. το 0.)*

Ορισμός 5.12 (Βάση Herbrand) *Ονομάζουμε βάση Herbrand B_P ενός λογικού προγράμματος P το σύνολο των ατομικών προτάσεων χωρίς μεταβλητές που σχηματίζονται από τα σύμβολα κατηγορημάτων συναρτήσεων που εμφανίζονται στο P και όρους από το Herbrand Universe U_P του P.*

Στο πλαίσιο του λογικού προγραμματισμού θα χρησιμοποιούμε τον όρο ερμηνεία (ιντερπρετατιον) αντί για τον όρο μοντέλο. Θα χρησιμοποιούμε τον όρο μοντέλο του προγράμματος για μια ερμηνεία που ικανοποιεί όλα τα clauses του προγράμματος.

Ορισμός 5.13 *Μία ερμηνεία I των συμβόλων ενός προγράμματος P ονομάζεται ερμηνεία Herbrand αν ισχύουν τα παρακάτω:*

- $|I| = U_P$
- *για κάθε σύμβολο σταθεράς c ισχύει $I(c) = c$*
- *για κάθε σύμβολο συνάρτησης n ορισμάτων f, ισχύει $I(f)(t_1, \ldots t_n) = f(t_1, \ldots t_n)$.*

Παρατηρούμε ότι κάθε ερμηνεία Herbrand I

- Απεικονίζει κάθε όρο στον εαυτό του.
- Μπορεί να περιγραφεί ως ένα υποσύνολο της βάσης Herbrand, το οποίο περιέχει την ατομική πρόταση $p(t_1, \ldots, t_n)$ αν και μόνο αν $(t_1, \ldots, t_n) \in I(p)$.

Θεώρημα 5.1 *Έστω S ένα σύνολο από clauses. Αν το S έχει μοντέλο τότε το S έχει μοντέλο Herbrand.*

Απόδειξη: Έστω M ένα μοντέλο του S. Ορίζουμε την ερμηνεία Herbrand:

$$H = \{Q \in B_S \mid M \models Q\}$$

Θα δείξουμε ότι η H είναι μοντέλο του P.

Ας υποθέσουμε ότι $H \not\models C$, για κάποιο $C = \forall(A_1 \vee \ldots \vee A_k \vee \neg B_1 \vee \ldots \vee \neg B_n) \in S$.

Συνεπώς υπάρχει r τέτοιο ώστε

$$H, r \not\models (A_1 \vee \ldots \vee A_k \vee \neg B_1 \vee \ldots \vee \neg B_n)$$

που ισοδυναμεί με

$$H, r \models (\neg A_1 \wedge \ldots \wedge \neg A_k \wedge B_1 \wedge \ldots \wedge B_n)$$

Έστω $A_i = p(t_1, \ldots, t_m)$. Ισχύει $H, r \not\models p(t_1, \ldots, t_m)$.

Αρα $(\hat{H}_r(t_1), \ldots, \hat{H}_r(t_m)) = (\hat{H}(\hat{H}_r(t_1)), \ldots, \hat{H}(\hat{H}_r(t_m))) \notin H(p)$.

Αρα $H \not\models p(\hat{H}_r(t_1), \ldots, \hat{H}_r(t_m))$.

Από τον ορισμό του H συμπεραίνουμε ότι $M \not\models p(\hat{H}_r(t_1), \ldots, \hat{H}_r(t_m))$.

Συνεπώς $(\hat{M}(\hat{H}_r(t_1)), \ldots, \hat{M}(\hat{H}_r(t_m))) \notin M(p)$.

Έστω μία ερμηνεία μεταβλητών s τέτοια ώστε $s(x) = \hat{M}(r(x))$. Τότε ισχύει $\hat{M}(\hat{H}_r(t)) = \hat{M}_s(t)$ για κάθε όρο t.

Συνεπώς $(\hat{M}_s(t_1), \ldots, \hat{M}_s(t_m)) \notin M(p)$ που συνεπάγεται, $M, s \not\models p(t_1, \ldots, t_m)$.

Αρα $M, s \not\models A_i$. Με ανάλογο τρόπο δείχνουμε ότι $M, s \models B_j$.

Απο τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$M, s \not\models (A_1 \vee \ldots \vee A_k \vee \neg B_1 \vee \ldots \vee \neg B_n)$$

(άτοπο)

Το παραπάνω θεώρημα δεν ισχύει για σύνολα που περιέχουν οποιοδήποτε σύνολο προτάσεων.

Για παράδειγμα το σύνολο $S = \{p(a), \exists x\ \neg p(x)\}$ έχει μοντέλο, αλλά δεν έχει Herbrand μοντέλο.

Θεώρημα 5.2 *Έστω $C = \forall(A_1 \vee \ldots \vee A_k \vee \neg B_1 \vee \ldots \vee \neg B_n)$ ένα clause και H μία ερμηνεία Herbrand. Τότε η H ικανοποιεί το C αν και μόνο αν η H ικανοποιεί όλα τα στιγμιότυπα του C χωρίς μεταβλητές.*

Ορισμός 5.14 *Έστω P ένα λογικό πρόγραμμα. Συμβολίζουμε με $ground(P)$ το ενδεχομένως άπειρο σύνολο προτάσεων που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε κάθε clause του P με όλα τα στιγμιότυπα του που δεν έχουν μεταβλητές.*

Θεώρημα 5.3 *Έστω P ένα λογικό πρόγραμμα και $\mathcal{M}$ ένα σύνολο μοντέλων Herbrand του P. Τότε το*

$$\bigcap_{M \in \mathcal{M}} M$$

είναι επίσης μοντέλο Herbrand του P.

Παρατηρούμε ότι η βάση Herbrand B_P ενός προγράμματος P είναι μοντέλο του P.

Συνεπώς το σύνολο που περιέχει όλα τα μοντέλα Herbrand του P είναι μη κενό.

Η τομή όλων των μοντέλων Herbrand ενός προγράμματος είναι το ελάχιστο (ως προς τη σχέση $\subseteq$) Herbrand μοντέλο του προγράμματος και συμβολίζεται με M_P.

Θεώρημα 5.4 *Έστω P ένα λογικό πρόγραμμα. Τότε*

$$M_P = \{A \in B_P \mid P \models A\}.$$

Απόδειξη: Έστω $A \in B_P$. Ισχύουν τα παρακάτω:
$P \models A$
ανν $P \cup \{\neg A\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμο
ανν $P \cup \{\neg A\}$ δεν έχει μοντέλο Herbrand
ανν για κάθε μοντέλο Herbrand H του P ισχύει $H \not\models \neg A$
ανν για κάθε μοντέλο Herbrand H του P ισχύει $H \models A$
ανν για κάθε μοντέλο Herbrand H του P ισχύει $A \in H$
ανν $A \in M_P$

Παρατηρούμε ότι το διατεταγμένο σύνολο $(2^{B_P}, \subseteq)$ είναι πλήρες δικτυωτό. Για κάθε $X \in 2^{B_P}$ ισχύει $lub(X) = \bigcup_{I \in X} I$ και $glb(X) = \bigcap_{I \in X} I$. Επιπλέον $\top = B_P$ και $\bot = \emptyset$.

Ορισμός 5.15 *Έστω P ένα λογικό πρόγραμμα. Ορίζουμε τον τελεστή T_P ως τη συνάρτηση από το 2^{B_P} στο 2^{B_P} με την ιδιότητα:*

$$T_P(I) = \{A \mid A \leftarrow A_1, \ldots, A_n \in ground(P) \text{ και } \{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq I\}$$

Θεώρημα 5.5 *Έστω P ένα λογικό πρόγραμμα. Τότε ο τελεστής T_P είναι μονοτονικός.*

Θεώρημα 5.6 *Έστω P ένα λογικό πρόγραμμα. Τότε ο τελεστής T_P είναι συνεχής.*

Απόδειξη: Έστω X ένα κατευθυνόμενο υποσύνολο του 2^{B_P}. Ισχύουν τα παρακάτω:

$A \in T_P(lub(X))$

ανν $A \leftarrow A_1, \ldots, A_n \in ground(P)$ και $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq lub(X)$

ανν $A \leftarrow A_1, \ldots, A_n \in ground(P)$ και $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq \bigcup_{I \in X} I$

ανν $A \leftarrow A_1, \ldots, A_n \in ground(P)$
και για κάθε i υπάρχει $I_i \in X$ τ.ω. $A_i \in I_i$

ανν $A \leftarrow A_1, \ldots, A_n \in ground(P)$ και $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq J$, για κάποιο $J \in X$

ανν $A \in T_P(J)$, για κάποιο $J \in X$

ανν $A \in lub(\{T_P(I) \mid I \in X\})$.

Θεώρημα 5.7 *Έστω P ένα λογικό πρόγραμμα και I μία ερμηνεία Herbrand του P. Τότε η I είναι μοντέλο του P αν και μόνο αν $T_P(I) \subseteq I$.*

Απόδειξη: Ισχύουν τα παρακάτω:
Η I είναι μοντέλο του P
ανν είναι μοντέλο του $ground(P)$
ανν για κάθε $A \leftarrow A_1, \ldots, A_n \in ground(P)$ αν $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq I$ τότε $A \in I$
ανν $T_P(I) \subseteq I$.

Θεώρημα 5.8 *Έστω P ένα λογικό πρόγραμμα. Τότε $M_P = lfp(T_P) = T_P^{\uparrow\omega}$*

Απόδειξη: Ισχύουν τα παρακάτω:

$$\begin{aligned} M_P &= glb\{H \mid H \text{ είναι μοντέλο Herbrand του } P\} \\ &= glb\{H \mid T_P(H) \subseteq H\} \\ &= lfp(T_P) \\ &= T_P^{\uparrow\omega} \end{aligned}$$

Σημειώνεται ότι ενδέχεται για κάποιο πρόγραμμα P να ισχύει $gfp(T_P) \neq T_P^{\downarrow\omega}$.

Ορισμός 5.16 *Έστω P ένα λογικό πρόγραμμα και G ένας στόχος. Μία απάντηση για το $P \cup \{G\}$ είναι μία αντικατάσταση η οποία περιλαμβάνει μόνο μεταβλητές από το G.*

Ορισμός 5.17 *Έστω P ένα λογικό πρόγραμμα, $G = \leftarrow A_1, \ldots, A_k$ ένας στόχος και θ μία απάντηση για το $P \cup \{G\}$. Η θ ονομάζεται ορθή απάντηση για το $P \cup \{G\}$ αν $P \models \forall((A_1 \wedge \ldots \wedge A_k)\theta)$.*

Η θ είναι ορθή απάντηση για το $P \cup \{G\}$ αν $P \cup \{\neg\forall((A_1 \wedge \ldots \wedge A_k)\theta)\}$ είναι μη ικανοποιήσιμο σύνολο προτάσεων.

Αν η θ είναι ορθή απάντηση για το $P \cup \{G\}$ τότε η πρόταση

$$\forall((A_1 \wedge \ldots \wedge A_k)\theta)$$

άληθεύει σε όλα το μοντέλα του P, συνεπώς και στο M_P.

Υπάρχουν ωστόσο προτάσεις που αληθεύουν στο M_P, αλλα δεν είναι λογικές συνέπειες του P. Αυτό οφείλεται στο ότι το M_P έχει οριστεί με βάση μονο τα μοντέλα Herbrand του P.

Παράδειγμα 5.1 *Έστω $P = \{p(a) \leftarrow\}$.*

Τότε $U_P = \{a\}$ και $M_P = \{p(a)\}$.

Συνεπώς $M_P \models \forall X \ (p(X)\epsilon)$.

Ωστόσο η ϵ δεν είναι ορθή απάντηση για το $P \cup \{\leftarrow p(X)\}$, καθώς $\forall X \ (p(X)\epsilon)$ δεν είναι λογική συνέπεια του P.

Παρατηρούμε ότι το $P \cup \{\neg\forall X \ (p(X)\epsilon)\}$ δεν έχει μοντέλο Herbrand, είναι όμως ικανοποιήσιμο.

Θεώρημα 5.9 *Έστω P ένα λογικό πρόγραμμα, $G = \leftarrow A_1, \ldots, A_k$ ένας στόχος και θ μία ορθή απάντηση για το $P \cup \{G\}$ τέτοια ώστε $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_k)\theta)$ να μην περιέχει μεταβλητές. Η θ είναι ορθή απάντηση ανν $M_P \models (A_1 \wedge \ldots \wedge A_k)\theta)$.*

Απόδειξη: Η μία κατεύθυνση προκύπτει από τον ορισμό της ορθής απάντησης.

Για την άλλη κατεύθυνση ισχύουν τα παρακάτω:

$M_P \models (A_1 \wedge \ldots \wedge A_k)\theta$
ανν για κάθε μοντέλο Herbrand H του P ισχύει $H \models (A_1 \wedge \ldots \wedge A_k)\theta$
ανν για κάθε μοντέλο Herbrand H του P ισχύει $H \not\models \neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_k)\theta$
ανν $P \cup \{\neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_k)\theta\}$ δεν έχει μοντέλο Herbrand
ανν $P \cup \{\neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_k)\theta\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμο
ανν $P \models (A_1 \wedge \ldots \wedge A_k)\theta$
ανν η θ είνα ορθή απάντηση.

Ορισμός 5.18 *Έστω $G = \leftarrow A_1, \ldots, A_m, \ldots, A_k$ ένας στόχος, $C = A \leftarrow B_1, \ldots, B_q$ ένα definite clause και θ ένας πιο γενικός ταυτοποιητής των A_m και A. Τότε λέμε ότι ο στόχος $G' = (\leftarrow A_1, \ldots, B_1, \ldots, B_q, \ldots, A_k)\theta$ παράγεται από τα G και C με χρήση του θ. Το A_m ονομάζεται επιλεγμένη ατομική πρόταση του G.*

Ορισμός 5.19 *Έστω P ένα λογικό πρόγραμμα και G ένας στόχος. Μία SLD-παραγωγή του $P \cup \{G\}$ αποτελείται από μία (πεπερασμένη ή άπειρη) ακολουθία $G_0 = G, G_1, G_2, \ldots$ απο στόχους, μία ακολουθία $C_1, C_2, \ldots$ από παραλλαγές προτάσεων του προγράμματος P και μία ακολουθία $\theta_1, \theta_2, \ldots$ από αντικαταστάσεις τέτοια ώστε:*

- *το C_i να μην περιέχει καμία μεταβλητή που περιέχεται σε κάποιο από τα $C_1 \ldots C_{i-1}$ και $G_1 \ldots G_{i-1}$.*
- *το G_{i+1} να παράγεται από τα G_i και C_{i+1} με χρήση της θ_{i+1}.*

Ορισμός 5.20 *Έστω P ένα λογικό πρόγραμμα και G ένας στόχος. Μία πεπερασμένη SLD-παραγωγή για το $P \cup \{G\}$ τέτοια ώστε $G_n = \Box$ ονομάζεται SLD-αντίκρουση μήκους n.*

Ορισμός 5.21 *Έστω P ένα λογικό πρόγραμμα και G ένας στόχος. Μία μη περιορισμένη SLD-παραγωγή για το $P \cup \{G\}$ ορίζεται παρόμοια με την SLD-παραγωγή, με τη διαφορά ότι τα θ_i επιτρέπεται να είναι οποιοιδήποτε ταυτοποιητές (όχι απαραίτητα πιο γενικοί).*

Ορισμός 5.22 *Μία SLD-παραγωγή μπορεί να είναι πεπερασμένη ή άπειρη.*

Μία πεπερασμένη SLD-παραγωγή είναι επιτυχημένη αν είναι SLD-αντίκρουση.

Μία πεπερασμένη SLD-παραγωγή είναι αποτυχημένη αν δεν τελειώνει με το $\square$ και δεν μπορεί να επεκταθεί.

Ορισμός 5.23 *Έστω P ένα λογικό πρόγραμμα. Το σύνολο επιτυχίας του P είναι το σύνολο όλων των $A \in B_P$ για τα οποία υπάρχει SLD-αντίκρουση του $P \cup \{\leftarrow A\}$.*

Ορισμός 5.24 *Έστω P ένα λογικό πρόγραμμα και G ένας στόχος. Μία αντικατάσταση θ ονομάζεται υπολογιζόμενη απάντηση για $P \cup \{G\}$ αν είναι ο περιορισμός της σύνθεσης $\theta_1 \cdots \theta_n$ στις μεταβλητές του G, όπου $\theta_1, \ldots, \theta_n$ είναι η ακολουθία των αντικαταστάσεων σε μία SLD-αντίκρουση του $P \cup \{G\}$.*

Θεώρημα 5.10 (Ορθότητα της SLD-resolution) *Έστω P ένα λογικό πρόγραμμα και G ένας μη κενός στόχος. Τότε κάθε υπολογιζόμενη απάντηση για το $P \cup \{G\}$ είναι και ορθή απάντηση για το $P \cup \{G\}$.*

Απόδειξη: Έστω $G = \leftarrow A_1, \ldots, A_m, \ldots, A_k$. Έστω $\theta_1, \ldots, \theta_n$ η ακολουθία των αντικαταστάσεων σε μία SLD-αντίκρουση του $P \cup \{G\}$ και θ η υπολογιζόμενη απάντηση από αυτή την SLD-αντίκρουση.

Η θ είναι ο περιορισμός της σύνθεσης $\theta_1 \cdots \theta_n$ στις μεταβλητές του G.
Συνεπώς $(A_1, \ldots, A_m, \ldots, A_k)\theta_1 \cdots \theta_n = (A_1, \ldots, A_m, \ldots, A_k)\theta$.

Αρκεί να δείξουμε ότι $P \models \forall((A_1, \ldots, A_m, \ldots, A_k)\theta_1 \cdots \theta_n)$. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο μήκος n της αντίκρουσης.

Έστω $n = 1$. Παρατηρούμε ότι αν ο στόχος αποτελείται από k literal και ο κανόνας που χρησιμοποιείται σε κάποιο βήμα έχει q literal στο σώμα, τότε ο νέος στόχος θα έχει $k - 1 + q$ literal. Για να είναι η παραπάνω ποσότητα ίση με 0, υποθέτωντας ότι $k \neq 0$, θα πρέπει να ισχύει $G = \leftarrow A_1$, $C_1 = A \leftarrow$ και $A_1\theta_1 = A\theta_1$.

Αρα $A_1\theta_1 \leftarrow$ είναι στιγμιότυπο μιας πρότασης του προγράμματος. Συνεπώς $P \models \forall(A_1\theta_1)$.

Έστω ότι ο ισχυρισμός ισχύει για αντικρούσεις μήκους μικρότερου του n. Έστω $C_1 = A \leftarrow B_1, \ldots, B_q$ και A_m η επιλεγμένη ατομική πρόταση στο πρώτο βήμα της αντίκρουσης.

Τότε $G_1 = \leftarrow (A_1, \ldots, B_1, \ldots, B_q, \ldots, A_k)\theta_1$. Απο επαγωγική υπόθεση ισχύει:

$$P \models \forall(((A_1 \wedge \ldots \wedge A_{m-1} \wedge B1 \wedge \ldots \wedge B_q \wedge A_{m+1} \ldots \wedge A_k)\theta_1)\theta_2 \ldots \theta_n)$$

Συνεπώς

$$P \models \forall(((B_1 \wedge \ldots \wedge B_q)\theta_1)\theta_2 \ldots \theta_n)$$

Επιπλέον

$$P \models \forall(((A \leftarrow B_1 \wedge \ldots \wedge B_q)\theta_1)\theta_2 \ldots \theta_n)$$

Συνεπώς $P \models \forall((A\theta_1)\theta_2 \ldots \theta_n)$ ή ισοδύναμα $P \models \forall((A_m\theta_1)\theta_2 \ldots \theta_n)$.

Επίσης

$$P \models \forall(((A_1 \wedge \ldots \wedge A_{m-1} \wedge A_{m+1} \ldots \wedge A_k)\theta_1)\theta_2 \ldots \theta_n)$$

Από τις δύο τελευταίες προκύπτει ότι

$$P \models \forall(((A_1 \wedge \ldots \wedge A_{m-1} \wedge A_m \wedge A_{m+1} \ldots \wedge A_k)\theta_1)\theta_2 \ldots \theta_n)$$

Πόρισμα: Το σύνολο επιτυχίας ενός προγράμματος είναι υποσύνολο του ελάχιστου μοντέλου Herbrand του προγράμματος.

Ορισμός 5.25 *Έστω A μία ατομική πρόταση. Συμβολίζουμε με $[A]$ το σύνολο όλων των στιγμιοτύπων χωρίς μεταβλητές του A.*

Θεώρημα 5.11 *Έστω P ένα λογικό πρόγραμμα $G = \leftarrow A_1, \ldots, A_k$ ένας στόχος. Έστω ότι το $P \cup \{G\}$ έχει μία SLD-αντίκρουση μήκους n και $\theta_1, \ldots, \theta_n$ η ακολουθία των αντικαταστάσεων στην αντίκρουση αυτή. Τότε $\bigcup_{j=1}^{k}[A_j\theta_1 \ldots \theta_n] \subseteq T_P^{\uparrow n}$.*

Απόδειξη: Με επαγωγή στο μήκος της SLD-αντίκρουσης.

Για $n = 1$, θα πρέπει να ισχύει $G = \leftarrow A_1$, $C_1 = A \leftarrow$ και $A_1\theta_1 = A\theta_1$. Ισχύει $[A] \subseteq T_P^{\uparrow 1}$ που συνεπάγεται $[A\theta_1] = [A_1\theta_1] \subseteq T_P^{\uparrow 1}$.

Έστω ότι ο ισχυρισμός ισχύει για αντικρούσεις μήκους μικρότερου του n.

Αν A_j δεν είναι η επιλεγμένη ατομική πρόταση στο πρώτο βήμα της αντίκρουσης, τότε $A_j\theta_1$ είναι μία ατομική πρόταση του G_1. Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε $[(A_j\theta_1)\theta_2 \dots \theta_n] = [A_j\theta_1\theta_2 \dots \theta_n] \subseteq T_P^{\uparrow n-1} \subseteq T_P^{\uparrow n}$.

Αν A_j είναι η επιλεγμένη ατομική πρόταση στο πρώτο βήμα τότε έστω $C_1 = A \leftarrow B_1, \dots, B_q$. Συνεπως $A_j\theta_1 = A\theta_1$.

Αν $q = 0$ τότε $[A] \subseteq T_P^{\uparrow 1}$. Συνεπώς $[A_j\theta_1 \dots \theta_n] \subseteq [A_j\theta_1] = [A\theta_1] \subseteq [A] \subseteq T_P^{\uparrow 1} \subseteq T_P^{\uparrow n}$.

Αν $q > 0$ τότε για κάθε i, $1 \leq i \leq q$, $B_i\theta_1$ είναι μία ατομική πρόταση του G_1. Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε $[(B_i\theta_1)\theta_2 \dots \theta_n] = [B_i\theta_1\theta_2 \dots \theta_n] \subseteq T_P^{\uparrow n-1}$.

Από τον ορισμό του T_P προκύπτει ότι $[A_j\theta_1\theta_2 \dots \theta_n] = [A\theta_1\theta_2 \dots \theta_n] \subseteq T_P^{\uparrow n}$.

Λήμμα 5.1 (Mgu-Lemma) *Έστω P ένα λογικό πρόγραμμα, G ένας στόχος και έστω ότι το $P \cup \{G\}$ έχει μία μη περιορισμένη SLD-αντίκρουση με ακολουθία των αντικαταστάσεων $\theta_1, \dots, \theta_n$. Τότε το $P \cup \{G\}$ έχει μία SLD-αντίκρουση με ακολουθία των αντικαταστάσεων $\theta'_1, \dots, \theta'_n$, τέτοια ώστε $\theta_1 \dots \theta_n = \theta'_1 \dots \theta'_n\gamma$, για κάποια αντικατάσταση γ.*

Απόδειξη: Με επαγωγή στο μήκος της μη περιορισμένης SLD-αντίκρουσης.

Για $n = 1$, θα πρέπει να ισχύει $G = \leftarrow A_1$, $C_1 = A \leftarrow$ και $A_1\theta_1 = A\theta_1$. Έστω θ'_1 ένας πιο γενικός ταυτοποιητής των A_1 και A. Χρησιμοποιώντας τον θ'_1 μπορούμε να σχηματίσουμε μία SLD-αντίκρουση μήκους 1 του $P \cup \{G\}$. Επιπλέον, υπάρχει γ τέτοιο ώστε $\theta_1 = \theta'_1\gamma$ (αφού θ' είναι πιο γενικός ταυτοποιητής).

Έστω ότι ο ισχυρισμός ισχύει για αντικρούσεις μήκους μικρότερου του n.

Έστω μία μη περιορισμένη SLD-αντίκρουση του $P \cup \{G\}$ στην οποία η ακολουθία στόχων είναι $G_0 = G, G_1, G_2 \dots, G_n$. Έστω $C_1 = A \leftarrow B_1, \dots, B_q$ και A_m η επιλεγμένη πρόταση στο πρώτο βήμα. Έστω θ'_1 ένας πιο γενικός ταυτοποιητής των A_m και A. Συνεπώς υπάρχει μία αντικατάσταση σ τέτοια ώστε $\theta_1 = \theta'_1\sigma$.

Χρησιμοποιώντας τις αντικαταστάσεις $\theta'_1, \sigma\theta_2, \dots, \theta_n$ μπορούμε να σχηματίσουμε μία μή περιορισμένη SLD-αντίκρουση του $P \cup \{G\}$, με ακολουθία στόχων $G_0 = G, G'_1, G_2, \ldots, G_n$.

Από επαγωγική υπόθεση το $P \cup \{G'_1\}$, έχει μία SLD-αντίκρουση με ακολουθία αντικαταστάσεων $\theta'_2, \ldots, \theta'_n$ τέτοια ώστε $\sigma\theta_2 \ldots \theta_n = \theta'_2 \ldots \theta'_n\gamma$, για κάποια αντικατάσταση γ.

Συνεπώς το $P \cup \{G\}$, έχει μία SLD-αντίκρουση με ακολουθία αντικαταστάσεων $\theta'_1, \theta'_2, \ldots, \theta'_n$ τέτοια ώστε $\theta_1\theta_2 \ldots \theta_n = \theta'_1\sigma\theta_2 \ldots \theta_n = \theta'_1\theta'_2 \ldots \theta'_n\gamma$.

Λήμμα 5.2 (Lifting-Lemma) *Έστω P ένα λογικό πρόγραμμα, G ένας στόχος και θ μία αντικατάσταση. Έστω επίσης ότι το $P \cup \{G\theta\}$ έχει μία SLD-αντίκρουση με ακολουθία των αντικαταστάσεων $\theta_1, \ldots, \theta_n$. Τότε το $P \cup \{G\}$ έχει μία SLD-αντίκρουση με ακολουθία των αντικαταστάσεων $\theta'_1, \ldots, \theta'_n$, τέτοια ώστε $\theta\theta_1 \ldots \theta_n = \theta'_1 \ldots \theta'_n\gamma$, για κάποια αντικατάσταση γ.*

Απόδειξη: Έστω $C_1 = A \leftarrow B_1, \ldots, B_q$ και A_m η επιλεγμένη πρόταση στο πρώτο βήμα της SLD-αντίκρουσης του $P \cup \{G\theta\}$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η θ δεν περιέχει αντικατάσταση για καμία μεταβλητή του C_1.

Συνεπώς $\theta\theta_1$ είναι ένας ταυτοποιητής των A και A_m. Επιπλέον $A\theta\theta_1 = A\theta_1$.

Χρησιμοποιώντας τις αντικαταστάσεις $\theta\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ μπορούμε να σχηματίσουμε μία μή περιορισμένη SLD-αντίκρουση του $P \cup \{G\}$ (στην οποία η ακολουθία των στόχων είναι η ίδια με αυτή της SLD-αντίκρουσης του $P \cup \{G\theta\}$ με εξαίρεση τον αρχικό στόχο).

Το λήμμα προκύπτει άμεσα με εφαρμογή του mgu-lemma.

Θεώρημα 5.12 *Το σύνολο επιτυχίας ενός προγράμματος ισούται με το ελάχιστο μοντέλο Herbrand του προγράμματος.*

Απόδειξη: Η μία κατεύθυνση έχει ήδη αποδειχτεί.

Θα δείξουμε με επαγωγή στο n ότι το $T_P^{\uparrow n}$ είναι υποσύνολο του συνόλου επιτυχίας. Το ζητούμενο προκύπτει άμεσα καθώς για κάθε πρόγραμμα P ισχύει $M_P = T_P^{\uparrow\omega} = \bigcup_{n<\omega} T_P^{\uparrow n}$.

Για $n = 0$ ισχύει τετριμένα, καθώς $T_P^{\uparrow 0} = \emptyset$.

Έστω ότι ισχύει για κάθε $i < n$. Έστω $A \in T_P^{\uparrow n}$. Συνεπώς υπάρχει ένα clause $H \leftarrow B_1, \ldots, B_q$ στο πρόγραμμα και μία αντικατάσταση θ τέτοια ώστε $A = H\theta$ και $B_j\theta \in T_P^{\uparrow(n-1)}$, για κάθε j, $1 \leq j \leq n$.

Αν $q = 0$, τότε προφανώς υπάρχει μία SLD-αντίκρουση του $P \cup \{\leftarrow A\}$ μήκους 1.

Αν $q > 0$, τότε από επαγωγική υπόθεση υπάρχει μία SLD-αντίκρουση του $P \cup \{\leftarrow B_j\theta\}$ για κάθε j.

Επειδή τα $B_j\theta$ δεν περιέχουν μεταβλητές, οι παραπάνω SLD-αντικρούσεις μπορούν να συνδυαστούν σε μία SLD-αντίκρουση του $P \cup \{\leftarrow (B_1, \ldots, B_q)\theta\}$.

Η παραπάνω μπορεί να επεκταθεί με ένα αρχικό βήμα στο οποίο χρησιμοποιείτε η αντικατάσταση θ σε μία (ενδεχομένως μη περιρισμένη - αφού ο θ δεν είναι απαραίτητα πιο γενικός ταυτοποιητής) SLD-αντίκρουση του $P \cup \{\leftarrow A\}$.

Λήμμα 5.3 *Έστω P ένα λογικό πρόγραμμα και A μία ατομική πρόταση τέτοια ώστε $P \models \forall(A)$. Τότε υπάρχει μία SLD-αντίκρουση του $P \cup \{\leftarrow A\}$ στην οποία η υπολογιζόμενη απάντηση είναι η ταυτοτική αντικατάσταση.*

Απόδειξη: Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ οι μεταβλητές που εμφανίζονται στην A.

Έστω $a_1, a_2, \ldots, a_n$ διακριτές σταθερές οι οποίες δεν εμφανίζονται ούτε στο P ούτε στην A.

Έστω $\theta = \{X_1/a_1, X_2/a_2, \ldots X_n/a_n\}$. Ισχύει $P \models A\theta$, συνεπώς με βάση το προηγούμενο θεώρημα υπάρχει μία SLD-αντίκρουση του $P \cup \{\leftarrow A\theta\}$. Επειδή η πρόταση $A\theta$ δεν περιέχει μεταβλητές η υπολογιζόμενη απάντηση στην παραπάνω SLD-αντίκρουση είναι η ταυτοτική αντικατάσταση.

Επειδή οι σταθερές a_i δεν εμφανίζονται ούτε στο P ούτε στην A μπορούμε να μπορούμε να μετατρέψουμε την παραπάνω SLD-αντίκρουση σε μία SLD-αντίκρουση του $P \cup \{\leftarrow A\}$, αντικαθιστώντας τις σταθερές $a_1, a_2, \ldots, a_n$ με τις μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Θεώρημα 5.13 (Πληρότητα της SLD-resolution) *Έστω P ένα λογικό πρόγραμμα και G ένας στόχος. Για κάθε ορθή απάντηση θ για το $P \cup \{G\}$ υπάρχει μία υπολογιζόμενη απάντηση σ για το $P \cup \{G\}$ τέτοια ώστε η θ να ισούται με τον περιορισμό της $\sigma\gamma$, για κάποια αντικατάσταση γ.*

Απόδειξη: Έστω $G = \leftarrow A_1, A_2, \ldots, A_k$ και έστω θ ορθή απάντηση.

Τότε $P \models \forall((A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k)\theta)$.

Από το προηγούμενο λήμμα, για κάθε i, $1 \leq i \leq k$, υπάρχει μία SLD-αντίκρουση του $P \cup \{\leftarrow A_i\theta\}$ με υπολογιζόμενη απάντηση την ταυτοτική.

Συνδυάζοντας τις παραπάνω SLD-αντικρούσεις μπορούμε να σχηματίσουμε μία μία SLD-αντίκρουση του $P \cup \{G\theta\}$ με υπολογιζόμενη απάντηση την ταυτοτική.

Έστω $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ η ακολουθία των αντικαταστάσεων στην παραπάνω SLD-αντίκρουση του $P \cup \{G\theta\}$.

Ισχύει $(G\theta)(\theta_1\theta_2 \ldots \theta_n) = G\theta$. Συνεπώς ο περιορισμός της $\theta\theta_1\theta_2 \ldots \theta_n$ στις μεταβλητές του G είναι η θ.

Επίσης, από το lifting lemma υπάρχει μία SLD-αντίκρουση του $P \cup \{G\}$ με ακολουθία αντικαταστάσεων $\theta'_1, \theta'_2, \ldots, \theta'_n$, τέτοια ώστε $\theta\theta_1\theta_2 \ldots \theta_n = \theta'_1\theta'_2 \ldots \theta'_n\gamma$ για κάποια αντικατάσταση γ.

Η υπολογιζόμενη απάντηση στην SLD-αντίκρουση του $P \cup \{G\}$ είναι ο περιορισμός σ της $\theta'_1\theta'_2 \ldots \theta'_n$ στις μεταβλητές του G.

Αν στη σχέση $\theta\theta_1\theta_2 \ldots \theta_n = \theta'_1\theta'_2 \ldots \theta'_n\gamma$ πάρουμε τον περιορισμό των δύο μελών στις μεταβλητές του G προκύπτει ότι η θ ισούται με τον περιορισμό της $\sigma\gamma$ στις μεταβλητές του G.

6 Λογικά Προγράμματα με Άρνηση

Ο τρόπος με τον οποίο έχουμε ορίσει την ορθή απάντηση δεν μας επιτρέπει να χειριστούμε στόχους που περιέχουν αρνητικά literal.

Έστω P είναι ένα λογικό πρόγραμμα και A μία ατομική πρόταση από τη βάση Herbrand B_P. Επειδή η B_P είναι Herbrand μοντέλο του P, το σύνολο

$P \cup \{A\}$ είναι ικανοποιήσιμο. Συνεπώς $P \not\models \neg A$.

Αρα δεν μπορούμε ποτέ να εξάγουμε το συμπέρασμα ότι ένα αρνητικό literal αποτελεί λογική συνέπεια ενός προγράμματος.

Παράδειγμα: Έστω το παρακάτω πρόγραμμα P:

worldCupWinner(uruguay,1930) ←
worldCupWinner(italy,1934) ←
worldCupWinner(italy,1938) ←
worldCupWinner(uruguay,1950) ←
worldCupWinner(westgermany,1954) ←
worldCupWinner(brazil,1958) ←
worldCupWinner(brazil,1962) ←
worldCupWinner(england,1966) ←
worldCupWinner(brazil,1970) ←
worldCupWinner(westgermany,1974) ←
worldCupWinner(argentina,1978) ←
worldCupWinner(italy,1982) ←
worldCupWinner(argentina,1986) ←
worldCupWinner(westgermany,1990) ←
worldCupWinner(brazil,1994) ←
worldCupWinner(france,1998) ←
worldCupWinner(brazil,2002) ←
worldCupWinner(italy,2006) ←

Παρ'οτι κοιτώντας το παραπάνω πρόγραμμα θα μπορούσαμε να εξάγουμε ως συμπέρασμα ότι οι παρακάτω προτάσεις αληθεύουν

¬ worldCupWinner(greece,2010) ←
¬ worldCupWinner(hungary,1954) ←
¬ worldCupWinner(italy,1899) ←

αυτές οι προτάσεις δεν αποτελούν λογικές συνέπειες του προγράμματος.

Ο Reiter πρότεινε την υπόθεση του κλειστού κόσμου (ςλοσεδ ωορλδ ασσυμπτιον) σύμφωνα με την οποία αν μία ατομική πρόταση $A \in B_P$ πρόταση δεν είναι λογική συνέπεια του P τότε μπορούμε να εξάγουμε ως συμπέρασμα τη $\neg A$.

Σύμφωνα με την υπόθεση του κλειστού κόσμου ένα literal χωρίς μεταβλητές L εξάγεται ως συμπέρασμα από ένα πρόγραμμα P ανν $M_P \models L$, όπου M_P το ελάχιστο Herbrand μοντέλο του P.

(για απλούστευση της περιγραφής υποθέτουμε ότι όλες οι σταθερές και τα συναρτησιακά σύμβολα του L εμφανίζονται και στο P).

Με την παραπάνω προσέγγιση μπορούμε να εξάγουμε ως συμπέρασμα με βάση ένα πρόγραμμα P οποιαδήποτε αρνητικό literal χωρίς μεταβλητές $\neg A$ τέτοιο ώστε $A \in B_P - M_P$.

Στο λογικό προγραμματσμό χρησιμοποιούμε την άρνηση ως αποτυχία: η αποτυχία απόδειξης της πρότασης $A \in B_P$ συνιστά απόδειξη της $\neg A$.

Στη συνέχεια θα δούμε πώς μπορεί να οριστεί η σημασιολογία ενός προγράμματος, ώστε να μπορούμε να χειριστούμε στόχους που περιέχουν αρνητικά literals.

Επίσης θα διευρύνουμε την έννοια του λογικού προγράμματος, ώστε να επιτρέπεται η ύπαρξη αρνητικών literals στο σώμα των κανόνων.

Ορισμός 6.1 *Ονομάζουμε λογικό πρόγραμμα με άρνηση ένα σύνολο προτάσεων της μορφής:*

$$A \leftarrow B_1, \ldots, B_m, \neg C_1, \ldots, \neg C_n, \quad (m, n \geq 0)$$

όπου B_i και C_j είναι ατομικές προτάσεις.

Ο ¨λαρκ πρότεινε τη χρήση της συμπλήρωσης $comp(P)$ ενός προγράμματος P με άρνηση αντί του ίδιου του P, κατά τον ορισμό της ορθής απάντησης.

Η συμπλήρωση ενός προγράμματος ομαδοποιεί του κανόνες που έχουν ως κεφαλή ατομικές προτάσεις που σχηματίζονται με το ίδιο σύμβολο κατηγορήματος (χρησιμοποιώντας διαζευξη στο σώμα) και μετατρέπει τα $\leftarrow$ σε $\leftrightarrow$.

Με τον παραπάνω τρόπο για κάθε σύμβολο κατηγορήματος σχηματίζεται μία πρόταση που αποτελεί το συμπληρωμένο ορισμό του κατηγορήματος.

Η συμπλήρωση ενός προγράμματος $comp(P)$ αποτελείται από τους συμπληρωμένους ορισμους όλων των κατηγορημάτων, μαζί με ένα σύνολο αξιωμάτων για την ισότητα.

Παράδειγμα 6.1 *Έστω το παρακάτω πρόγραμμα* P*:*

$p(a) \leftarrow$
$p(b) \leftarrow$
$q(c) \leftarrow$

Οι ορισμοί των p, q *στο* $comp(P)$ *είναι:*

$$\forall(p(X) \leftrightarrow (X = a) \vee (X = b))$$
$$\forall(q(X) \leftrightarrow (X = c))$$

Παρατηρούμε ότι $comp(P) \models \neg p(c)$*, ενώ αντίθετα* $P \not\models \neg p(c)$

Παράδειγμα 6.2 *Έστω το παρακάτω πρόγραμμα* P*:*

$p(a) \leftarrow$
$q(b) \leftarrow$
$r(Y) \leftarrow \neg p(Y)$

Οι ορισμοί των p, q, r *στο* $comp(P)$ *είναι:*

$$\forall(p(X) \leftrightarrow (X = a))$$
$$\forall(q(X) \leftrightarrow (X = b))$$
$$\forall(r(X) \leftrightarrow \exists Y\ (X = Y) \wedge \neg p(Y))$$

Παρατηρούμε ότι $comp(P) \models r(b)$*, ενώ αντίθετα* $P \not\models r(b)$

Παράδειγμα 6.3 *Έστω το παρακάτω πρόγραμμα* P*:*

$nat(0) \leftarrow$
$nat(s(Z)) \leftarrow nat(Z)$

Ο ορισμός του nat *στο* $comp(P)$ *είναι:*

$$\forall(nat(X) \leftrightarrow (X = 0) \vee \exists Z\ (X = s(Z)) \wedge nat(Z))$$

Παρατηρούμε ότι $comp(P) \models \neg nat(mickeymouse)$*, ενώ αντίθετα* $P \not\models \neg nat(mickeymouse)$

Παράδειγμα 6.4 *Έστω το παρακάτω πρόγραμμα* P*:*

$even(0) \leftarrow$
$even(s(Z)) \leftarrow \neg even(Z)$

Ο ορισμός του $even$ στο $comp(P)$ είναι:

$$\forall(even(X) \leftrightarrow (X = 0) \vee \exists Z \ (X = s(Z)) \wedge \neg even(Z))$$

Παρατηρούμε ότι $comp(P) \models \neg even(s(0))$, ενώ αντίθετα $P \not\models \neg even(s(0))$

Ορισμός 6.2 *Έστω ένα λογικό πρόγραμμα με άρνηση P και έστω ένα κατηγόρημα p που εμφανίζεται στο P. Ο συμπληρωμένος ορισμός του p σχηματίζεται με την παρακάτω διαδικασία:*

- *επιλέγονται n μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots, X_n$ που δεν εμφανίζονται στο P, όπου n το πλήθος ορισμάτων του p.*

- *κάθε πρόταση του προγράμματος της μορφής $p(t_1, \ldots, t_n) \leftarrow L_1, \ldots, L_k$ (όπου L_i θετικό ή αρνητικό literal) μετασχηματίζεται στην ισοδύναμη πρόταση*
  $p(X_1, \ldots, X_n) \leftarrow \exists Y_1 \ldots \exists Y_m((X_1 = t_1) \wedge \ldots \wedge (X_n = t_n) \wedge L_1 \wedge \ldots \wedge L_k)$
  όπου $Y_1 \ldots Y_m$ οι μεταβλητές που εμφανίζονται στην αρχική πρόταση.

- *έστω ότι οι προτάσεις που πρέκυψαν από το προηγούενο βήμα και έχουν στην κεφαλή το p είναι:*

  $p(X_1, \ldots, X_n) \leftarrow \phi_1$

  $\ldots$

  $p(X_1, \ldots, X_n) \leftarrow \phi_s$

  Τότε ο συμπληρωμένος ορισμός του p είναι:

  $\forall X_1 \ldots \forall X_1(p(X_1, \ldots, X_n) \leftrightarrow \phi_1 \vee \ldots \vee \phi_s)$

Ορισμός 6.3 *Έστω P ένα λογικό πρόγραμμα με άρνηση. Η συμπλήρωση $comp(P)$ του P είναι το σύνολο προτάσεων που περιέχει:*

- *Το συμπληρωμένο ορισμό για καθε σύμβολο κατηγορήματος που εμφανίζεται στο P*

- *Τα παρακάτω αξιώματα τη ισότητας:*

1. *$\neg(c = d)$ για κάθε ζεύγος διαφορετικών σταθερών c, d.*
2. *$\forall(\neg(f(X_1, \ldots, X_m) = g(Y_1, \ldots, Y_n)))$ για κάθε ζεύγος διαφορετικών συμβόλων συναρτήσεων f, g.*
3. *$\forall(\neg(f(X_1, \ldots, X_m) = c))$ για κάθε σύμβολο σταθεράς c και σύμβολο συνάρτησης f.*
4. *$\forall(\neg(t = X))$ για κάθε όρο t διαφορετικό της X που περιέχει την X.*
5. *$\forall(\neg(X_1 = Y_1) \vee \ldots \vee \neg(X_n = Y_n) \rightarrow \neg(f(X_1, \ldots, X_n) = f(Y_1, \ldots, Y_n)))$ για κάθε σύμβολο συνάρτησης f.*
6. *$\forall(X = X)$*
7. *$\forall((X_1 = Y_1) \wedge \ldots \wedge (X_n = Y_n) \rightarrow f(X_1, \ldots, X_n) = f(Y_1, \ldots, Y_n))$ για κάθε σύμβολο συνάρτησης f.*
8. *$\forall((X_1 = Y_1) \wedge \ldots \wedge (X_n = Y_n) \rightarrow (p(X_1, \ldots, X_n) \rightarrow p(Y_1, \ldots, Y_n)))$ για κάθε σύμβολο κατηγορήματος p (συμπεριλαμβανομένου του $=$).*

Στη συνέχεια δίνουμε ορισμένα παραδείγματα από τα οποία φαίνονται τα αρνητικά σημεία της παραπάνω προσέγγισης:

Παράδειγμα 6.5 *Έστω το παρακάτω πρόγραμμα P:*

$$p(a) \leftarrow \neg q(a), \neg p(a)$$

Οι ορισμοί των p, q στο $comp(P)$ είναι:

$$\forall(p(X) \leftrightarrow (X = a) \wedge \neg q(a) \wedge \neg p(a))$$
$$\forall(q(X) \leftrightarrow false).$$

Το παραπάνω σύνολο προτάσεων είναι μη ικανοποιήσιμο, συνεπώς έχει ως λογικές συνέπειες όλες τις προτάσεις!

Έστω ότι στο πρόγραμμα P προσθέσουμε την πρόταση

$$q(a) \leftarrow q(a)$$

η οποία φαινομενικά είναι άνευ σημασίας, αφού δεν περιέχει καμία πληροφορία. Συνεπώς θα περιμέναμε το νέο πρόγραμμα P' να έχει την ίδια σημασία με το P. Ωστόσο οι ορισμοί των p, q στο $comp(P')$ είναι:

$$\forall(p(X) \leftrightarrow (X = a) \wedge \neg q(a) \wedge \neg p(a))$$

$\forall(q(X) \leftrightarrow (X = a) \wedge q(a)).$

Το παραπάνω σύνολο προτάσεων έχει ένα μοναδικό Herbrand μοντέλο $H' = \{q(a)\}$.

Αν στο πρόγραμμα P *προσθέσουμε την πρόταση*

$p(a) \leftarrow p(a)$

τότε οι ορισμοί των p, q *στο* $comp(P'')$ *(όπου* P'' *το πρόγραμμα που προκύπτει είναι):*

$$\forall(p(X) \leftrightarrow ((X = a) \wedge \neg q(a) \wedge \neg p(a)) \vee ((X = a) \wedge p(a)))$$
$$\forall(q(X) \leftrightarrow false).$$

Το παραπάνω σύνολο προτάσεων έχει ένα μοναδικό Herbrand μοντέλο $H'' = \{p(a)\}$.

Παράδειγμα 6.6 *Έστω το παρακάτω πρόγραμμα* P:

$nat(0) \leftarrow$
$nat(s(Z)) \leftarrow nat(Z)$
$nat(Z) \leftarrow nat(Z)$

Ο ορισμός του nat *στο* $comp(P)$ *είναι:*

$$\forall(nat(X) \leftrightarrow$$
$$(X = 0) \vee \exists Z\ ((X = s(Z)) \wedge nat(Z)) \vee \exists Z\ ((X = Z) \wedge nat(Z)))$$

Παρατηρούμε ότι $comp(P) \not\models \neg nat(mickeymouse)$. *Συνεπώς και σ' αυτό το παράδειγμα η εισαγωγή του τρίτου κανόνα αλλοίωσε τη σημασία του προγράμματος.*

Παράδειγμα 6.7 *Έστω το παρακάτω πρόγραμμα* P:

$edge(a, b) \leftarrow$
$edge(c, d) \leftarrow$
$edge(d, c) \leftarrow$

$$reachable(a) \leftarrow$$
$$reachable(Z) \leftarrow reachable(Y), edge(Y, Z)$$

Με βάση το παραπάνω προγράμματος θα περιμέναμε ότι θα μπορούσαμε να εξάγουμε το συμπέρασμα ότι οι προτάσεις $\neg reachable(c)$ και $\neg reachable(d)$ αληθεύουν.

Ωστόσο ο ορισμός των $reachable$ και $edge$ στο $comp(P)$ είναι:

$$\forall(reachable(X) \leftrightarrow$$
$$(X = a) \vee \exists Y \exists Z\ (X = Z) \wedge reachable(Y) \wedge edge(Y, Z))$$

$$\forall(edge(X_1, X_2) \leftrightarrow$$
$$(X_1 = a) \wedge (X_2 = b) \vee (X_1 = c) \wedge (X_2 = d) \vee (X_1 = d) \wedge (X_2 = c)$$

Ισχύει $comp(P) \not\models \neg reachable(c)$. Συνεπώς η σημασιολογία που αποδίδεται με βάση τη συμπλήρωση ῝λαρκ στο P δεν συμφωνεί με τη διαισθητική σημασία του προγράμματος.

Παράδειγμα 6.8 Έστω το παρακάτω πρόγραμμα P:

$$bird(tweety) \leftarrow$$
$$fly(Y) \leftarrow bird(Y), \neg abnormal(Y)$$
$$abnormal(Y) \leftarrow irregular(Y)$$
$$irregular(Y) \leftarrow abnormal(Y)$$

Με βάση το παραπάνω προγράμματος θα περιμέναμε ότι θα μπορούσαμε να εξάγουμε το συμπέρασμα ότι η προταση $fly(tweety)$ αληθεύει.

Ωστόσο το $comp(P)$ περιλαμβάνει τις παρακάτω προτάσεις:

$$\forall(bird(X) \leftrightarrow (X = tweety))$$

$$\forall(fly(X) \leftrightarrow \exists Y((X = Y) \wedge bird(Y), \neg abnormal(Y))$$

$$\forall(abnormal(X) \leftrightarrow \exists Y((X = Y) \wedge irregular(Y))$$

$$\forall(irregular(X) \leftrightarrow \exists Y((X = Y) \wedge abnormal(Y))$$

Ισχύει $comp(P) \not\models fly(tweety)$. Και σε αυτή την περίπτωση η σημασιολογία που αποδίδεται με βάση τη συμπλήρωση ¨λαρκ στο P δεν συμφωνεί με τη διασθητική σημασία του προγράμματος.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με προσεγγίσεις στις οποίες με βάση το πρόγραμμα επιλέγεται ένα μοντέλο M_P το οποίο περιγράφει τη σημασιολογία του προγράμματος.

Στην περίπτωση όπου το P δεν περιέχει άρνηση, τότε όπως έχουμε δει το μοντέλο M_P επιλέγεται να είναι το ελάχιστο Herbrand μοντέλο του προγράμματος.

Αν το P περιέχει άρνηση τότε δεν έχει απαραίτητα ελάχιστο Herbrand μοντέλο, αλλά ενδέχεται να έχει περισσότερα από ένα ελαχιστικά Herbrand μοντέλα.

Επιπλέον δεν είναι πάντα εύκολο να επιλέξουμε το M_P.

Παράδειγμα 6.9 *Το πρόγραμμα P_1:*

$$p(0) \leftarrow \neg q(0)$$

έχει δύο ελαχιστικά μοντέλα Herbrand $H_1 = \{p(0)\}$ και $H_2 = \{q(0)\}$. Από αυτά το H_1 περιγράφει καλύτερα τη σημασιολογία του P_1.

Το πρόγραμμα P_2:

$$q(0) \leftarrow \neg p(0)$$

είναι λογικά ισοδύναμο με το P_1, συνεπώς έχει ίδιο σύνολο Herbrand μοντέλων. Από τα δύο ελαχιστικά μοντέλα Herbrand, το H_2 περιγράφει καλύτερα τη σημασιολογία του P_2.

Το πρόγραμμα P_3:

$$p(0) \leftarrow \neg q(0)$$
$$q(0) \leftarrow \neg p(0)$$

είναι λογικά ισοδύναμο με τα P_1, P_2. Λόγω συμμετρίας δεν μπορούμε να επιλέξουμε κάποιο από τα δύο ελαχιστικά μοντέλα Herbrand (ούτε κάποιο άλλο

Herbrand μοντέλο), για να περιγράψουμε τη σημασιολογία του P_3.

Από το παραπάνω παράδειγμα φαίνεται ότι δεν μπορούμε πάντοτε να επιλέξουμε ένα Herbrand μοντέλο που να περιγράφει τη σημασιολογία ενός λογικού προγράμματος με άρνηση.

Στη συνέχεια θα αναζητήσουμε δομικές ιδιότητες των λογικών προγραμμάτων με άρνηση που επιτρέπουν τη μονοσήμαντη επιλογή ενός μοντέλου Herbrand.

Επίσης, για να μπορέσουμε να αποδόσουμε σημασιολογία σε οποιοδήποτε λογικό πρόγραμμα θα στραφούμε σε μοντέλα Herbrand με 3 τιμές αλήθειας.

Έστω το παρακάτω πρόγραμμα P:

$$\begin{array}{l} even(0) \leftarrow \\ even(s(s(X))) \leftarrow even(X) \\ odd(X) \leftarrow \neg even(X) \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι στο παραπάνω πρόγραμμα το κατηγόρημα $even$ ορίζεται από ένα τμήμα του P στο οποίο δεν περιέχεται άρνηση. Συνεπώς, μπορούμε να βρούμε την ερμηνεία του $even$ στο M_P, χρησιμοποιώντας σημασιολογία ελάχιστου μοντέλου σε αυτό το τμήμα του προγράμματος.

Στη συνέχεια, θεωρώντας την ερμηνεία του $even$ στο M_P δεδομένη, μπορούμε να βρούμε την ερμηνεία του odd.

Η παραπάνω ιδέα σχηματισμού του μοντέλου M_P σε στάδια μπορεί να γενικευτεί για μια ευρεία κατηγορία προγραμμάτων.

Ορισμός 6.4 *Ένα λογικό πρόγραμμα με άρνηση P ονομάζεται διαστρωματωμένο αν είναι δυνατό να διαμερίσουμε το σύνολο των κατηγορημάτων που εμφανίζονται σε αυτό σε r σύνολα $S_0, S_1, \ldots, S_{r-1}$, έτσι ώστε για κάθε κανόνα:*

$$A \leftarrow B_1, \ldots, B_m, \neg C_1, \ldots, \neg C_n, \quad (m, n \geq 0)$$

του P, να ισχύουν τα παρακάτω

- *stratum(B_i) $\leq$ stratum(A) για $1 \leq i \leq m$*
- *stratum(C_j) $<$ stratum(A) για $1 \leq j \leq n$*

όπου stratum(Q) $= k$ *αν το σύμβολο κατηγορήματος του X ανήκει στο* S_k.

Ορισμός 6.5 *Το γράφημα εξαρτήσεων κατηγορημάτων* PDG_P *ενός λογικού προγράμματος με άρνηση* P *είναι ένα κατευθυνόμενο γράφημα με βρόχους στο οποίο:*

- *Το σύνολο κορυφών είναι το σύνολο των κατηγορημάτων που εμφανίζονται στο* P.
- *Υπάρχει ακμή από το* p *στο* q *αν υπάρχει κανόνας στον οποίο το* p *εμφανίζεται στην κεφαλή και το* q *στο σώμα.*
- *Η ακμή από το* p *στο* q *ονομάζεται αρνητική αν υπάρχει κανόνας στον οποίο το* p *εμφανίζεται στην κεφαλή και το* q *στο σώμα σε ένα άτομο με άρνηση.*

Θεώρημα 6.1 *Μπορούμε να διαπιστώσουμε αν ένα λογικό πρόγραμμα με άρνηση είναι διαστρωματωμένο σε πολυωνυμικό χρόνο.*

Απόδειξη: Ασκηση

Ορισμός 6.6 *Έστω* P *ένα λογικό πρόγραμμα και* J *μία ερμηνεία Herbrand. Ορίζουμε τον τελεστή* $[\Psi_P]_J$ *ως τη συνάρτηση από το* 2^{B_P} *στο* 2^{B_P} *με την ιδιότητα:*

$$[\Psi_P]_J(I) = \{A \mid A \leftarrow B_1, \ldots, B_m, \neg C_1, \ldots, \neg C_n \in ground(P)$$

$$\text{και } \{B_1, \ldots, B_m\} \subseteq I \cup J \text{ και } \{C_1, \ldots, C_n\} \cap J = \emptyset\}$$

Θεώρημα 6.2 *Έστω* P *ένα λογικό πρόγραμμα με άρνηση και* J *μία ερμηνεία Herbrand. Τότε ο τελεστής* $[\Psi_P]_J$ *είναι συνεχής.*

Απόδειξη: Ασκηση

Ορισμός 6.7 *Έστω* P *ένα διαστρωματωμένο λογικό πρόγραμμα με άρνηση,* $S_0, S_1, \ldots, S_{r-1}$ *τα σύνολα κατηγορημάτων που ορίζουν τη διαστρωμάτωση και έστω* P_i *το σύνολο προτάσεων του* P *που περιέχουν στην κεφαλή σύμβολο κατηγορήματος που ανήκει στο* S_i. *Η σημασιολογία του* P *περιγράφεται από το μοντέλο Herbrand* $M_P = M_r$ *όπου*

$$M_0 = \emptyset$$

$$M_{k+1} = M_k \cup [\Psi_{P_k}]_{M_k}^{\uparrow\omega}$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι η παραπάνω κατασκευή είναι ανεξάρτητη από τη συγκεκριμένη διαστρωμάτωση $S_0, S_1, \ldots, S_{r-1}$ που χρησιμοποιείται. Συνεπώς το M_P για διαστρωματωμένα προγράμματα είναι καλά ορισμένο.

Θεώρημα 6.3 *Έστω P ένα λογικό πρόγραμμα χωρίς άρνηση. Τότε το P είναι διαστρωματωμένο. Επιπλέον το μοντέλο M_P που σχηματίζεται με βάση το προηγούμενο ορισμό ταυτίζεται με το ελάχιστο Herbrand μοντέλο του P.*

Απόδειξη: Αφού το P δεν περιέχει άρνηση, μπορούμε να τοποθετήσουμε όλα τα κατηγορήματα σε ένα στρώμα S_0.

Συνεπώς $P_0 = P$.

Επίσης εύκολα προκύπτει ότι $[\Psi_P]_\emptyset = T_P$.

Αρα $M_1 = M_0 \cup [\Psi_{P_0}]_{M_0}^{\uparrow\omega} = [\Psi_P]_\emptyset^{\uparrow\omega} = T_P^{\uparrow\omega}$.

Παράδειγμα 6.10 *Έστω το παρακάτω πρόγραμμα P:*

$$\begin{array}{l} even(0) \leftarrow \\ even(s(X)) \leftarrow \neg even(X) \\ odd(X) \leftarrow \neg even(X) \end{array}$$

Το πρόγραμμα αυτό δεν είναι διαστρωματωμένο, αφού το κατηγόρημα $even$ εξαρτάται μέσω άρνησης από τον εαυτό του.

Για να ορίσουμε τη σημασιολογία προγραμμάτων όπως το παραπάνω, τοποθετούμε στα strata ατομικές προτάσεις χωρίς μεταβλητές αντί για κατηγορήματα.

Αν η αληθοτιμή της πρότασης $A \in B_P$ εξαρτάται από την αληθοτιμή της πρότασης $B \in B_P$, τότε η A δεν μπορεί να ανήκει σε χαμηλότερο stratum από τη B. Επιπλέον, αν η αληθοτιμή της πρότασης A εξαρτάται από την αληθοτιμή της πρότασης B μέσω άρνησης, τότε η B πρέπει να ανήκει σε χαμηλότερο stratum από τη A.

Για παράδειγμα, για το παραπάνω πρόγραμμα μπορούμε να διαμερίσουμε τη βάση Herbrand σε ένα άπειρο πλήθος από strata:

$$S_0 = \{even(0)\}$$

$$S_1 = \{odd(0), even(s(0))\}$$

$\ldots$

$S_i = \{odd(s^{i-1}(0)), even(s^i(0))\}$

$\ldots$

Για πιο σύνθετα προγράμματα, ενδέχεται να μην αρκεί οι δείκτες για τα strata να είναι ακέραιοι, αλλά να απαιτούνται άπειροι διατακτικοί.

Για παράδειγμα έστω το παρακάτω πρόγραμμα P:

$p(0) \leftarrow$
$p(s(X)) \leftarrow \neg p(X)$
$q(0) \leftarrow \neg p(X)$
$q(s(X)) \leftarrow \neg q(X)$

Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία της B_P που σχηματίζονται μέ το κατηγόρημα p πρέπει να τοποθετηθούν σε χωρίστά strata.

Συνεπώς πριν από το stratum που θα περιέχει το $q(0)$ θα πρέπει να προηγούνται άπειρα strata. Αυτό είναι αδύνατο αν το $q(0)$ ανήκει στο S_i για i ακέραιο.

Μπορούμε να διαμερίσουμε τη βάση Herbrand με τον παρακάτω τρόπο:

$S_0 = \{p(0)\}$

$\ldots$

$S_i = \{p(s^i(0))\}$

$\ldots$

$S_\omega = \{q(0)\}$

$\ldots$

$S_{\omega+i} = \{q(s^i(0))\}$

Ορισμός 6.8 *Ένα λογικό πρόγραμμα με άρνηση P ονομάζεται τοπικά διαστρωματωμένο αν είναι δυνατό να διαμερίσουμε τη βάση Herbrand του στα σύνολα $S_0, S_1, \ldots, S_\alpha, \ldots$, όπου $\alpha < \gamma$ και γ ένας αριθμήσιμος διατακτικός, έτσι ώστε για κάθε στιγμιότυπο χωρίς μεταβλητές:*

$$A \leftarrow B_1, \ldots, B_m, \neg C_1, \ldots, \neg C_n$$

ενός κανόνα του P να ισχύουν τα παρακάτω

- *stratum(B_i) $\leq$ stratum(A) για $1 \leq i \leq m$*
- *stratum(C_j) $<$ stratum(A) για $1 \leq i \leq n$*

όπου stratum(Q) $= a$ αν $Q \in S_a$.

Ορισμός 6.9 *Το γράφημα εξαρτήσεων DG_P ενός λογικού προγράμματος με άρνηση P είναι ένα άπειρο κατευθυνόμενο γράφημα με βρόχους στο οποίο:*

- *Το σύνολο κορυφών είναι η βάση Herbrand του P.*
- *Υπάρχει ακμή από το A στο B αν υπάρχει στιγμιότυπο χωρίς μεταβλητές ενός κανόνα του P, του οποίου η κεφαλή είναι A και το σώμα περιέχει το B ή το $\neg B$.*
- *Η ακμή από το A στο B ονομάζεται αρνητική αν υπάρχει στιγμιότυπο χωρίς μεταβλητές ενός κανόνα του P, του οποίου η κεφαλή είναι A και το σώμα περιέχει το $\neg B$.*

Θεώρημα 6.4 *Ένα λογικό πρόγραμμα με άρνηση είναι τοπικά διαστρωματωμένο αν και μόνο αν το γράφημα εξαρτήσεών του δεν περιέχει (άπειρη) διαδρομή η οποία να περνάει από άπειρο πλήθος αρνητικών ακμών.*

Ορισμός 6.10 *Έστω P ένα λογικό πρόγραμμα με άρνηση. Ορίζουμε τη σχέση προτεραιότητας $\sqsubset_P$ επί της βάσης Herbrand του P, έτσι ώστε $A \sqsubset_P B$ αν υπάρχει κατευθυνόμενο μονοπάτι από την A στην B στο γράφημα DG_P το οποίο να περνάει από τουλάχιστον μία αρνητική ακμή.*

Θεώρημα 6.5 *Ένα λογικό πρόγραμμα με άρνηση είναι τοπικά διαστρωματωμένο αν και μόνο αν*

- *Η σχέση $\sqsubset_P$ είναι ασύμμετρη*

- *Δεν υπάρχει άπειρη ακολουθία ατομικών προτάσεων χωρίς μεταβλητές $A_1, A_2, A_3 \dots$ τέτοια ώστε $A_1 \sqsubset_P A_2 \sqsubset_P A_3 \sqsubset_P \dots$*

Θεώρημα 6.6 *Το να αποφασίσουμε αν ένα λογικό πρόγραμμα με άρνηση P είναι τοπικά διαστρωματωμένο είναι μη επιλυσιμο πρόβλημα.*

Ορισμός 6.11 *Έστω P ένα τοπικά διαστρωματωμένο λογικό πρόγραμμα με άρνηση και έστω $S_0, S_1, \dots, S_\alpha$, όπου $\alpha < \gamma$ τα σύνολα κατηγορημάτων που ορίζουν την τοπική διαστρωμάτωση. Η σημασιολογία του P περιγράφεται από το μοντέλο Herbrand $M_P = M_\gamma$ όπου*

$$M_0 = \emptyset$$

$$M_\alpha = [\Psi_P]^{\uparrow\omega}_{M_{\alpha-1}} \cap \bigcup_{\beta<\alpha} S_\beta \text{ αν } \alpha \text{ επόμενος διατακτικός}$$

$$M_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta \text{ αν } \alpha \text{ οριακός διατακτικός}$$

Όπως και στην περίπτωση της διαστρωμάτωσης, μπορεί να αποδειχθεί ότι η παραπάνω κατασκευή είναι ανεξάρτητη από τη συγκεκεριμένη τοπική διαστρωμάτωση που χρησιμοποιείται. Συνεπώς το M_P για διαστρωματωμένα προγράμματα είναι καλά ορισμένο.

Θεώρημα 6.7 *Αν ένα λογικό πρόγραμμα με άρνηση P είναι διαστρωματωμένο τότε είναι και τοπικά διαστρωματωμένο. Επίσης οι δύο κατασκευές που έχουν περιγραφεί δίνουν ακριβώς το ίδιο μοντέλο M_P.*

Ορισμός 6.12 *Έστω P ένα λογικό πρόγραμμα με άρνηση και M, N δύο διαφορετικά Herbrand μοντέλα του P. Λέμε ότι το N είναι προτιμότερο από το M (συμβολισμός $N << M$ αν για κάθε ατομική πρόταση $A \in N - M$, υπάρχει μία ατομική πρόταση $B \in M - N$ τέτοια ώστε $A \sqsubset_P B$.*

Ορισμός 6.13 *Έστω P ένα λογικό πρόγραμμα με άρνηση. Λέμε ότι το μοντέλο Herbrand M είναι τέλειο μοντέλο του P αν δεν υπάρχει μοντέλο Herbrand N του P τέτοιο ώστε $N << M$.*

Θεώρημα 6.8 *Κάθε τοπικά διαστρωματωμένο πρόγραμμα P έχει ένα μοναδικό τέλειο μοντέλο, το οποίο είναι προτιμότερο από κάθε Herbrand μοντέλο του P και ταυτίζεται με το M_P.*

Υπάρχουν προγράμματα τα οποία έχουν μοναδικό τέλειο μοντέλο, αλλά δεν είναι τοπικά διαστρωματωμένα. Η σημασιολογία αυτών των προγραμμάτων περιγράφεται από το μοναδικό τέλειο μοντέλο.

Ωστόσο υπάρχουν προγράμματα τα οποία έχουν προφανή σημασία, ωστόσο δεν έχουν τέλειο μοντέλο.

Παράδειγμα 6.11 *Έστω το παρακάτω πρόγραμμα P:*

$p(1,2) \leftarrow$
$q(X) \leftarrow p(X,Y), \neg q(Y)$

Για να καταλάβουμε τη σημασία του P σχηματίζουμε το $ground(P)$:

$p(1,2) \leftarrow$
$q(1) \leftarrow p(1,2), \neg q(2)$
$q(1) \leftarrow p(1,1), \neg q(1)$
$q(2) \leftarrow p(2,2), \neg q(2)$
$q(2) \leftarrow p(2,1), \neg q(1)$

Το πρόγραμμα εμφανώς δεν είναι τοπικά διαστρωματωμένο.

Το μοντέλο που περιγράφει τη σημασία του προγράμματος είναι το $M = \{p(1,2), q(1)\}$.

Αν θέσουμε $N = \{p(1,2), q(2)\}$, τότε ισχύει $N << M$. Συνεπώς το M δεν είναι τέλειο μοντέλο.

Το παραπάνω πρόγραμμα για την ακρίβεια δεν έχει τέλειο μοντέλο.

Ορισμός 6.14 *Έστω P ένα λογικό πρόγραμμα με άρνηση. 3-τιμη ερμηνεία Herbrand του P ονομάζεται μία συνάρτηση I από την βάση Herbrand B_P του P στο $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$.*

Το 1 αντιστοιχεί στο αληθές, το 0 στο ψευδές, ενώ το $\frac{1}{2}$ στο μη ορισμένο.

Ισοδύναμα μία 3-τιμη ερμηνεία Herbrand μπορεί να περιγραφεί ως ένα ζεύγος συνόλων (I_T, I_F) όπου

$$I_T = \{A \in B_P \mid I(A) = 1\}$$

$$I_F = \{A \in B_P \mid I(A) = 0\}$$

Αντίστροφα κάθε ζεύγος συνόλων (I_T, I_F) τέτοιο ώστε $I_T \subseteq B_P$, $I_F \subseteq B_P$ και $I_T \cap I_F \neq \emptyset$ ορίζει μία 3-τιμη ερμηνεία Herbrand.

Ορισμός 6.15 *Έστω P ένα λογικό πρόγραμμα με άρνηση και I μία 3-τιμη ερμηνεία Herbrand του P. Ορίζουμε την επέκταση $\hat{I}$ της I με τον παρακάτω τρόπο:*

- $\hat{I}(A) = I(A)$ *για κάθε* $A \in B_P$.
- $\hat{I}(\neg\phi) = 1 - \hat{I}(\phi)$ *για κάθε πρόταση* ϕ.
- $\hat{I}(\phi \wedge \psi) = \min(\hat{I}(\phi), \hat{I}(\psi))$ *για οποιεσδήποτε προτάσεις* ϕ, ψ.
- $\hat{I}(\phi \vee \psi) = \max(\hat{I}(\phi), \hat{I}(\psi))$ *για οποιεσδήποτε προτάσεις* ϕ, ψ.
- $\hat{I}(\phi \leftarrow \psi) = \begin{cases} 1 & \text{αν } \hat{I}(\phi) \geq \hat{I}(\psi) \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$ *για οποιεσδήποτε προτάσεις* ϕ, ψ.
- $\hat{I}(\forall x\ \phi) = \min\{\hat{I}(\phi^x_t) \mid t \in U_P\}$ *για κάθε πρόταση* ϕ *και μεταβλητή* x.
- $\hat{I}(\exists x\ \phi) = \max\{\hat{I}(\phi^x_t) \mid t \in U_P\}$ *για κάθε πρόταση* ϕ *και μεταβλητή* x.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε δύο μερικές διατάξεις επί του συνόλου $\mathcal{I}$ όλων των 3-τιμων ερμηνειών Herbrand.

Ορισμός 6.16 *Έστω I, J δύο 3-τιμες Herbrand ερμηνείες ενός προγράμματος P. Τότε $I \preceq J$ αν για κάθε $A \in B_P$ ισχύει $I(A) \leq J(A)$.*

Ορισμός 6.17 *Έστω I, J δύο 3-τιμες Herbrand ερμηνείες ενός προγράμματος P. Τότε $I \preceq_F J$ αν για κάθε $A \in B_P$ ισχύει $I(A) \in \{0,1\} \Rightarrow J(A) = I(A)$.*

Η $\preceq$ διατάσσει τις 3-τιμες ερμηνείες ως προς το βαθμό αλήθειας, ενώ η $\preceq_F$ ως προς το βαθμό πληροφορίας.

Το διατεταγμένο σύνολο $(\mathcal{I}, \preceq)$ είναι πλήρες δικτυωτό, με ελάχιστο στοιχείο την ερμηνεία $\perp$, με $\perp(A) = 0$ για κάθε $A \in B_P$ και μέγιστο στοιχείο την ερμηνεία $\top$, με $\top(A) = 1$ για κάθε $A \in B_P$.

Το διατεταγμένο σύνολο $(\mathcal{I}, \preceq_F)$ δεν είναι δικτυωτό, καθώς υπάρχουν ζεύγη 3-τιμων ερμηνειών τις οποίες δεν υπάρχει άνω φράγμα. Το $(\mathcal{I}, \preceq_F)$ έχει ελάχιστο στοιχείο την ερμηνεία $\perp_F$, με $\perp(A) = \frac{1}{2}$ για κάθε $A \in B_P$.

Ορισμός 6.18 *Έστω P ένα λογικό πρόγραμμα και J μία τρίτιμη ερμηνεία Herbrand. Ορίζουμε τον τελεστή $[\Theta_P]_J$ ως τη συνάρτηση από το $\mathcal{I}$ στο $\mathcal{I}$ τέτοια ώστε:*

- $[\Theta_P]_J(I)(A) = 1$ *αν υπάρχει* $A \leftarrow B_1, \ldots, B_m, \neg C_1, \ldots, \neg C_n \in ground(P)$ *τέτοιο ώστε* $I(B_i) = 1$ *για κάθε* i *και* $J(C_j) = 0$ *για κάθε* j.
- $[\Theta_P]_J(I)(A) = 0$ *αν για κάθε* $A \leftarrow B_1, \ldots, B_m, \neg C_1, \ldots, \neg C_n \in ground(P)$ *υπάρχει* i *ώστε* $I(B_i) = 0$ *είτε υπάρχει* j *ώστε* $J(C_j) = 1$.
- $[\Theta_P]_J(I)(A) = \frac{1}{2}$ *αλλιώς.*

Θεώρημα 6.9 *Έστω P ένα λογικό πρόγραμμα και J μία τρίτιμη ερμηνεία Herbrand. Τότε ο τελεστής $[\Theta_P]_J$ είναι συνεχής*

Ορισμός 6.19 *Συμβολίζουμε με $\Omega_P(J)$ το ελάχιστο σταθερό σημείο του $[\Theta_P]_J$ ως προς $\preceq$.*

Επειδή ο $[\Theta_P]_J$ είναι συνεχής ισχύει $\Omega_P(J) = [\Theta_P]_J^{\uparrow\omega}$, όπου $[\Theta_P]_J^{\uparrow 0} = \perp$.

Ορισμός 6.20 *Έστω P ένα λογικό πρόγραμμα με άρνηση. Ορίζουμε το $M_{P,\alpha}$ για κάθε διατακτικό α:*

$$M_{P,0} = \perp_F$$

$$M_{P,\alpha} = \Omega_P(M_{P,\alpha-1}) \text{ αν } \alpha \text{ επόμενος διατακτικός}$$

$$M_{P,\alpha} = lub_{\preceq_F}\{M_{P,\beta} \mid \beta < \alpha\} \text{ αν } \alpha \text{ οριακός διατακτικός}$$

Θεώρημα 6.10 *Έστω P ένα λογικό πρόγραμμα με άρνηση. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:*

- *Αν* $\alpha < \beta$ *τότε* $M_{P,\alpha} \preceq_F M_{P,\beta}$
- *Υπάρχει* γ *τέτοιο ώστε* $M_{P,\gamma+1} = M_{P,\gamma} = lfp_{\preceq_F}(\Omega_P)$.

Ορισμός 6.21 *Έστω P ένα λογικό πρόγραμμα με άρνηση. Η σημασιολογία του P ορίζεται από το ωελλ φουνδεδ μοντέλο του $M_P = lfp_{\preceq_F}(\Omega_P)$.*

Θεώρημα 6.11 *Έστω P ένα τοπικά διαστρωματωμένο λογικό πρόγραμμα με άρνηση. Τότε το ωελλ φουνδεδ μοντέλο του είναι 2-τιμο και ταυτίζεται με το μοναδικό τέλειο μοντέλο του.*

7 Προτασιακή Τροπική Λογική

Η προτασιακή τροπική λογική επεκτείνει την προτασιακή λογική με τον τελεστή $\Box$ (box). Μερικοί ενδεχόμενοι τρόποι ερμηνείας της πρότασης $\Box A$ είναι:

- Είναι γνωστό ότι αληθεύει η A
- Πιστεύεται ότι αληθεύει η A
- Η A θα αληθεύει σε κάθε μελλοντική στιγμή
- Η A θα αληθεύει την επόμενη χρονική στιγμή
- Η A θα αληθεύει μετά την εκτέλεση της επόμενης εντολής του προγράμματος
- Η A θα αληθεύει μετά την ολοκλήρωση του προγράμματος
- Η A θα αληθεύει μετά την κίνηση ενός παίκτη σε ένα παιχνίδι

7.1 Σύνταξη

Το αλφάβητο της προτασιακής τροπικής λογικής αποτελείται από:

- Ένα αριθμήσιμο πλήθος προτασιακών μεταβλητών
- Τους λογικούς συνδέσμους $\neg, \wedge, \vee$
- Τον τροπικό τελεστή $\Box$
- Τις παρνθέσεις (και)

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω αλφάβητο σχηματίζουμε τις προτάσεις της προτασιακής τροπικής λογικής.

Ορισμός 7.1 *Η έννοια της πρότασης (της προτασικής τροπικής λογικής) ορίζεται επαγωγικά:*

1. *Κάθε προτασιακή μεταβλητή είναι πρόταση.*
2. *Αν A και B είναι προτάσεις, τότε $(A \wedge B), (A \vee B)$ είναι επίσης προτάσεις.*
3. *Αν A είναι πρόταση, τότε $(\neg A), (\Box A)$ είναι επίσης προτάσεις.*

Θα χρησιμοποιούμε τις παρακάτω συντομογραφίες:

- $(A \to B) = (\neg(A \vee B))$
- $(A \leftrightarrow B) = ((A \to B) \wedge (B \to A))$
- $(\Diamond A) = (\neg(\Box(\neg A)))$

Για περιορισμό της χρήσης παρενθέσεων χρησιμοποιούμε κανόνες προτεραιότητας. Η προτεραιότητα των λογικών συνδέσμων - τελεστών φαίνεται παρακάτω σε φθίνουσα σειρά:

- $\Box$, $\Diamond$, $\neg$ (μέγιστη προτεραιότητα).
- $\wedge$
- $\vee$
- $\to$
- $\leftrightarrow$ (ελάχιστη προτεραιότητα).

7.2 Σημασιολογία

Ορισμός 7.2 *Πλαίσιο ονομάζεται ένα ζεύγος $\mathcal{F} = (W, R)$ όπου*

- *W είναι ένα μη κενό σύνολο κόσμων*
- *R είναι μία διμελής σχέση επί του W που ονομάζεται σχέση προσπελασιμότητας*

Ορισμός 7.3 *Μοντέλο ονομάζεται μία τριάδα $\mathcal{M} = (W, R, V)$ όπου*

- *(W, R) είναι ένα πλαίσιο.*
- *V είναι μία συνάρτηση από το σύνολο προτασιακών μεταβλητών Φ στο 2^W.*

Λέμε ότι το μοντέλο $\mathcal{M}$ είναι βασισμένο στο πλαισιο (W, R).

Αν $\mathcal{M} = (W, R, V)$ και w ένας κόσμος που ανήκει στο W γράφουμε $\mathcal{M}, w \models A$ για να δηλώσουμε ότι η πρόταση A είναι αληθής στον κόσμο w του μοντέλου $\mathcal{M}$. Σε αντίθετη περίπτωση γράφουμε $\mathcal{M}, w \not\models A$.

Ορισμός 7.4 *Έστω $\mathcal{M} = (W, R, V)$ μοντέλο και $w \in W$. Το $\mathcal{M}, w \models A$ ορίζεται αναδρομικά:*

- $\mathcal{M}, w \models X$, όπου X προτασιακή μεταβλητή, ανν $w \in V(X)$
- $\mathcal{M}, w \models \neg A$, ανν $\mathcal{M}, w \not\models \neg A$
- $\mathcal{M}, w \models A \wedge B$, ανν $\mathcal{M}, w \models A$ και $\mathcal{M}, w \models B$
- $\mathcal{M}, w \models A \vee B$, ανν $\mathcal{M}, w \models A$ ή $\mathcal{M}, w \models B$
- $\mathcal{M}, w \models \Box A$, ανν για κάθε $v \in W$, $(w, v) \in R$ συνεπάγεται $\mathcal{M}, v \models A$

Λήμμα 7.1 *$\mathcal{M}, w \models \Diamond A$, ανν υπάρχει $v \in W$ τέτοιο ώστε $(w, v) \in R$ και $\mathcal{M}, v \models A$.*

Απόδειξη:
$\mathcal{M}, w \models \Diamond A$
ανν $\mathcal{M}, w \models \neg\Box\neg A$
ανν $\mathcal{M}, w \not\models \Box\neg A$
ανν δεν ισχύει ότι για κάθε $v \in W$, $(w, v) \in R$ συνεπάγεται $\mathcal{M}, v \models \neg A$
ανν υπάρχει $v \in W$ τέτοιο ώστε $(w, v) \in R$ και $\mathcal{M}, v \not\models \neg A$
ανν υπάρχει $v \in W$ τέτοιο ώστε $(w, v) \in R$ και $\mathcal{M}, v \models A$

Ορισμός 7.5 *Η πρόταση A λέγεται ικανοποιήσιμη αν υπάρχει μοντέλο $\mathcal{M} = (W, R, V)$ τέτοιο ώστε $\mathcal{M}, w \models A$, για κάποιο $w \in W$.*

Ορισμός 7.6 *Λέμε ότι η πρόταση A αληθεύει στο μοντέλο $\mathcal{M} = (W, R, V)$ και γράφουμε $\mathcal{M} \models A$ αν για κάθε $w \in W$ ισχύει $\mathcal{M}, w \models A$.*

Ορισμός 7.7 *Λέμε ότι η πρόταση A είναι έγκυρη στο πλαίσιο $\mathcal{F} = (W, R)$ και γράφουμε $\mathcal{F} \models A$ αν για κάθε μοντέλο $\mathcal{M}$ που είναι βασισμένο στο πλαίσιο $\mathcal{F}$ ισχύει $\mathcal{M} \models A$.*

Ορισμός 7.8 *Έστω $\mathcal{C}$ μία κλάση πλαισίων. Λέμε ότι η πρόταση A είναι έγκυρη στην κλάση $\mathcal{C}$ αν για κάθε πλαίσιο $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ ισχύει $\mathcal{F} \models A$.*

Ορισμός 7.9 *Λέμε ότι η πρόταση A ορίζει (ή χαρακτηρίζει) την κλάση πλαισίων $\mathcal{C}$ αν $\mathcal{F} \models A$ ισοδυναμεί $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$.*

Θεώρημα 7.1 *Η πρόταση $\Box X \to X$, ορίζει την κλάση των πλαισίων με ανακλαστική σχέση προσπελασιμότητας.*

Απόδειξη: Για τη μία κατεύθυνση, έστω $\mathcal{F} = (W, R)$ πλαίσιο όπου R ανακλαστική σχέση.

Έστω $\mathcal{M}$ μοντέλο βασισμένο στο $\mathcal{F}$ και κόσμος $w \in W$.

Περίπτωση 1η: $\mathcal{M}, w \not\models \Box X$. Τότε προφανώς $\mathcal{M}, w \models \Box X \to X$.

Περίπτωση 2η: $\mathcal{M}, w \models \Box X$. Τότε για κάθε $v \in W$, $(w, v) \in R$ συνεπάγεται $\mathcal{M}, v \models X$. Επειδή η R είναι ανακλαστική, ισχύει $(w, w) \in R$. Συνεπώς $\mathcal{M}, w \models X$ που συνπάγεται $\mathcal{M}, w \models \Box X \to X$.

Αρα για κάθε μοντέλο $\mathcal{M}$ βασισμένο στο $\mathcal{F}$ και κάθε κόσμο $w \in W$ ισχύει $\mathcal{M}, w \models \Box X \to X$, που συνεπάγεται $\mathcal{F} \models \Box X \to X$.

Για τη αντίστροφη κατεύθυνση, έστω $\mathcal{F} = (W, R)$ πλαίσιο όπου R δεν είναι ανακλαστική σχέση. Τότε υπάρχει ένα κόσμος w τέτοιος ώστε $(w, w) \notin R$.

Ορίζουμε μοντέλο $\mathcal{M} = (W, R, V)$, τέτοιο ώστε $V(X) = W - \{w\}$.

Επειδή $(w, w) \notin R$, αν $(w, v) \in R$ τότε $v \in W - \{w\}$, άρα $v \in V(X)$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $v \in W$ αν $(w, v) \in R$ τότε $\mathcal{M}, v \models X$, που συνεπάγεται $\mathcal{M}, w \models \Box X$.

Επειδή $w \notin V(X)$ έχουμε $\mathcal{M}, w \not\models X$.

Από τα παραπάνω έχουμε ότι $\mathcal{M}, w \not\models \Box X \to X$ που συνεπάγεται $\mathcal{F} \not\models \Box X \to X$.

Ορισμός 7.10 *Μία σχέση R επί ενός συνόλου W ονομάζεται σειριακή αν για κάθε $x \in W$ υπάρχει $y \in W$ τέτοιο ώστε $(x, y) \in R$.*

Θεώρημα 7.2 *Η πρόταση $\Box X \to \Diamond X$, ορίζει την κλάση των πλαισίων με σειριακή σχέση προσπελασιμότητας.*

Απόδειξη: Για τη μία κατεύθυνση, έστω $\mathcal{F} = (W, R)$ πλαίσιο όπου R σειριακή σχέση.

Έστω $\mathcal{M}$ μοντέλο βασισμένο στο $\mathcal{F}$ και κόσμος $w \in W$.

Περίπτωση 1η: $\mathcal{M}, w \not\models \Box X$. Τότε προφανώς $\mathcal{M}, w \models \Box X \to \Diamond X$.

Περίπτωση 2η: $\mathcal{M}, w \models \Box X$. Επειδή η R είναι σειριακή, υπάρχει v τέτοιο ώστε $(w, v) \in R$. Επειδή $\mathcal{M}, w \models \Box X$ θα πρέπει $\mathcal{M}, v \models X$. Αυτό συνεπάγεται ότι $\mathcal{M}, w \models \Diamond X$ και άρα $\mathcal{M}, w \models \Box X \to \Diamond X$.

Αρα για κάθε μοντέλο $\mathcal{M}$ βασισμένο στο $\mathcal{F}$ και κάθε κόσμο $w \in W$ ισχύει $\mathcal{M}, w \models \Box X \to \Diamond X$, που συνεπάγεται $\mathcal{F} \models \Box X \to \Diamond X$.

Για τη αντίστροφη κατεύθυνση, έστω $\mathcal{F} = (W, R)$ πλαίσιο όπου R δεν είναι σειρική σχέση. Τότε υπάρχει κόσμος w τέτοιος ώστε για κάθε $v \in W$ να ισχύει $(w, v) \notin R$.

Έστω το μοντέλο $\mathcal{M} = (W, R, V)$ για αυθαίρετα επιλεγμένο V. Τότε $\mathcal{M}, w \models \Box X$ και $\mathcal{M}, w \not\models \Diamond X$. Συνεπώς $\mathcal{M}, w \not\models \Box X \to \Diamond X$ που συνεπάγεται $\mathcal{F} \not\models \Box X \to \Diamond X$.

Θεώρημα 7.3 *Η πρόταση $\Box X \to \Box\Box X$, ορίζει την κλάση των πλαισίων με μεταβατική σχέση προσπελασιμότητας.*

Απόδειξη: Για τη μία κατεύθυνση, έστω $\mathcal{F} = (W, R)$ πλαίσιο όπου R μεταβατική σχέση.

Έστω $\mathcal{M}$ μοντέλο βασισμένο στο $\mathcal{F}$ και κόσμος $w \in W$.

Περίπτωση 1η: $\mathcal{M}, w \not\models \Box X$. Τότε προφανώς $\mathcal{M}, w \models \Box X \to \Box\Box X$.

Περίπτωση 2η: $\mathcal{M}, w \models \Box X$. Θα δείξουμε ότι $\mathcal{M}, w \models \Box\Box X$.

Αρκεί να δείξω ότι για κάθε $v \in W$, $(w, v) \in R$ συνεπάγεται $\mathcal{M}, v \models \Box X$

ή ισοδύναμα ότι

για κάθε $v, u \in W$, $(w, v) \in R$ και $(v, u) \in R$ συνεπάγεται $\mathcal{M}, u \models X$.

Έστω δύο κόσμοι u, v τέτοιοι ώστε $(w, v) \in R$ και $(v, u) \in R$. Επειδή η R είναι μεταβατική έχουμε $(w, u) \in R$ και επειδή $\mathcal{M}, w \models \Box X$ πρέπει $\mathcal{M}, u \models X$.

Αρα πράγματι αν $v, u \in W$, $(w, v) \in R$ και $(v, u) \in R$ τότε $\mathcal{M}, u \models X$. Συνεπώς $\mathcal{M}, w \models \Box X \to \Box\Box X$.

Αρα για κάθε μοντέλο $\mathcal{M}$ βασισμένο στο $\mathcal{F}$ και κάθε κόσμο $w \in W$ ισχύει $\mathcal{M}, w \models \Box X \to \Box\Box X$, που συνεπάγεται $\mathcal{F} \models \Box X \to \Box\Box X$.

Για τη αντίστροφη κατεύθυνση, έστω $\mathcal{F} = (W, R)$ πλαίσιο όπου R δεν είναι μεταβατική σχέση. Τότε υπάρχουν κόσμοι w, v, u τέτοιοι ώστε $(w, v) \in R$, $(v, u) \in R$ και $(w, u) \notin R$.

Ορίζουμε μοντέλο $\mathcal{M} = (W, R, V)$, τέτοιο ώστε $V(X) = W - \{u\}$.

Επειδή $(w, u) \notin R$, αν $(w, x) \in R$ τότε $x \in W - \{u\}$, άρα $x \in V(X)$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $x \in W$ αν $(w, x) \in R$ τότε $\mathcal{M}, x \models X$, που συνεπάγεται $\mathcal{M}, w \models \Box X$.

Επειδή $u \notin V(X)$ έχουμε $\mathcal{M}, u \not\models X$. Επειδή $(v, u) \in R$, το παραπάνω συνεπάγεται ότι $\mathcal{M}, v \not\models \Box X$. Επειδή $(w, v) \in R$, το το τελευταίο συνεπάγεται ότι $\mathcal{M}, w \not\models \Box\Box X$.

Από τα παραπάνω έχουμε ότι $\mathcal{M}, w \not\models \Box X \to \Box\Box X$ που συνεπάγεται $\mathcal{F} \not\models \Box X \to \Box\Box X$.

Συνεπώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την τροπική λογική για να ορίσουμε ιδιότητες σχέσεων.

Το ίδιο μπορούμε να κάνουμε χρησιμοποιώντας προτάσεις της πρωτοβάθμιας λογικής. Για παράδειγμα οι ανακλαστικές, σειριακές και μεταβατικές σχέσεις μπορούν να οριστούν αντίστοιχα από τις παρακάτω προτάσεις:

- $\forall x \; R(x, x)$
- $\forall x \exists y \; R(x, y)$
- $\forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z) \to R(x, z))$

Ένα σημαντικό ερώτημα είναι το ποιές ιδιότητες μπορούμε να ορίσουμε χρησιμοποιώντας προτάσεις της προτασιακής τροπικής λογικής και ποια η σχέση τους με τις ιδιότητες που μπορούμε να ορίσουμε χρησιμοποιώντας προτάσεις της προτασιακής τροπικής λογικής.

Ορισμός 7.11 *Έστω $\mathcal{M}_1 = (W_1, R_1, V_1)$ και $\mathcal{M}_2 = (W_2, R_2, V_2)$ μοντέλα και έστω f συνάρτηση από το W_1 στο W_2. Η f ονομάζεται p-μορφισμός από το $\mathcal{M}_1$ στο $\mathcal{M}_2$ αν ισχύουν τα παρακάτω:*

- $(w, v) \in R_1$ *συνεπάγεται* $(f(w), f(v)) \in R_2$
- $(f(w), u) \in R_2$ *συνεπάγεται* $\exists v\ ((w, v) \in R_1 \wedge f(v) = u)$
- $w \in V_1(X)$ *ανν* $f(w) \in V_2(X)$ *για κάθε προτασιακή μεταβλητή* X

Θεώρημα 7.4 *Έστω* $\mathcal{M}_1 = (W_1, R_1, V_1)$ *και* $\mathcal{M}_2 = (W_2, R_2, V_2)$ *μοντέλα και έστω* f *p-μορφισμός από το* $\mathcal{M}_1$ *στο* $\mathcal{M}_2$. *Τότε για κάθε πρόταση* A *και κάθε κόσμο* $w \in W_1$, *ισχύει*

$\mathcal{M}_1, w \models A$ ανν $\mathcal{M}_2, f(w) \models A$

Απόδειξη: Με επαγωγή στη δομή της A.

1. Αν A είναι μία προτασιακή μεταβλητή X τότε:
   $\mathcal{M}_1, w \models A$
   ανν $\mathcal{M}_1, w \models X$
   ανν $w \in V_1(X)$
   ανν $f(w) \in V_2(X)$ (από την τρίτη ιδιότητα του π-μορφισμού)
   ανν $\mathcal{M}_2, f(w) \models X$
   ανν $\mathcal{M}_2, f(w) \models A$

2. Αν $A = B \wedge C$ τότε:
   $\mathcal{M}_1, w \models A$
   ανν $\mathcal{M}_1, w \models B \wedge C$
   ανν $\mathcal{M}_1, w \models B$ και $\mathcal{M}_1, w \models C$
   ανν $\mathcal{M}_2, f(w) \models B$ και $\mathcal{M}_2, f(w) \models C$ (από επαγωγική υπόθεση)
   ανν $\mathcal{M}_2, f(w) \models B \wedge C$
   ανν $\mathcal{M}_2, f(w) \models A$

3. Αν $A = B \vee C$ όμοια.

4. Αν $A = \neg B$ τότε:
   $\mathcal{M}_1, w \models A$
   ανν $\mathcal{M}_1, w \models \neg B$
   ανν $\mathcal{M}_1, w \not\models B$
   ανν $\mathcal{M}_2, f(w) \not\models B$ (από επαγωγική υπόθεση)
   ανν $\mathcal{M}_2, f(w) \models \neg B$
   ανν $\mathcal{M}_2, f(w) \models A$

5. Έστω $A = \Box B$.

   Έστω ότι $\mathcal{M}_1, w \models A$ και έστω τυχαίος κόσμος u τέτοιος ώστε $(f(w), u) \in R_2$.

   Από την δεύτερη ιδιότητα του p-μορφισμού υπάρχει v τέτοιο ώστε $(w, v) \in R_1$ και $f(v) = u$.

   Επειδή $\mathcal{M}_1, w \models \Box B$, θα πρέπει $\mathcal{M}_1, v \models B$.

   Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε $\mathcal{M}_2, u \models B$.

   Συνεπώς για κάθε u τέτοιο ώστε $(f(w), u) \in R_2$, ισχύει $\mathcal{M}_2, u \models B$ που συνεπάγεται $\mathcal{M}_2, f(w) \models \Box B$.

   Αντίστροφα, έστω ότι $\mathcal{M}_2, f(w) \models A$ και έστω τυχαίος κόσμος v τέτοιος ώστε $(w, v) \in R_1$.

   Από την πρώτη ιδιότητα του p-μορφισμού $(f(w), f(v)) \in R_2$.

   Επειδή $\mathcal{M}_2, f(w) \models \Box B$, θα πρέπει $\mathcal{M}_2, f(v) \models B$.

   Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε $\mathcal{M}_1, v \models B$.

   Συνεπώς για κάθε v τέτοιο ώστε $(w, v) \in R_1$, ισχύει $\mathcal{M}_1, v \models B$ που συνεπάγεται $\mathcal{M}_1, w \models \Box B$.

Ορισμός 7.12 *Έστω $\mathcal{F}_1 = (W_1, R_1)$ και $\mathcal{F}_2 = (W_2, R_2)$ πλαίσια και έστω f συνάρτηση από το W_1 στο W_2. Η f ονομάζεται p-μορφισμός από το $\mathcal{F}_1$ στο $\mathcal{F}_2$ αν ισχύουν τα παρακάτω:*

- $(w, v) \in R_1$ *συνεπάγεται* $(f(w), f(v)) \in R_2$
- $(f(w), u) \in R_2$ *συνεπάγεται* $\exists v\ ((w, v) \in R_1 \wedge f(v) = u)$

Ορισμός 7.13 *Έστω $\mathcal{F}_1 = (W_1, R_1)$ και $\mathcal{F}_2 = (W_2, R_2)$ πλαίσια. Αν υπάρχει p-μορφισμός από το $\mathcal{F}_1$ στο $\mathcal{F}_2$ που να είναι επί του W_2 τότε το $\mathcal{F}_2$ ονομάζεται π-μορφικό είδωλο του $\mathcal{F}_1$.*

Θεώρημα 7.5 *Αν το $\mathcal{F}_2 = (W_2, R_2)$ είναι π-μορφικό είδωλο του $\mathcal{F}_1 = (W_1, R_1)$ τότε για κάθε πρόταση A ισχύει:*

$\mathcal{F}_1 \models A$ συνεπάγεται $\mathcal{F}_2 \models A$

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε τον ισοδύναμο ισχυρισμό

$\mathcal{F}_2 \not\models A$ συνεπάγεται $\mathcal{F}_1 \not\models A$

Έστω ότι $\mathcal{F}_2 \not\models A$. Τότε υπάρχει μοντέλο $\mathcal{M}_2 = (W_2, R_2, V_2)$, και κόσμος $w \in W_2$ τέτοια ώστε $\mathcal{M}_2, w \not\models A$.

Ορίζουμε μοντέλο $\mathcal{M}_1 = (W_1, R_1, V_1)$, θέτοντας:

$V_1(X) = \{v \mid f(v) \in V_2(X)\}$

για κάθε προτασιακή μεταβλητή X.

Η f είναι p-μορφισμός από το $\mathcal{M}_1$ στο $\mathcal{M}_2$. Επιπλέον επειδή η f είναι επί του W_2, υπάρχει u τέτοιο ώστε $f(u) = w$.

Από το προηγούμενο θεώρημα ισχύει $\mathcal{M}_1, u \not\models A$, που συνεπάγεται $\mathcal{F}_1 \not\models A$.

Θεώρημα 7.6 *Η δεν υπάρχει πρόταση της προτασιακής τροπικής λογικής που να ορίζει την κλάση των πλαισίων με ασύμμετρη σχέση προσπελασιμότητας.*

Απόδειξη: Έστω τα πλαίσια $\mathcal{F}_1 = (\mathbb{N}, \{(i, i+1) \mid i \in \mathbb{N}\})$ και $\mathcal{F}_2 = (\{0,1\}, \{(0,1), (1,0)\})$.

Παρατηρούμε ότι το πρώτο πλαίσιο έχει ασύμμετρη σχέση προσπελασιμότητας, ενώ το δεύτερο όχι.

Η συνάρτηση f από το $\mathbb{N}$ στο $\{0,1\}$ με $f(x) = x$ μοδ 2 είναι επί του $\{0,1\}$ και εύκολα προκύπτει ότι αποτελεί p-μορφισμό από το $\mathcal{F}_1$ στο $\mathcal{F}_2$.

Έστω ότι η πρόταση A της προτασιακής τροπικής λογικής ορίζει τη κλάση των ασύμμετρων πλαισίων. Τότε επειδή των $\mathcal{F}_1$ είναι ασύμμετρο πλαίσιο ισχύει $\mathcal{F}_1 \models A$.

Από το προηγούμενο θεώρημα όμως θα έπρεπε ισχύει επίσης $\mathcal{F}_2 \models A$. Αυτό είναι άτοπο γιατί το $\mathcal{F}_2$ δεν είναι ασύμμετρο πλαίσιο.

Αρα δεν υπάρχει πρόταση της προτασιακής τροπικής λογικής ορίζει τη κλάση των ασύμμετρων πλαισίων.

Οι ασύμμετρες σχέσεις ορίζονται στην πρωτοβάθμια λογική από την πρόταση $\forall x \forall y\ R(x, y) \rightarrow \neg R(x, y)$.

Θεώρημα 7.7 *Η πρόταση $\Box(\Box X \rightarrow X) \rightarrow \Box X$ ορίζει τα πλαίσια στα οποία η σχέση προσπελασιμότητας R έχει τις παρακάτω ιδιότητες:*

- *είναι μεταβατική*
- *δεν υπάρχει άπειρη ακολουθία κόσμων $w_0, w_1, \ldots, w_n, \ldots$ τέτοια ώστε για κάθε i να ισχύει $(w_i, w_{i+1}) \in R$.*

Απόδειξη: Έστω ότι η σχέση προσπελασιμότητας ενός πλαισίου $\mathcal{F} = (W, R)$ ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες.

Ας υποθέσουμε ότι $\mathcal{F} \not\models \Box(\Box X \rightarrow X) \rightarrow \Box X$. Συνεπώς υπάρχει μοντέλο $\mathcal{M} = (W, R, V)$ και κόσμος $w_0 \in W$ τέτοια ώστε $\mathcal{M}, w_0 \models \Box(\Box X \rightarrow X)$ και $\mathcal{M}, w_0 \not\models \Box X$.

Η δεύτερη σχέση συνεπάγεται οτί υπάρχει $w_1 \in W$ τέτοιος ώστε $(w_0, w_1) \in R$ και $\mathcal{M}, w_1 \not\models X$.

Επειδή $\mathcal{M}, w_0 \models \Box(\Box X \rightarrow X)$ και $(w_0, w_1) \in R$ θα πρέπει $\mathcal{M}, w_1 \models \Box X \rightarrow X$ και επειδή $\mathcal{M}, w_1 \not\models X$, θα πρέπει $\mathcal{M}, w_1 \not\models \Box X$.

Η τελευταία σχέση συνεπάγεται οτί υπάρχει $w_2 \in W$ τέτοιος ώστε $(w_1, w_2) \in R$ και $\mathcal{M}, w_2 \not\models X$.

Επιπλέον, λόγω της μεταβατικότητας της R, ισχύει $(w_0, w_2) \in R$.

Με το ίδιο σκεπτικό προκύπτει ότι υπάρχει $w_3 \in W$ τέτοιο ώστε $(w_2, w_3) \in R$, $w_4 \in W$ τέτοιο ώστε $(w_3, w_4) \in R$, κλπ.

Συνεπώς μπορούμε να σχηματίσουμε μια άπειρη αλυσίδα κόσμων ως προς την R, κάτι που αντικρούει την δεύτερη ιδιότητα της R. Αρα καταλήξαμε σε άτοπο.

Συνεπώς $\mathcal{F} \models \Box(\Box X \rightarrow X) \rightarrow \Box X$.

Αντίστροφα ας υποθέσουμε ότι η σχέση προσπελασιμότητας ενός πλαισίου $\mathcal{F} = (W, R)$ δεν ικανοποιεί κάποια από τις παραπάνω ιδιότητες.

Αν η R δεν είναι μεταβατική, τότε υπάρχουν κόσμοι w, v, u τέτοιοι ώστε $(w, v) \in R$, $(v, u) \in R$ και $(w, u) \notin R$. Ορίζουμε V τέτοια ώστε $V(X) = W - \{v, u\}$. Τότε $\mathcal{M}, w \not\models \Box(\Box X \to X) \to \Box X$.

Αν υπάρχουν άπειρες αλυσίδες κόσμων ως προς την R, τότε ορίζουμε V τέτοια ώστε $V(X) = W - S$, όπου S το σύνολο των κόσμων από τους οποίους ξεκινάει άπειρη αλυσίδα. Τότε για κάθε $w \in S$ ισχύει $\mathcal{M}, w \not\models \Box(\Box X \to X) \to \Box X$.

Μπορεί να αποδειχτεί ότι δεν υπάρχει πρόταση της πρωτοβάθμιας λογικής που να ορίζει τις σχέσεις που έχουν τις παραπάτω δύο ιδιότητες.

Συνεπώς:

- Υπάρχουν ιδιότητες σχέσεων που δεν ορίζονται από προτάσεις της πρωτοβάθμιας λογικής αλλα ορίζονται από προτάσεις της προτασιακής τροπικής λογικής.

- Υπάρχουν ιδιότητες σχέσεων που δεν ορίζονται από προτάσεις της προτασιακής τροπικής λογικής αλλα ορίζονται από προτάσεις της πρωτοβάθμιας λογικής.