Κατηγορηματική Λογική, μέρος 2ο

Βασίλης Κουντουριώτης

Λογική Συνεπαγωγή / Ισοδυναμία

Το M ικανοποιεί το Γ στο περιβάλλον s

$$\Updownarrow$$

Το M ικανοποιεί κάθε πρόταση του Γ στο s

Όπου:

Γ : σύνολο προτάσεων

M : μοντέλο

s : περιβάλλον

Λογική Συνεπαγωγή / Ισοδυναμία

$$\phi \equiv \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \phi \models \psi \\ \text{και} \\ \psi \models \phi \end{cases}$$

Παραδείγματα:

1. $\phi \vee \psi \equiv \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$
2. $\phi \rightarrow \psi \equiv \neg\phi \vee \psi$
3. $\neg\exists x \phi \equiv \forall x \neg\phi$
4. $\neg\forall x \phi \equiv \exists x \neg\phi$

Κανονική μορφή Prenex

$$Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \; \psi$$

Όπου:

$Q_i \in \{\exists, \forall\}$

x_i μεταβλητή

ψ πρόταση χωρίς ποσοδείκτες

Κάθε πρόταση ϕ μπορεί να μετασχηματιστεί σε κάποια λογικά ισοδύναμη ϕ' σε κανονική μορφή prenex

Κανονική μορφή Prenex

Χρήσιμες λογικές ισοδυναμίες για μετασχηματισμούς

1. $\phi \vee \psi \equiv \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$
2. $\phi \rightarrow \psi \equiv \neg(\phi \wedge \neg\psi)$
3. $\phi \leftrightarrow \psi \equiv \neg(\phi \wedge \neg\psi) \wedge \neg(\neg\phi \wedge \psi)$
4. $\phi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \phi$
5. Αν $\phi \equiv \psi$ τότε $\forall x\ \phi \equiv \forall x\ \psi$ και $\exists x\ \phi \equiv \exists x\ \psi$
6. $\neg\forall x\ \phi \equiv \exists x\ \neg\phi$
7. $\neg\exists x\ \phi \equiv \forall x\ \neg\phi$
8. Αν η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στην ϕ τότε $\phi \wedge \forall x\ \psi \equiv \forall x\ (\phi \wedge \psi)$
9. Αν η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στην ϕ τότε $\phi \wedge \exists x\ \psi \equiv \exists x\ (\phi \wedge \psi)$
10. $\forall x\ \phi \equiv \forall y\ \phi^x_y$
11. $\exists x\ \phi \equiv \exists y\ \phi^x_y$

Διαδικασία μετασχηματισμού σε κανονική μορφή Prenex

1. Απαλοίφουμε τους τελεστές $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ και $\vee$.
2. Έστω ϕ η πρόταση που απομένει (η οποία έχει μόνο $\wedge$ και $\neg$).
    - 2α. Φέρνουμε τους ποσοδείκτες στα αριστερά χρησιμοποιώντας τα 8 και 9.
    - 2β. Φέρνουμε τα $\neg$ δεξιά από τους ποσοδείκτες χρησιμοποιώντας τα 6 και 7
    - 2γ. Χρησιμοποιούμε τα 10 και 11 αν χρειάζεται να αλλάξουμε μεταβλητή.

Παράδειγμα

Να μετατραπεί σε κανονική μορφή Prenex η:

$$\phi = \forall y\ (\exists x\ p(x, y) \rightarrow \forall y\ q(y))$$

Ένα αποδεικτικό σύστημα

Ένα αποδεικτικό σύστημα είναι ένα σύνολο από αξιώματα μαζί με κανόνες απαγωγής

Αλφάβητο:

- ΔΕΝ περιλαμβάνει τα $\vee, \wedge, \leftrightarrow, \exists$

Αξιώματα:

- $\phi \to (\psi \to \phi)$
- $(\phi \to (\psi \to \omega)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \omega))$
- $(\neg\psi \to \neg\phi) \to ((\neg\psi \to \phi) \to \psi)$
- $\forall x\, \phi \to \phi^x_t$
- $(\forall x\, (\phi \to \psi)) \;\to\; (\phi \to \forall x\, \psi)$

Κανόνες Απαγωγής:

- $\dfrac{\phi \to \psi \quad \phi}{\psi}$ (Modus ponens)
- $\dfrac{\phi}{\forall x \phi}$ (Κανόνας Γενίκευσης)

Ορθότητα - Πληρότητα

- Το προηγούμενο αποδεικτικό σύστημα είναι ΟΡΘΟ:

$$\Gamma \vdash \phi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \models \phi$$

- Το προηγούμενο αποδεικτικό σύστημα είναι ΠΛΗΡΕΣ (Gödel):

$$\Gamma \models \phi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \phi$$

Παράδειγμα

Έστω $\Gamma = \{A, (A \rightarrow B), (B \rightarrow C)\}$ και $k = ((\neg D) \rightarrow C)$.
Να δείξετε ότι $\Gamma \models k$ και $\Gamma \vdash k$.

- Το $\Gamma \models k$ είναι προφανές.
- Θα δείξουμε το $\Gamma \vdash k$ ως εξής:

Παράδειγμα

Έστω $\Gamma = \{A, (A \rightarrow B), (B \rightarrow C)\}$ και $k = ((\neg D) \rightarrow C)$.
Να δείξετε ότι $\Gamma \models k$ και $\Gamma \vdash k$.

- Το $\Gamma \models k$ είναι προφανές.
- Θα δείξουμε το $\Gamma \vdash k$ ως εξής:
  1. A

Παράδειγμα

Έστω $\Gamma = \{A, (A \rightarrow B), (B \rightarrow C)\}$ και $k = ((\neg D) \rightarrow C)$.
Να δείξετε ότι $\Gamma \models k$ και $\Gamma \vdash k$.

- Το $\Gamma \models k$ είναι προφανές.
- Θα δείξουμε το $\Gamma \vdash k$ ως εξής:
  1. A
  2. $(A \rightarrow B)$

Παράδειγμα

Έστω $\Gamma = \{A, (A \rightarrow B), (B \rightarrow C)\}$ και $k = ((\neg D) \rightarrow C)$.
Να δείξετε ότι $\Gamma \models k$ και $\Gamma \vdash k$.

- Το $\Gamma \models k$ είναι προφανές.
- Θα δείξουμε το $\Gamma \vdash k$ ως εξής:
  1. A
  2. $(A \rightarrow B)$
  3. B (Modus ponens στα 1,2)

Παράδειγμα

Έστω $\Gamma = \{A, (A \longrightarrow B), (B \longrightarrow C)\}$ και $k = ((\neg D) \longrightarrow C)$.
Να δείξετε ότι $\Gamma \models k$ και $\Gamma \vdash k$.

- Το $\Gamma \models k$ είναι προφανές.
- Θα δείξουμε το $\Gamma \vdash k$ ως εξής:
  1. A
  2. $(A \longrightarrow B)$
  3. B (Modus ponens στα 1,2)
  4. $(B \longrightarrow C)$

Παράδειγμα

Έστω $\Gamma = \{A, (A \to B), (B \to C)\}$ και $k = ((\neg D) \to C)$.
Να δείξετε ότι $\Gamma \models k$ και $\Gamma \vdash k$.

- Το $\Gamma \models k$ είναι προφανές.
- Θα δείξουμε το $\Gamma \vdash k$ ως εξής:
  1. A
  2. $(A \to B)$
  3. B (Modus ponens στα 1,2)
  4. $(B \to C)$
  5. C (Modus ponens στα 3,4)

Παράδειγμα

Έστω $\Gamma = \{A, (A \rightarrow B), (B \rightarrow C)\}$ και $k = ((\neg D) \rightarrow C)$.
Να δείξετε ότι $\Gamma \models k$ και $\Gamma \vdash k$.

- Το $\Gamma \models k$ είναι προφανές.
- Θα δείξουμε το $\Gamma \vdash k$ ως εξής:

1.	A	
2.	$(A \rightarrow B)$	
3.	B	(Modus ponens στα 1,2)
4.	$(B \rightarrow C)$	
5.	C	(Modus ponens στα 3,4)
6.	$C \rightarrow ((\neg D) \rightarrow C)$	(Αξίωμα)

Παράδειγμα

Έστω $\Gamma = \{A, (A \rightarrow B), (B \rightarrow C)\}$ και $k = ((\neg D) \rightarrow C)$.
Να δείξετε ότι $\Gamma \models k$ και $\Gamma \vdash k$.

- Το $\Gamma \models k$ είναι προφανές.
- Θα δείξουμε το $\Gamma \vdash k$ ως εξής:

1.	A	
2.	$(A \rightarrow B)$	
3.	B	(Modus ponens στα 1,2)
4.	$(B \rightarrow C)$	
5.	C	(Modus ponens στα 3,4)
6.	$C \rightarrow ((\neg D) \rightarrow C)$	(Αξίωμα)
7.	$((\neg D) \rightarrow C)$	(Modus Ponens στα 5,6)