Θέμα 1: Το νησί των εντίμων και των απατεώνων

Υποθέτουμε ότι σε ένα νησί του οποίου οι κάτοικοι χωρίζονται σε δυο μέρη: στους έντιμους που λένε πάντα την αλήθεια και στους απατεώνες που λένε πάντα ψέματα.
Το πρόβλημα έχει ως εξής: φτάνοντας στο νησί αυτό συναντάμε δυο ανθρώπους, τους οποίους έστω ότι ονομάζουμε A και B. Ο A μας λέει ότι τουλάχιστον ένας από τους δυο τους (δηλαδή τουλάχιστον ένας από τους A και B) είναι απατεώνας. Τι μπορούμε να συμπεράνουμε για τους A και B;
Θέλουμε να απαντήσουμε στο ερώτημα χρησιμοποιώντας κατηγορηματική λογική.

1α.
Διατυπώστε σε κατηγορηματική λογική για ποιά πράγματα είμαστε σίγουροι πριν δούμε τον A. Το ότι «είμαστε σίγουροι» εννοείται ως «συμπερασματολογούμε με βάση γενικούς κανόνες» ή ως «έχουμε δεδομένα» και όχι ως «συμπερασματολογούμε με βάση τα δεδομένα».

1β.
Υποθέστε πως ο A λέει αλήθεια. Διατυπώστε σε κατηγορηματική λογική για ποιά πράγματα επιπλέον είμαστε σίγουροι.

1γ.
Υποθέστε πως ο A λέει ψέματα. Διατυπώστε σε κατηγορηματική λογική για ποιά πράγματα επιπλέον είμαστε σίγουροι.

1δ.
Αποφανθείτε για το αν ο A είναι έντιμος ή απατεώνας. Αποφανθείτε, επίσης, για τον B.

Απαντήσεις

1α.
Αν κάποιος είναι έντιμος (κατηγόρημα *E*) δε μπορεί να είναι απατεώνας (κατηγόρημα *A*) και αντίστροφα, δηλαδή:

$\forall x E(x) \Leftrightarrow \neg A(x)$, που σημαίνει $\forall x E(x) \Rightarrow \neg A(x)$ και $\forall x \neg A(x) \Rightarrow E(x)$

Οι εκφράσεις αυτές μετατρεπόμενες σε ΣΚΜ δίνουν:

$\neg E(x) \vee \neg A(x)$ (1)

και

$E(x) \vee A(x)$ (2)

Στο παραπάνω «συμπερασματολογούμε με βάση γενικούς κανόνες».

1β.
Αν ο *A* λέει αλήθεια, τότε ξέρουμε πως είναι έντιμος, δηλαδή:

$E(Person\_A)$ (3)

Επιπλέον, ένας από τους Α και Β είναι απατεώνας (προσοχή: δε συμπερασματολογούμε για το ποιός είναι απατεώνας!), δηλαδή:

$A(Person\_A) \vee A(Person\_B)$ (4)

Οι παραπάνω προτάσεις είναι ήδη και σε ΣΚΜ.

1γ.
Αν ο *A* λέει ψέματα, τότε ξέρουμε πως είναι απατεώνας, δηλαδή:

$\mathrm{A}(Person\_A)$ (5)

Επιπλέον, δεν ισχύει πως ένας από τους Α και Β είναι απατεώνας, δηλαδή:

$\neg(A(Person\_A) \vee A(Person\_B))$

Η παραπάνω πρόταση μεταγράφεται σε ΣΚΜ ως:

$\neg A(Person\_A)$ (6)

$\neg A(Person\_B)$ (7)

1δ.
Για να αποφανθούμε σε ποιά κατηγορία ανήκουν οι *A* και *B* θα πρέπει να πάρουμε ένα σύνολο προτάσεων που να αντικατοπτρίζουν τις γνώσεις μας για το πρόβλημα και να επιχειρηματολογήσουμε κατά πόσο το σύνολο αυτό είναι συνεπές ή ασυνεπές (σελίδα 94 τόμου ΤΝΕΣ, παράγραφος 4.4).
Στην περίπτωσή μας δύο είναι τα πιθανά σύνολα:

- {1, 2, 3, 4} αν υποθέσουμε πως ο *A* είναι έντιμος
- {1, 2, 5, 6, 7} αν υποθέσουμε πως ο *A* είναι απατεώνας

Αν δούμε το 2^{ο} σύνολο (και την απάντηση στο 1.γ) είναι εύκολο να δούμε πως οι προτάσεις 5 και 6 παράγουν απευθείας την κενή πρόταση και άρα το σύνολο που προκύπτει από την υπόθεση «ο *A* είναι απατεώνας» είναι ασυνεπές. Επομένως, συμπεραίνουμε πως ο *A* είναι έντιμος.
Στη συνέχεια:

- Με αναγωγή από τις 1 και 3 και με αντικατάσταση *x*/*A*, έχουμε:

  $\neg A(Person\_A)$ (8)

- Με αναγωγή από τις 4 και 8, έχουμε:

  $A(Person\_B)$ (8)

Άρα, ο *A* είναι έντιμος και ο *B* είναι απατεώνας.

Θέμα 2: Αναπαράσταση γνώσης και συλλογισμός

Ο Robbie είναι ένα ρομπότ που μεταφέρει και τοποθετεί διάφορα κιβώτια σε ένα συγκρότημα αποθηκών. Έστω οι προτάσεις *Κιβώτιο(χ)* και *Αποθηκευμένο(χ, ψ)* περιγράφουν την ιδιότητα ότι κάτι είναι κιβώτιο και τη σχέση ότι ένα κιβώτιο είναι αποθηκευμένο σε μία αποθήκη. Επίσης, η πρόταση *Μικρότερο(χ, ψ)* περιγράφει τη σχέση μεγέθους μεταξύ των κιβωτίων *χ* και *ψ*, η πρόταση *Πριν*(τ_1, τ_2) περιγράφει τη χρονική συσχέτιση των χρονικών στιγμών τ_1 και τ_2, και η πρόταση *Άφιξη(χ, τ)* περιγράφει τη χρονική στιγμή άφιξης του κιβωτίου *χ*.

2α.

Διατυπώστε σε κατηγορηματική λογική τους παρακάτω ισχυρισμούς:

i. Όλα τα κιβώτια της αποθήκης Α1 είναι μικρότερα από κάθε κιβώτιο που είναι αποθηκευμένο στην αποθήκη Α2

ii. Κάθε κιβώτιο της αποθήκης Α1 είναι μικρότερο από κάποιο (τουλάχιστον ένα) κιβώτιο της αποθήκης Α3

iii. Το κιβώτιο Κ1 αφίχθη πριν από το κιβώτιο Κ2

2β.

Έστω ότι ο Robbie γνωρίζει πως όλα τα κιβώτια της αποθήκης Α1 είναι μικρότερα από τα κιβώτια της αποθήκης Α2. Επίσης, γνωρίζει ότι το κιβώτιο Κ1 είναι είτε στην αποθήκη Α1 είτε στην αποθήκη Α2. Τέλος, γνωρίζει ότι το κιβώτιο Κ2 βρίσκεται στην αποθήκη Α1 και ότι δεν είναι μικρότερο του κιβωτίου Κ1. Χρησιμοποιώντας αναγωγή μέσω αντίκρουσης της αντίφασης αποδείξτε ότι το κιβώτιο Κ1 βρίσκεται στην αποθήκη Α1.

Απαντήσεις

2α.

i. Όλα τα κιβώτια της αποθήκης Α1 είναι μικρότερα από κάθε κιβώτιο που είναι αποθηκευμένο στην αποθήκη Α2

$$\forall x \forall y ((\text{Κ}\iota\beta\acute{\omega}\tau\iota o(x) \wedge \text{Κ}\iota\beta\acute{\omega}\tau\iota o(y) \wedge \text{Α}\pi o\theta\eta\kappa\varepsilon\upsilon\mu\acute{\varepsilon}\nu o(x, A1) \wedge \text{Α}\pi o\theta\eta\kappa\varepsilon\upsilon\mu\acute{\varepsilon}\nu o(y, A2)) \Rightarrow \mu\iota\kappa\rho\acute{o}\tau\varepsilon\rho o(x, y))$$

ii. Κάθε κιβώτιο της αποθήκης Α1 είναι μικρότερο από κάποιο (τουλάχιστον ένα) κιβώτιο της αποθήκης Α3

$$\forall x \exists y ((\text{Κ}\iota\beta\acute{\omega}\tau\iota o(x) \wedge \text{Κ}\iota\beta\acute{\omega}\tau\iota o(y) \wedge \text{Α}\pi o\theta\eta\kappa\varepsilon\upsilon\mu\acute{\varepsilon}\nu o(x, A1) \wedge \text{Α}\pi o\theta\eta\kappa\varepsilon\upsilon\mu\acute{\varepsilon}\nu o(y, A3)) \Rightarrow \mu\iota\kappa\rho\acute{o}\tau\varepsilon\rho o(x, y))$$

ή (αλλά όχι ακριβώς ίδια ...)

$$\forall x (\text{Κ}\iota\beta\acute{\omega}\tau\iota o(x) \wedge \text{Α}\pi o\theta\eta\kappa\varepsilon\upsilon\mu\acute{\varepsilon}\nu o(x, A1)) \Rightarrow \exists y (\text{Κ}\iota\beta\acute{\omega}\tau\iota o(y) \wedge \text{Α}\pi o\theta\eta\kappa\varepsilon\upsilon\mu\acute{\varepsilon}\nu o(y, A3) \wedge \mu\iota\kappa\rho\acute{o}\tau\varepsilon\rho o(x, y))$$

iii. Το κιβώτιο Κ1 αφίχθη πριν από το κιβώτιο Κ2

$$\text{Κ}\iota\beta\acute{\omega}\tau\iota o(K_1) \wedge \text{Κ}\iota\beta\acute{\omega}\tau\iota o(K_2) \wedge \text{Ά}\varphi\iota\xi\eta(K_1, T_1) \wedge \text{Ά}\varphi\iota\xi\eta(K_2, T_2) \wedge \Pi\rho\iota\nu(T_1, T_2)$$

ή

$$\exists t_1, t_2 (\text{Κ}\iota\beta\acute{\omega}\tau\iota o(K_1) \wedge \text{Κ}\iota\beta\acute{\omega}\tau\iota o(K_2) \wedge \text{Ά}\varphi\iota\xi\eta(K_1, t_1) \wedge \text{Ά}\varphi\iota\xi\eta(K_2, t_2) \wedge \Pi\rho\iota\nu(t_1, t_2))$$

2.β

Από την 2.α.i έχουμε

$$\neg \text{Κιβώτιο}(\chi) \vee \neg \text{Κιβώτιο}(\psi) \vee \neg \text{Αποθηκευμένο}(\chi, \text{A1}) \vee \neg \text{Αποθηκευμένο}(\psi, \text{A2}) \vee \text{Μικρότερο}(\chi, \psi)$$

Από τα δεδομένα που γνωρίζει ο Robbie έχουμε

$\text{Κιβώτιο}(\text{K1})$

$\text{Κιβώτιο}(\text{K2})$

$\text{Αποθηκευμένο}(\text{K1}, \text{A1}) \vee \text{Αποθηκευμένο}(\text{K1}, \text{A2})$

$\text{Αποθηκευμένο}(\text{K2}, \text{A1})$

$\neg \text{Μικρότερο}(\text{K2}, \text{K1})$

Έστω $\neg Αποθηκευμένο(\mathrm{K1},\mathrm{A1})$, τότε:

$\neg Αποθηκευμένο(\mathrm{K1},\mathrm{A1})$ $\quad$ $Αποθηκευμένο(\mathrm{K1},\mathrm{A1}) \vee Αποθηκευμένο(\mathrm{K1},\mathrm{A2})$

$Αποθηκευμένο(\mathrm{K1},\mathrm{A2})$ $\quad$ $\neg Κιβώτιο(\chi) \vee \neg Κιβώτιο(\psi) \vee \neg Αποθηκευμένο(\chi,\mathrm{A1}) \vee \neg Αποθηκευμένο(\psi,\mathrm{A2}) \vee Μικρότερο(\chi,\psi)$

$\{\mathrm{K1}/\psi\}$

$\neg Κιβώτιο(\chi) \vee \neg Κιβώτιο(\mathrm{K1}) \vee \neg Αποθηκευμένο(\chi,\mathrm{A1}) \vee Μικρότερο(\chi,\mathrm{K1})$ $\quad$ $Κιβώτιο(\mathrm{K1})$

$\neg Κιβώτιο(\chi) \vee \neg Αποθηκευμένο(\chi,\mathrm{A1}) \vee Μικρότερο(\chi,\mathrm{K1})$ $\quad$ $Κιβώτιο(\mathrm{K2})$

$\{\mathrm{K2}/\chi\}$

$\neg Αποθηκευμένο(\mathrm{K2},\mathrm{A1}) \vee Μικρότερο(\mathrm{K2},\mathrm{K1})$ $\quad$ $Αποθηκευμένο(\mathrm{K2},\mathrm{A1})$

$Μικρότερο(\mathrm{K2},\mathrm{K1})$ $\quad$ $\neg Μικρότερο(\mathrm{K2},\mathrm{K1})$

$\square$