# Μαθηματικά ΙΙ - 2η Σειρά Ασκήσεων

Δ. Βλάχος - Απρίλιος 2020

---

Οι ασκήσεις που δίνονται συνοδεύονται από ένα πλήρως λυμένο παράδειγμα και από άλυτες ασκήσεις για εξάσκηση με απάντηση. Όπου χρειαστεί, αναφέρονται και κάποια βασικά σημεία της θεωρίας.

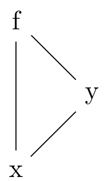
Πολλές φορές για ευκολία, η μερική παράγωγος $\partial g/\partial x$ συβολίζεται με $g_x$ και η $\partial^2 g/\partial x \partial y$ με $g_{xy}$.

---

1. Αν $pv^a = C$, όπου $a, C$ σταθερές, να βρείτε τις $dv/dp$ και $d^2v/dp^2$.

   Λύση:

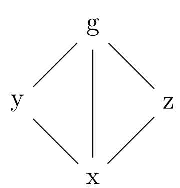
   Στην περίπτωση που έχουμε μια σχέση της μορφής $f(x,y) = 0$ και θέλουμε να βρούμε την παράγωγο $dy/dx$ αλλά δεν μπορούμε να λύσουμε τη σχέση ως προς $y$ για να παραγωγίσουμε, εργαζόμαστε ως εξής: Θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα

   Έτσι,

   $$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \implies \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}$$

   Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε και τη δεύτερη παράγωγο. Από την προηγούμενη παραγώγιση θα έχουμε μια σχέση της μορφής $g(x, y, dy/dx) = 0$ και αν θέσουμε $z = dy/dx$ θα είναι $g(x, y, z) = 0$. Θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα

   Έτσι,

   $$\frac{dg}{dx} = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{dz}{dx}$$

   Όμως $dz/dx = d^2yx^2$ και λύνοντας την προηγούμενη σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε τη δεύτερη παράγωγο του $y$ ως προς $x$. Η διαδικασία αυτή μπορεί να συνεχιστεί και για παραγώγους μεγαλύτερης τάξης. Στο παράδειγμά μας τώρα έχουμε:

   $$v^a + pav^{a-1}\frac{dv}{dp} = 0 \implies \frac{dv}{dp} = -\frac{v^a}{apv^{a-1}} \implies \frac{dv}{dp} = -\frac{v}{ap}$$

   Για να βρούμε τη δεύτερη παράγωγο, γράφουμε την προηγούμενη σχέση $z + \frac{v}{ap} = 0$. Έτσι

   $$z + \frac{v}{ap} = 0 \implies \frac{dz}{dp} + \frac{1}{ap}\frac{dv}{dp} - \frac{v}{ap^2} = 0 \implies \frac{dz}{dp} = \frac{d^2y}{dp^2} = \frac{v}{a^2p^2}(1+a)$$

2. Αν $ye^{xy} = sinx$ να βρεθούν οι $dy/dx$ και $d^2y/dx^2$ στο σημείο $(0,0)$.

   Απάντηση: $y' = 1$, $y'' = 0$

3. Αν $x^y = y^x$ να βρεθεί η $dy/dx$ στο σημείο $(2, 4)$.

   Απάντηση: $y' = 4(\ln 2 - 1)/(2\ln 2 - 1)$

4. Αν $xe^y = ye^x$ να βρεθούν οι $dy/dx$ και $d^2y/dx^2$ αν $y \neq 1$.

   Απάντηση: $y' = y(x-1)/[x(y-1)],\ y'' = (y-x)(x+y-2)y/[x^2(y-1)^3]$

5. Αν $xy^3 - yx^3 = 6$ είναι η εξίσωση μιας καμπύλης, να βρεθεί η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο $(1, 2)$ και να σχεδιαστεί με τη βοήθεια του υπολογιστή και η καμπύλη και η εφαπτομένη της.

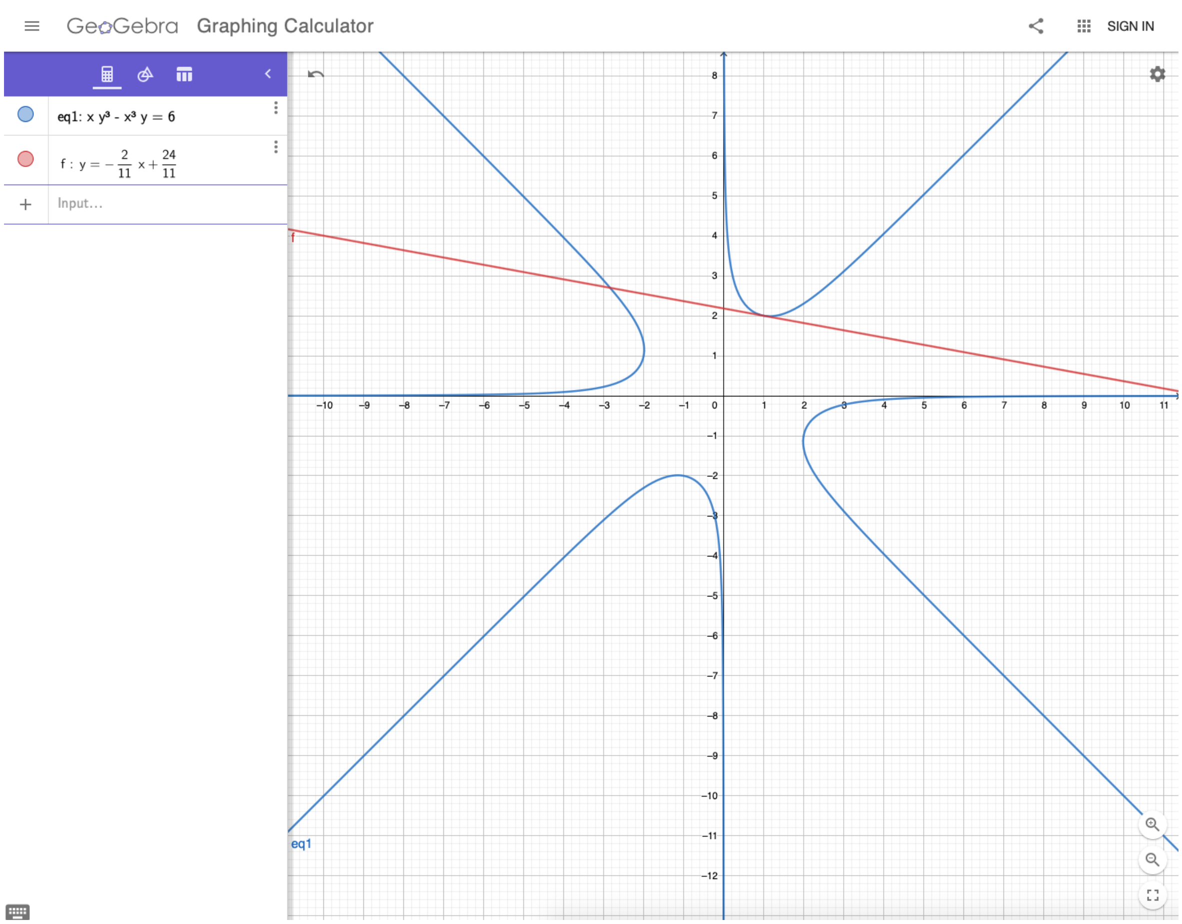
   Λύση:

   Η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης θα είναι η $dy/dx$. Έτσι:

$$y^3 + x3y^2y' - y'x^3 = 3yx^2 = 0 \implies y' = \frac{y^3 - 3yx^2}{x^3 - 3xy^2} \implies y'|_{x=1,y=2} = -\frac{2}{11}$$

   Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι $y = -2/11x + c$ όπου τη σταθερά $c$ θα την υπολογίσουμε από την απαίτηση η εφαπτομένη να περνά από το σημείο $(1, 2)$. Έτσι προκύπτει ότι $c = 24/11$. Η εφαπτομένη λοιπόν είναι η $y = -2/11x + 24/11$.

   Ένα από τα πιο δημοφιλή προγράμματα για χρήση γραφικών με τα μαθηματικά είναι το *GeoGebra*. Πηγαίνουμε λοιπόν στη διεύθυνση *https : //www.geogebra.org/graphing* και αφού δώσουμε τις εξισώσεις της καμπύλης και της εφαπτομένης, προκύπτει το παρακάτω σχήμα:




6. Στο προηγούμενο πρόβλημα να βρείτε την $d^2y/dx^2$ στο σημείο $(1, 2)$.

   Απάντηση: $1800/11^3$

7. Αν $y^3 - x^2y = 8$ είναι η εξίσωση μιας καμπύλης, να βρεθεί η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο $(3, -1)$ και να σχεδιαστεί με τη βοήθεια του υπολογιστή και η καμπύλη και η εφαπτομένη της.

   Απάντηση: $y' = 1, y = x - 4$

8. Στο προηγούμενο πρόβλημα να βρείτε την $d^2y/dx^2$ στο σημείο $(3, -1)$.

   Απάντηση: $-8/3$

9. Αν $xe^y + ye^x = 0$ είναι η εξίσωση μιας καμπύλης, να βρεθεί η εφαπτομένη της καμπύλης στην αρχή των αξόνων. Προσοχή! να θέσετε $x = y = 0$ αφού υπολογίσετε την παράγωγο. Να σχεδιαστεί με τη βοήθεια του υπολογιστή και η καμπύλη και η εφαπτομένη της.

   Απάντηση: $y' = -1, y = -x$

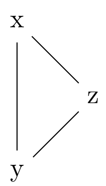
10. Στο προηγούμενο πρόβλημα να βρείτε την $d^2y/dx^2$ στην αρχή των αξόνων.

    Απάντηση: 4

11. Αν $x = yz$ και $y = 2sin(y + z)$ να βρεθούν οι $dx/dy$ και $d^2x/dy^2$.

    Λύση:

    Θεωρούμε το διάγραμμα:




Έτσι:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial z}\frac{dz}{dy} = z + y\frac{dz}{dy}$$

Για να υπολογίσουμε την $dz/dy$ παραγωγίζουμε τη δεύτερη εξίσωση ως προς $y$:

$$1 = 2cos(y + z)(1 + \frac{dz}{dy}) \implies$$
$$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{2cos(y + z)} - 1$$

και αντικαθιστώντας προκύπτει:

$$\frac{dx}{dy} = z - y + tan(y + z)$$

Τώρα μπορούμε να παραγωγίσουμε πάλι ως προς $y$:

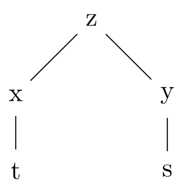
$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dy^2} &= \frac{dz}{dy} - 1 + sec^2(y + z)(1 + \frac{dz}{dy}) \\ &= \frac{1}{2}sec^3(y + z) + \frac{1}{2}sec(y + z) - 2 \end{aligned}$$

12. Αν $P = rcost$ και $rsint - 2te^r = 0$, να βρεθεί η $dP/dt$.

    Απάντηση: $(2e^r cost - r + r^2 sin^2 t)/[(1 - r)sint]$

13. Αν $z = xe^{-y}$ και $x = \cosh t,\ y = \cos s$, να βρεθούν οι $\partial z/\partial s$ και $\partial z/\partial t$.

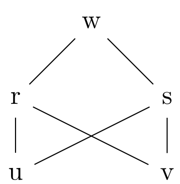
    Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το διάγραμμα:




Απάντηση: $\partial z/\partial s = z \sin s,\ \partial z/\partial t = e^{-y} \sinh t$

14. Αν $w = e^{-r^2-s^2}$ και $r = uvt,\ s = u + 2vs$, να βρεθούν οι $\partial w/\partial u$ και $\partial w/\partial v$.

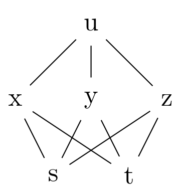
    Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το διάγραμμα:




Απάντηση: $\partial w/\partial u = -2(rv + s)w,\ \partial w/\partial v = -2(ru + 2s)w$

15. Αν $u = x^2y^3z$ και $x = sin(s + t),\ y = cos(s + t),\ z = e^{st}$, να βρεθούν οι $\partial u/\partial s$ και $\partial u/\partial t$.

    Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το διάγραμμα:




Απάντηση: $\partial u/\partial s = (2y^2 - 3x^2 + xyt)u/(xy),\ \partial u/\partial t = (2y^2 - 3x^2 + xys)u/(xy)$

16. Αν $w = f(x, y)$ και $x = r \cos\theta,\ y = r \sin\theta$ να βρείτε τις $\partial w/\partial r,\ \partial w/\partial \theta,\ \partial^2 w/\partial r^2$.

    Απάντηση: $\partial^2 w/\partial r^2 = f_{xx} \cos^2\theta + 2f_{xy} \cos\theta \sin\theta + f_{yy} \sin^2\theta$

17. Αν $xs^2 + yt^2 = 1,\ x^2s + y^2t = xy - 4$, να βρεθούν οι $\partial x/\partial s,\ \partial x/\partial t,\ \partial y/\partial s,\ \partial y/\partial t$ στο σημείο $(x, y, s, t) = (1, -3, 2, -1)$.

    Λύση:

    Παραγωγίζω αρχικά και τις 2 σχέσεις ως προς $s$:

$$\begin{aligned} x_s s^2 + 2xs + y_s t^2 &= 0 \\ 2xx_s s + 2yy_s t &= x_s y + xy_s \end{aligned}$$

    Για ευκολία, αντικαθιστώ τα $(x, y, s, t) = ((1, -3, 2, -1)$ και έχω:

$$\begin{aligned} 4x_s + y_s &= -4 \\ 7x_s + 5y_s &= -1 \end{aligned}$$

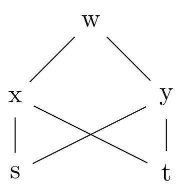
    Η λύση του συστήματος δίνει $x_s = -19/13,\ y_s = 24/13$. Όμοαι εργαζόμαστε παραγωγίζοντας ως προς $t$ και προκύπτει ότι $x_t = -21/13,\ y_t = 6/13$.

18. Αν $x^2 + y^2 = 2st - 10,\ 2xy = s^2 - t^2$, βρείτε τις $x_s, x_t, y_s, y_t$στο σημείο $(x, y, s, t) = (4, 2, 5, 3)$.

    Απάντηση: $x_s = 1/6,\ x_t = 13/6,\ y_s = 7/6,\ y_t = -11/6$

19. Αν $w = x + y$ με $x^3 + xy + y^3 = s,\ x^2y + xy^2 = t$ να βρείτε τις $w_s,\ w_t$.

Υπόδειξη: Εδώ θα χρησιμοποιήσετε το διάγραμμα:




αλλά τις παραγώγους $x_s, y_s, x_t, y_t$ θα τις βρείτε από ένα σύστημα όπως και στην προηγούμενη άσκηση.

Απάντηση: $w_s = w/(3w^3 - xy),\ w_t = (3w - 1)/(3w^3 - xy)$

20. Αν $u = x^2 + y^2 + xyz,\ x^4 + y^4 + z^4 = 2x^2y^2z^2 + 10$ να βρείτε τη $(\partial u/\partial x)_z$ στο σημείο $(x, y, z) = (2, 1, 1)$.

Υπόδειξη: Παραγωγίζοντας ως προς $x$, το $z$ πρέπει να το αντιμετωπίσετε σαν σταθερά.

Απάντηση: 13

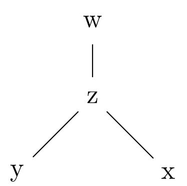
21. Αν $x^2 + y^2 + z^2 = 6,\ w^3 + z^3 = 5xy + 12$ να βρείτε τις ακόλουθες μερικές παραγώγους στο σημείο $(x, y, z, w) = (1, -2, 1, 1)$:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y,\ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_w,\ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x,\ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_w,\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_z,\ \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_z$$

Απάντηση: $-1, -15, 2, 15/7, -5/2, -6/5$

22. Αν $w = f(ax + by)$ να δείξετε ότι $bw_x - aw_y = 0$.

Υπόδειξη: Να θέσετε $z = ax + by$ και κάντε χρήση του διαγράμματος:




23. Οι ακόλουθοι τύποι βρίσκουν εφαρμογή στη Θερμοδυναμική.

- Αν $f(x, y, z) = 0$ να βρείτε τύπους για τις ακόλουθες παραγώγους:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z,\ \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z,\ \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x,\ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y,$$

- Να δείξετε ότι

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = 1$$

και

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

- Αν τα $x, y, z$ είναι συναρτήσεις του $t$, να δείξετε ότι

$$\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_x / \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_x$$

Λύση:

Όταν θεωρούμε ότι μια μεταβλητή $x$ είναι σταθερή, τότε $dx = 0$. Έτσι παίρνοντας το ολικό διαφορικό:

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

Αν $z$ σταθερό, τότε $dz = 0$ και

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = -\frac{f_x}{f_y}$$

Όμοια προκύπτει:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\frac{f_y}{f_x}$$
$$\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -\frac{f_z}{f_y}$$
$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -\frac{f_x}{f_z}$$

Επιπλέον, αν $x$ σταθερό, το ολικό διαφορικό γίνεται:

$$f_y \left(\frac{dy}{dt}\right)_x dt + f_z \left(\frac{dz}{dt}\right)_x dt = 0 \implies -\frac{f_z}{f_y} = \left(\frac{dy}{dt}\right)_x / \left(\frac{dz}{dt}\right)_x$$

24. Αν $f(x, y, z) = 0,\ g(x, y, z) = 0$ να βρείτε έναν τύπο για την $dy/dx$.

    Απάντηση: $dy/dx = -(f_x g_z - f_z g_x)/(f_y g_z - g_y f_z)$

25. Αν έχουμε τις συναρτήσεις $u(x, y),\ y(x, z)$ να δείξετε ότι:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z$$