Μαθηματικά ΙΙ - 4η Σειρά Ασκήσεων

Δ. Βλάχος - Απρίλιος 2020

Οι ασκήσεις που δίνονται συνοδεύονται από ένα πλήρως λυμένο παράδειγμα και από άλυτες ασκήσεις για εξάσκηση με απάντηση. Όπου χρειαστεί, αναφέρονται και κάποια βασικά σημεία της θεωρίας.

Πολλές φορές για ευκολία, η μερική παράγωγος $\partial g/\partial x$ συβολίζεται με g_x και η $\partial^2 g/\partial x \partial y$ με g_{xy}.

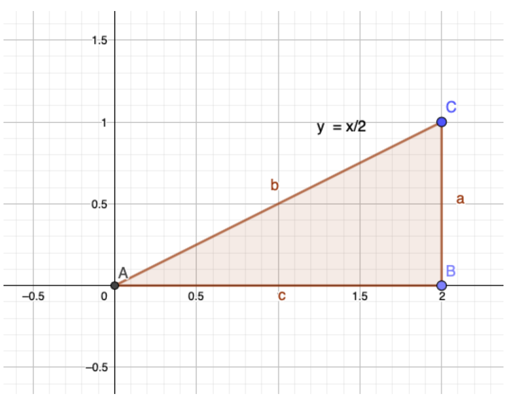
Για τις ασκήσεις 1 ως 6 να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα.

1. $\int_{x=0}^{1}\int_{y=2}^{4} 3xdydx$ - Απάντηση: 3
2. $\int_{y=-2}^{1}\int_{x=1}^{2} 8xydxdy$ - Απάντηση: -18
3. $\int_{y=0}^{2}\int_{x=2y}^{4} dxdy$ - Απάντηση: 4
4. $\int_{x=0}^{4}\int_{y=0}^{x/2} ydydx$ - Απάντηση: 8/3
5. $\int_{x=0}^{1}\int_{y=x}^{e^x} ydydx$ - Απάντηση: $e^2/4 - 5/12$
6. $\int_{y=1}^{2}\int_{x=\sqrt{y}}^{y^2} xdxdy$ - Απάντηση: 2.35

Για τις ασκήσεις 7 ως 18 να υπολογιστούν τα διπλά ολοκληρώματα πάνω στις περιοχές που περιγράφονται.

7. $\iint_A (2x-3y)dxdy$, A το τρίγωνο μεκορυφές $(0,0)$, $(2,1)$, $(2,0)$.

Λύση:



Μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα με δύο τρόπους:

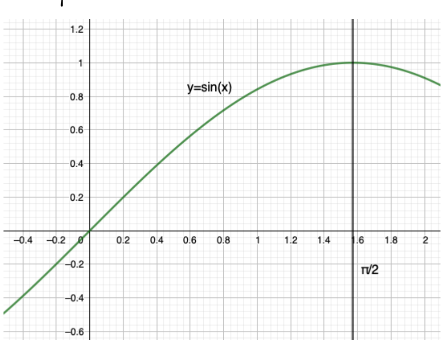
$$\int_0^2 dx \int_0^{x/2} (2x-3y)dy = \int_0^2 5x^2/8dx = 5/3$$

ή

$$\int_0^1 dy \int_{2y}^{2} (2x-3y)dx = \int_0^1 (2y^2-6y+4)dy = 5/3$$

8. $\iint_A 6y^2 \cos x dxdy$ όπου A το χωρίο που ορίζεται από την καμπύλη $y=\sin x$, τον άξονα x και την ευθεία $y=\pi/2$.

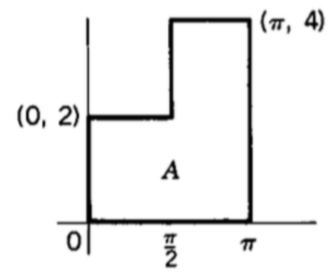
Λύση:



$$\begin{aligned}\iint_A 6y^2\cos x dxdy &= \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\sin x} 6y^2 \cos x dy \\ &= \int_0^{\pi/2} 2\sin^3 x \cos x dx \\ &= \int_0^1 2v^3 dv \\ &= 1/2\end{aligned}$$

9. $\iint_A \sin x dxdy$ όπου A το χωρίο του διπλανού σχήματος.
   - Απάντηση: 6

10. $\iint_A y dxdy$ όπου A το χωρίο του διπλανού σχήματος.
   - Απάντηση: 5π



11. $\iint_A x dxdy$ όπου A η περιοχή μεταξύ της παραβολής $y = x^2$ και της ευθείας $2x - y + 8 = 0$.
   - Απάντηση: 36

12. $\iint_A y dxdy$ όπου A το τρίγωνο μα κορυφές $(-1, 0),\ (0, 2),\ (2, 0)$.
   - Απάντηση: 2

13. $\iint_A 2xy dxdy$ όπου A το τρίγωνο μα κορυφές $(0, 0),\ (2, 1),\ (3, 0)$.
   - Απάντηση: $7/4$

14. $\iint_A x^2 e^{x^2 y} dxdy$ όπου A η περιοχή που περικλείεται από τις $y = 1/x,\ y = 1/x^2,\ x = \ln 4$.
   - Απάντηση: $4 - e \cdot \ln 4$

15. $\iint_A dxdy$ όπου A η περιοχή που περικλείεται από τις $y = \ln x,\ y = e + 1 - x, y = 0$.
   - Απάντηση: $3/2$

16. $\iint_A (9 + 2y^2)^{-1} dxdy$ όπου A το τετράπλευρο μα κορυφές $(1, 3),\ (3, 3),\ (2, 6),\ (6, 6)$.
   - Απάντηση: $(\ln 3)/6$

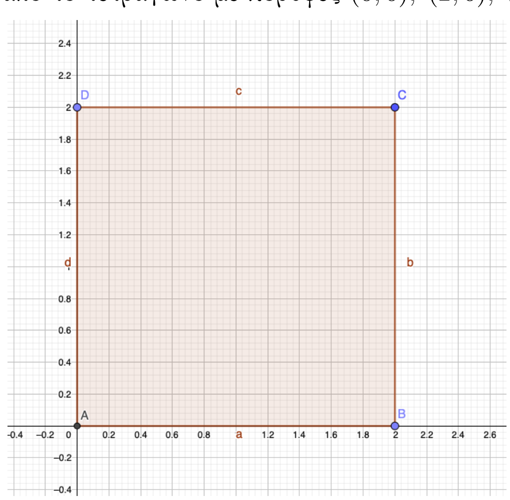
17. $\iint_A (x/y) dxdy$ όπου A το τρίγωνο μα κορυφές $(0, 0),\ (1, 1),\ (1, 2)$.
   - Απάντηση: $(\ln 2)2$

18. $\iint_A y^{-1/2} dxdy$ όπου A η περιοχή που περικλείεται από τις $y = x^2,\ x + y = 2,\ x = 0$.
   - Απάντηση: $(8\sqrt{2} - 7)/3$

Για τις ασκήσεις 19 ως 24 να υπολογίσετε τον όγκο των ζητούμενων περιοχών με διπλό ολοκλήρωμα.

19. Πάνω από το τετράγωνο με κορυφές $(0, 0),\ (2, 0),\ (0, 2),\ (2, 2)$ και κάτω απόμ το επίπεδο $z = 8 - x + y$.

Λύση:



$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^2 dx \int_0^2 (8 - x + y) dy \\
&= \int_0^2 (18 - 2x) dx \\
&= 32
\end{aligned}
$$

20. Πάνω από το τετράγωνο με κορυφές $(0,0),\ (0,1),\ (2,0),\ (2,1)$ και κάτω από την επιφάνεια $z^2 = 36x^2(4-x^2)$.

    - Απάντηση: 16

21. Πάνω από το τρίγωνο με κορυφές $(0,0),\ (2,0),\ (2,1)$ και κάτω από την επιφάνεια $z = 24 - x^2 - y^2$.

    - Απάντηση: 131/6

22. Πάνω από το τρίγωνο με κορυφές $(0,2),\ (1,1),\ (2,2)$ και κάτω από την επιφάνεια $z = xy$.

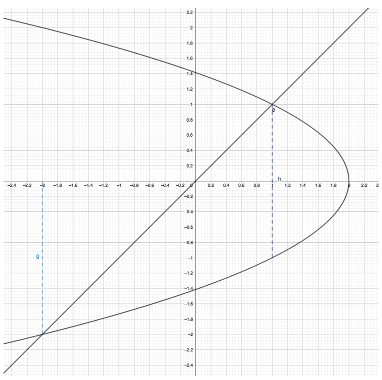
    - Απάντηση: 5/3

23. Κάτω από την επιφάνεια $z = y(x+2)$ και πάνω από την περιοχή που περικλείεται από τις $x + y = 0,\ y = 1,\ y = \sqrt{x}$.

    - Απάντηση: 9/8

24. Κάτω από την επιφάνεια $z = 1/(y+2)$ και πάνω από την περιοχή που περικλείεται από τις $y = x,\ y^2+x = 2$.

    Λύση:

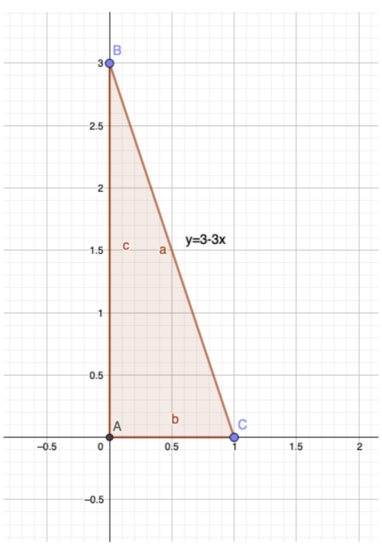


$$\begin{aligned} V &= \int_{-2}^{1} dy \int_{y}^{2-y^2} 1/(y+2)dx \\ &= \int (1-y)dy \\ &= 9/2 \end{aligned}$$

Για τις ασκήσεις 25 ως 28 να υπολογίσετε ολοκληρώματα όπως δίνονται και στη συνέχεια αφού αλλάξετε τη σειρά ολοκλήρωσης.

25. $\int_0^1 dx \int_0^{3-3x} dy$

    Λύση:



$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_0^{3-3x} dy \\ &= \int_0^1 (3-3x)dx \\ &= 3/2 \\ &= \int_0^3 dy \int_0^{1-y/3} dx \\ &= \int_0^3 (1-y/3)dy \\ &= 3/2 \end{aligned}$$

26. $\int_0^2 dy \int_{y/2}^1 (x+y)dx$

    - Απάντηση: 4/3

27. $\int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{x}} y\sqrt{x}dy$

- Απάντηση: 32/5

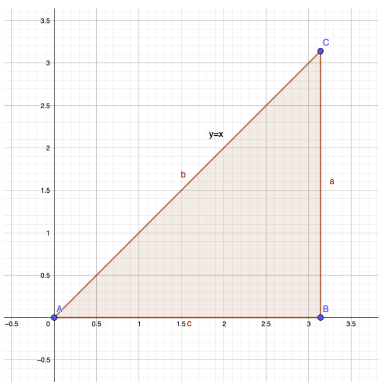
28. $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} ydx$

- Απάντηση: 1/3

Για τις ασκήσεις 29 ως 32, τα ολοκληρώματα όπως δίνονται δεν είναι δυνατόν να υπολογιστούν γιατί δεν υπάρχουν κλειστές εκφράσεις για τα απλά ολοκληρώματα που πρέπει να υπολογιστούν. Για το λόγο αυτό, να αλλάξετε τη σειρά της ολοκλήρωσης και να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα.

29. $\int_0^\pi dy \int_y^\pi \frac{\sin x}{x}dx$

Λύση:



$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi dx \int_0^x \frac{\sin x}{x}dy \\ &= \int_0^\pi \sin x dx \\ &= 2 \end{aligned}$$

30. $\int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2/2}dy$

- Απάντηση: $1 - e^{-2}$

31. $\int_0^{\ln 16} dx \int_{e^{x/2}}^4 \frac{1}{\ln y}dy$

- Απάντηση: 6

32. $\int_0^1 dy \int_{y^2}^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}}dx$

- Απάντηση: $e - 1$

Για τις ασκήσεις 33 ως 36, να υπολογίσετε τα τριπλά ολοκληρώματα.

33. $\int_1^2 dx \int_x^{2x} dy \int_0^{y-x} dz$

- Απάντηση: 7/6

34. $\int_0^2 dz \int_z^2 dx \int_{8x}^z dy$

- Απάντηση: -20

35. $\int_{-2}^3 dy \int_1^2 dz \int_{y+z}^{2y+z} 6ydx$

- Απάντηση: 70

36. $\int_1^2 dx \int_x^{2x} dz \int_0^{1/z} zdy$

- Απάντηση: 3/2