Μαθηματικά ΙΙ - 5η Σειρά Ασκήσεων

Δ. Βλάχος - Απρίλιος 2020

Οι ασκήσεις που δίνονται συνοδεύονται από ένα πλήρως λυμένο παράδειγμα και από άλυτες ασκήσεις για εξάσκηση με απάντηση. Όπου χρειαστεί, αναφέρονται και κάποια βασικά σημεία της θεωρίας.

Πολλές φορές για ευκολία, η μερική παράγωγος $\partial g/\partial x$ συβολίζεται με g_x και η $\partial^2 g/\partial x \partial y$ με g_{xy}.

---

1. Να βρεθεί ο όγκος μέσα στον κώνο $3z^2 = x^2 + y^2$ κια πάνω από το επίπεδο $z = 2$ και μέσα στη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 36$

   Λύση:

   Αλλάζουμε σε σφαιρικές συντεταγμένες. Πρίν όμως, να περιγράψουμε το χωρίο μας με ανισώσεις. Τα σημεία που βρίσκονται πάνω στον κώνο, ικανοποιούν την εξίσωση $3z^2 = x^2 + y^2$ και η περιοχή πάνω από τον κώνο έχει z μεγαλύτερο από αυτό που προκύπτει από την εξίσωση (για δοσμένα x, y). Έτσι η περιοχή πάνω από τον κώνο θα δίνεται $3z^{\geq} = x^2 + y^2$. Όμοια η περιοχή μέσα στη σφαίρα θα δίνεται $x^2 + y^2 + z^2 \leq 36$ και πάνω από το επίπεδο $z = 2$ θα δίνεται $z \geq 2$. Έχουμε λοιπόν:

$$
\begin{aligned}
3r^2\cos^2\theta \geq r^2\sin^2\theta\cos^2\phi + r^2\sin^2\theta\sin^2\phi \implies \\
3r^2\cos^2\theta \geq r^2\sin^2\theta \implies \cos\theta \geq \frac{1}{2} \implies \theta \leq \pi/3 \\
x^2 + y^2 + z^2 \leq 36 \implies r \leq 6 \\
z \geq 2 \implies r\cos\theta \geq 2 \implies r \geq 2/\cos\theta
\end{aligned}
$$

   Τώρα μπορούμε να γράψουμε το ολοκλήρωμα σε σφαιρικές συντεταγμένες (η Ιακωβιανή για τις σφαιρικές είναι $r^2 \sin\theta$ και έτσι:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{2p} d\phi \int_0^{\pi/3} d\theta \int_{\frac{2}{\cos\theta}}^{6} r^2 \sin\theta dr \\
&= 2\pi \int_0^{\pi/3} \left(\frac{r^3}{3}\sin\theta\right)_{r=\frac{2}{\cos\theta}}^{6} d\theta \\
&= 2\pi \int_0^{\pi/3} \left(72\sin\theta - \frac{8}{3}\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}\right) d\theta \\
& \quad u = \cos\theta \implies \sin\theta d\theta = -du \\
&= 2\pi \int_0^{1/2} (\frac{8}{3}u^{-3} - 72) du \\
&= 64\pi
\end{aligned}
$$

2. Να υπολογίσετε τον όγκο μέσα στον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 4$ και μεταξύ της επιφάνειας $z = 2x^2 + y^2$ και του επιπέδου $x - y$.

   Λύση:

   Σε κυλινδρικές συντεταγμένες, το εσωτερικό του κυλίνδρου δίνεται:

$$x^2 + y^2 \leq 4 \implies r \leq 2$$

   Επίσης,

$$
\begin{aligned}
z \geq 0 \ (x - y \ plane) \\
z \leq 2x^2 + y^2 \implies z \leq 2r^2\cos^2\theta + r^2\sin\theta
\end{aligned}
$$

Έτσι το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 dr \int_0^{r^2(1+\cos^2\theta)} r dz \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3(1+\cos^2\theta) dr \\
&= \int_0^{2\pi} 4(1+\cos^2\theta) d\theta \\
&= 12\pi
\end{aligned}
$$

3. Να βρείτε τον όγκο του τμήματος της σφαίρας με ακτίνα 2 που βρίσκεται στο εσωτερικό του κυλίνδρου $x^2+(y-1)^2=1$ χρησιμοποιώντας κυλινδρικές συντεταγμένες.

   - Απάντηση: $\frac{16}{9}(3\pi-4)$

4. Να βρείτε τον όγκο τμήματος σφαίρας με ακτίνα a μεταξύ των επιπέδων $z=z_1$ και $z=z_2$ όπου $0<z_1<z_2$.

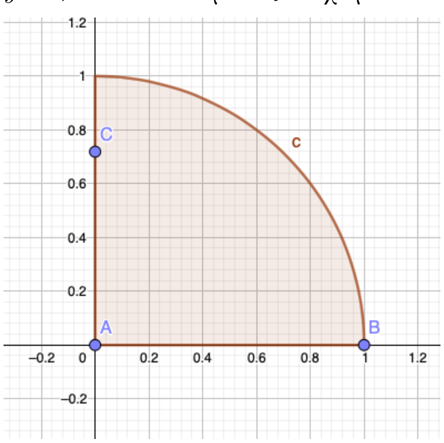
   - Απάντηση: $\pi a^2(z_2-z_1)-\pi(z_2^3-z_1^3)/3$

5. Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$
I = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{-x^2-y^2} dy
$$

   Λύση:

   Σε πολικές συντεταγμένες $x^2+y^2=r^2$. Για να βρούμε τα όρια της ολοκλήρωσης, θα σχεδιάσουμε το χωρίο: Γνωρίζουμε ότι το x παίρνει τιμές από το 0 ως το 1 και το y από το 0 μέχρι την καμπύλη $y=\sqrt{1-x^2}$. Επομένως το χωρίο είναι αυτό που φαίνεται στο σχήμα:



$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^1 e^{-r^2} r dr \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{e^{-r^2}}{2}\right)_0^1 d\phi \\
&= \pi(1-e^{-1})/4
\end{aligned}
$$

6. Να βρείτε την Ιακωβιανή ορίζουσα στην ακόλουθη αλλαγή μεταβλητών:

$$
x = \frac{1}{2}\left(u^2-v^2\right),\ y = uv
$$

   - Απάντηση: u^2+v^2

7. Να βρείτε την Ιακωβιανή ορίζουσα στην ακόλουθη αλλαγή μεταβλητών:

$$
x = a\cosh u \cos v,\ y = a \sinh u \sin v
$$

   - Απάντηση: $a^2(\sinh^2 u + \sin^2 v)$

8. Να αποδείξετε την ακόλουθη σχέση:

$$\frac{\theta(x,y)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}$$

Λύση:

Έστω οι πίνακες:

$$A = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} u_s & u_t \\ v_s & v_t \end{pmatrix}$$

Όπως μπορείτε να δείτε, η ορίζουσα το Α είναι η Ιακωβιανή$\frac{\theta(x,y)}{\partial(u,v)}$ και η ορίζουσα του πίνακα Β είναι η Ιακωβιανή $\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}$. Έτσι, θα υπολογίσουμε το γινόμενο των δύο πινάκων και μετά την ορίζουσα (πράγματι, η ορίζουσα του γινομένου είναι το γινόμενο των οριζουσών). Έτσι,

$$AB = \begin{pmatrix} x_u u_s + x_v v_s & x_u u_t + x_v v_t \\ y_u u_s + y_v v_s & y_u u_t + y_v v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{pmatrix}$$

και έτσι

$$det(AB) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}$$

όπου έχουμε κάνει χρήση του κανόνα της αλυσίδας.

9. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

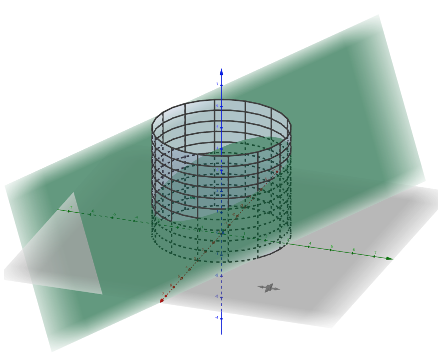
$$I = \int_0^{1/2} dx \int_x^{1-x} \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2 dy$$

αλλάζοντας τις μεταβλητές

$$x = \frac{1}{2}(r-s),\ y = \frac{1}{2}(r+s)$$

- Απάντηση: 1/12

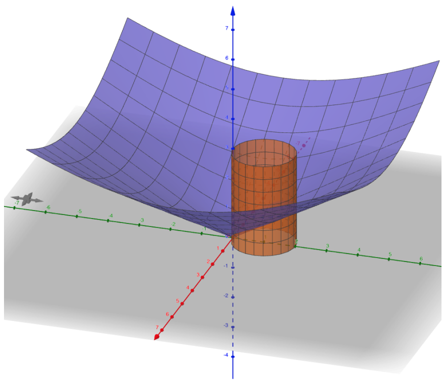
10. Να βρείτε την επιφάνεια του επιπέδου $x - 2y + 5z = 13$ που βρίσκεται μέσα στον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 9$.
Λύση:



$$\frac{|\vec{\nabla}\phi|}{|\partial\phi/\partial z|} = \frac{\sqrt{1+4+25}}{5} = \frac{\sqrt{30}}{5}$$

$$\begin{aligned} S &= \iint_{x^2+y^2\leq 9} \frac{\sqrt{30}}{5} dxdy \\ &= 9\pi\sqrt{30}/9 \end{aligned}$$

11. Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας $2x^2 + 2y^2 = 5z^2$ που βρίσκεται μέσα στον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 2y$
Λύση:



$$\frac{|\vec{\nabla}\phi|}{|\partial\phi/\partial z|} = \frac{\sqrt{16x^2+16y^2+100z^2}}{10z} = \sqrt{7/5}$$

$$\begin{aligned} S &= \iint_{x^2+y^2\leq 2y} \sqrt{7/5}\,dxdy \\ &= \pi\sqrt{7/5} \end{aligned}$$

12. Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας $x^2+y^2=z$ που βρίσκεται μέσα στον κύλινδρο $x^2+y^2=9$

    - Απάντηση: $\pi(37^{3/2}-1)/6$

13. Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας $x^2+y^2=2z^2$ για $x,y,z\geq 0$ που περιορίζεται από τα επίπεδα $y=0$ και $y=x/\sqrt{3}$ και τον κύλινδρο $x^2+y^2=4$.

    - Απάντηση: $\pi/\sqrt{6}$

14. Να βρείτε το εμβαδόν του κώνου $z^2=3(x^2+y^2)$ που βρίσκεται μέσα στη σφαίρα $x^2+y^2+z^2=16$.

    - Απάντηση: 32π

15. Να βρείτε το εμβαδόν του τμήματος του κώνου $x^2+y^2=z^2$ που βρίσκεται πάνω από τον δίσκο $(x-1)^2+y^2\leq 1$.

    - Απάντηση: $\pi\sqrt{2}$