ΜΑΘ ΙΙ - Πολλαπλά Ολοκληρώματα

Δ.Σ. Βλάχος[1]

[1]Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου

Τρίπολη, Μάρτιος 2020

Περιεχόμενα

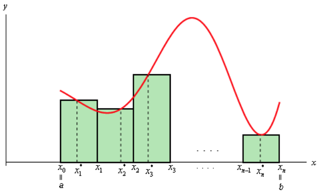
Εισαγωγή

- Θεωρούμε πραγματικές συναρτήσεις, δηλαδή συναρτήσεις οι οποίες παίρνουν τιμές στο $\mathbb{R}$
- Ο υπολογισμός των πολλαπλών ολοκληρωμάτων ανάγεται σε υπολογισμό απλών ολοκληρωμάτων
- Μπορείτε να κατεβάσετε από το $e - class$ ένα λεπτομερή πίνακα ολοκληρωμάτων που θα σας βοηθήσει στις ασκήσεις

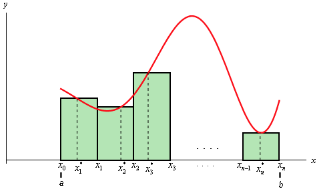
Περιεχόμενα

$$\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx$$

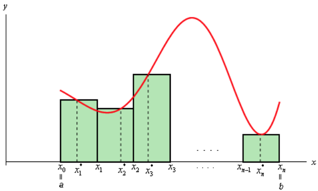


$$\int_a^b f(x)dx$$



$$A \approx f(x_1*)\Delta x + f(x_2*)\Delta x + \ldots f(x_n*)\Delta x$$

$$\int_a^b f(x)dx$$

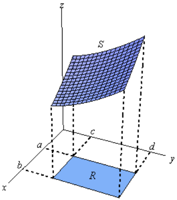


$$A \approx f(x_1*)\Delta x + f(x_2*)\Delta x + \ldots f(x_n*)\Delta x$$

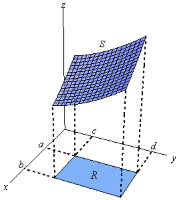
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i*)\Delta x$$

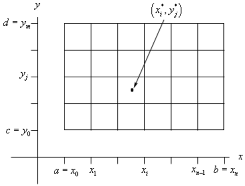
$$f: R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \ R = [a, b] \times [c, d]$$

$$f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \;\; R = [a, b] \times [c, d]$$

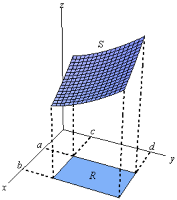


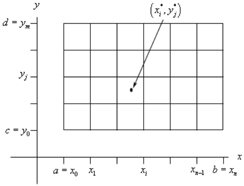
$$f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \ R = [a, b] \times [c, d]$$

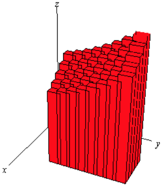




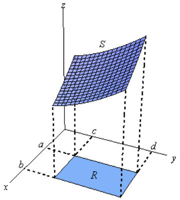
$$f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \;\; R = [a, b] \times [c, d]$$

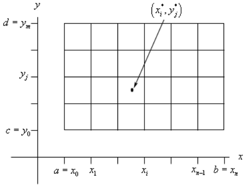


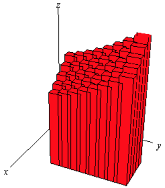




$$f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \; R = [a, b] \times [c, d]$$

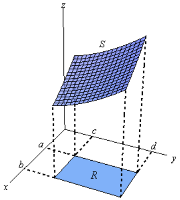


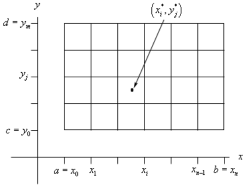


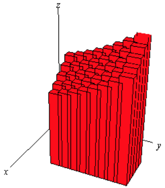


$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i*, y_j*) \Delta x \Delta y$$

$$f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \; R = [a, b] \times [c, d]$$

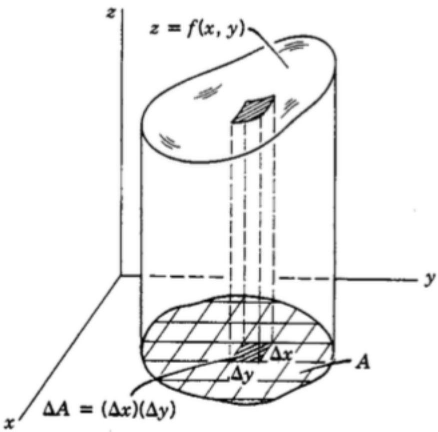






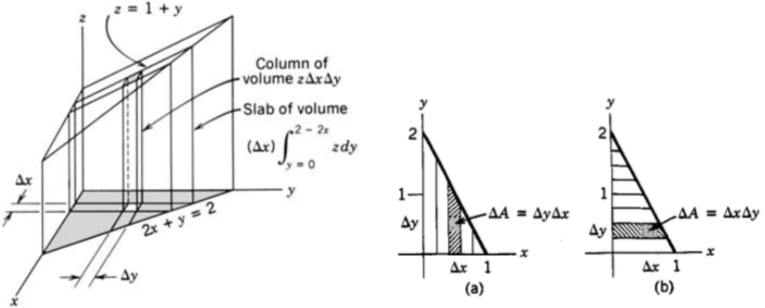
$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i*, y_j*)\Delta x \Delta y$$

$$V = \iint_R f(x, y)dxdy = \lim_{n,m \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i*, y_j*)\Delta x \Delta y$$

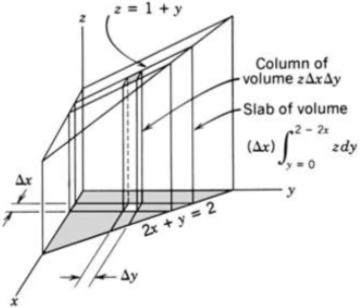


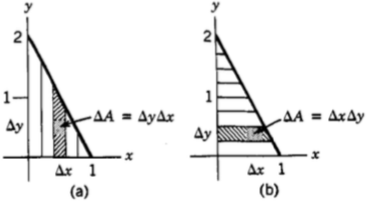
Το χωρίο ολοκλήρωσης μπορεί να είναι τυχαίο και όχι απαραίτητα ένα ορθογώνιο

Θεώρημα Fubini



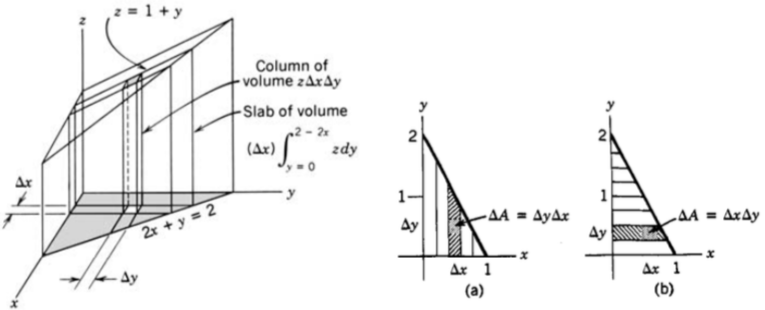
Θεώρημα Fubini





$$\int_{y=0}^{2-2x} z dy = \int_{y=0}^{2-2x} (1+y) dy = \left(y + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{2-2x} = 4 - 6x + 2x^2$$

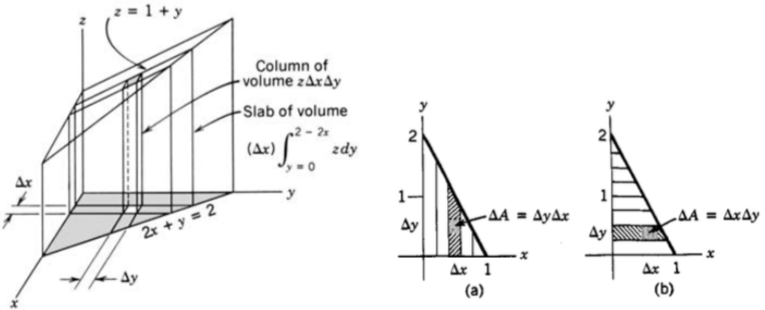
Θεώρημα Fubini



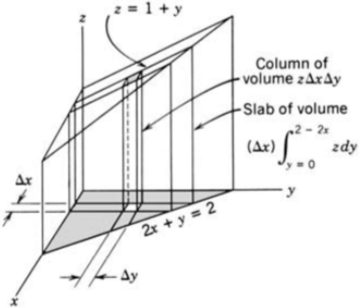
$$\int_{y=0}^{2-2x} z dy = \int_{y=0}^{2-2x} (1+y) dy = \left(y + \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_0^{2-2x} = 4 - 6x + 2x^2$$

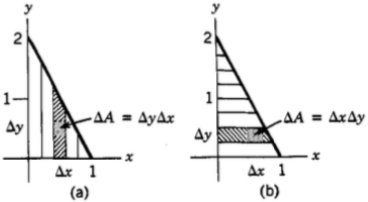
$$\int_{x=0}^{1} (4 - 6x + 2x^2) dx = \frac{5}{3}$$

Θεώρημα Fubini



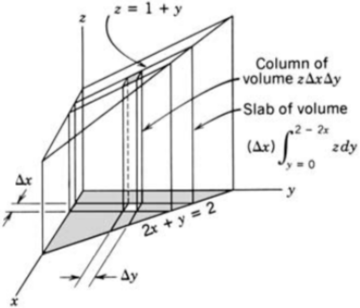
Θεώρημα Fubini

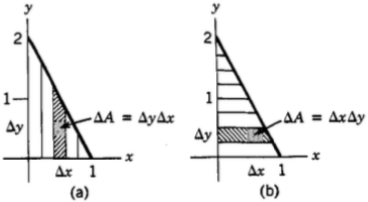




$$\int_{x=0}^{1-y/2} z dx = \int_{x=0}^{1-y/2} (1+y) dx = (x+xy)\Big|_{x=0}^{1-y/2} = 1 + y/2 - y^2/2$$

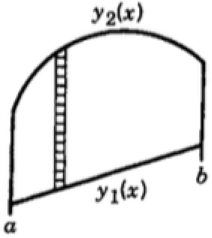
Θεώρημα Fubini

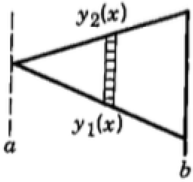


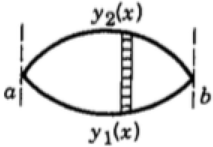


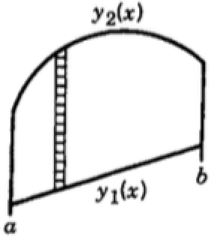
$$\int_{x=0}^{1-y/2} z dx = \int_{x=0}^{1-y/2}(1+y)dx = (x+xy)\Big|_{x=0}^{1-y/2} = 1 + y/2 - y^2/2$$

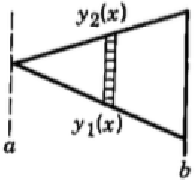
$$\int_{y=0}^{2}(1+y/2-y^2/2)dy = \frac{5}{3}$$

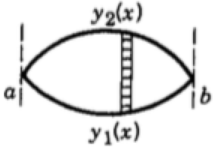

$y_2(x)$
$y_1(x)$
a
b


$y_2(x)$
$y_1(x)$
a
b

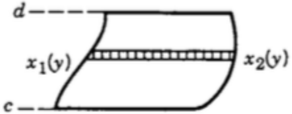

$y_2(x)$
$y_1(x)$
a
b

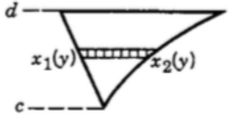


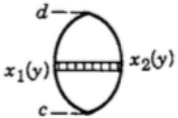


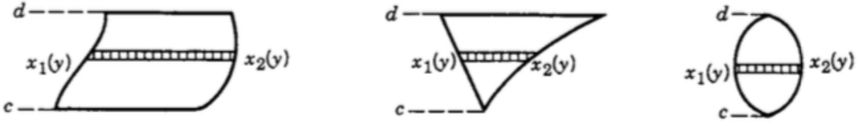


$$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

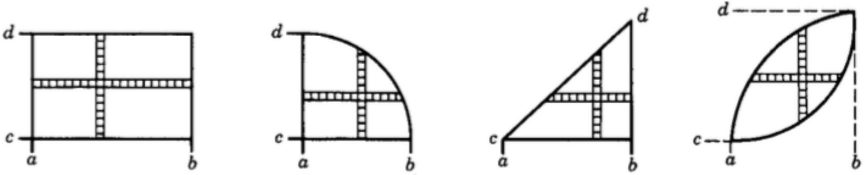

d
x1(y)
x2(y)
c

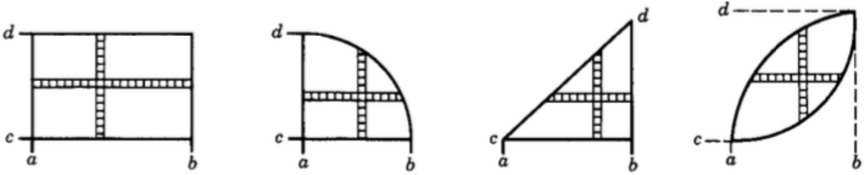

d
x1(y)
x2(y)
c


d
x1(y)
x2(y)
c

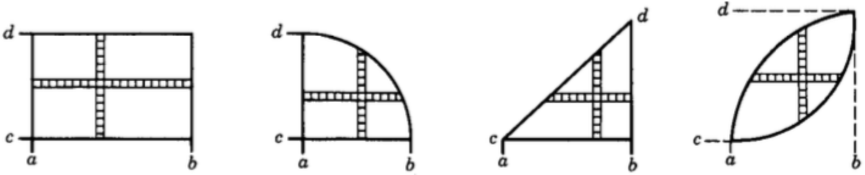


$$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_{y=c}^{d}\left(\int_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)} f(x,y)dx\right)dy$$


d
c
a
b



$$\begin{aligned}\iint_A f(x,y)dxdy &= \int_{x=a}^{b}\left(\int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} f(x,y)dy\right)dx \\ &= \int_{y=a}^{d}\left(\int_{x=x_1(x)}^{x=x_2(x)} f(x,y)dx\right)dy\end{aligned}$$



$$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_{x=a}^{b}\left(\int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} f(x,y)dy\right)dx$$
$$= \int_{y=a}^{d}\left(\int_{x=x_1(x)}^{x=x_2(x)} f(x,y)dx\right)dy$$

Συμβολισμός:

$$\int_{x=a}^{b}\left(\int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} f(x,y)dy\right)dx = \int_{x=a}^{b} dx \int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} f(x,y)dy$$

Περιεχόμενα

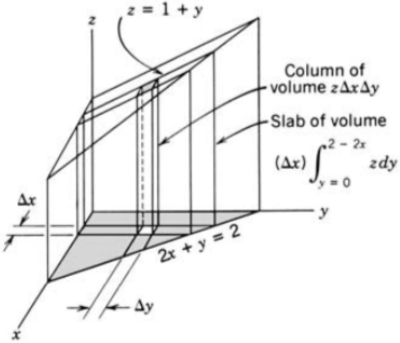
Παράδειγμα 1

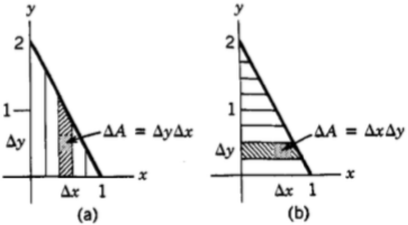
Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που περικλείεται από το επίπεδα $x = 0, \ y = 0, \ z = 1 + y, \ 2x + y = 2.$

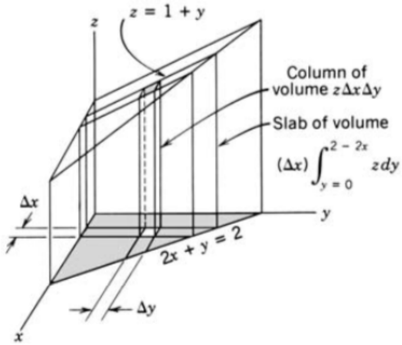
Παράδειγμα 1

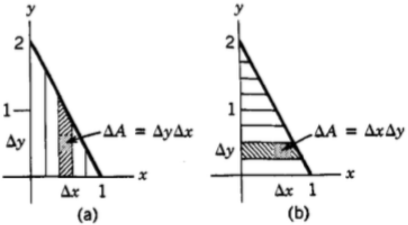
Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που περικλείεται από το επίπεδα $x = 0,\ y = 0,\ z = 1 + y,\ 2x + y = 2.$
Ο στοιχειώδεις όγκος είναι ένας κύβος με ακμές dx, dy, dz. Έτσι πρέπει να προσθέσουμε όλους τους στοιχειώδεις όγκους με τη μορφή ενός τριπλού ολοκληρώματος:

$$V = \iiint dxdydz$$


$z = 1 + y$
z
Column of
volume $z\Delta x\Delta y$
Slab of volume
$(\Delta x)\int_{y=0}^{2-2x} z\,dy$
Δx
y
$2x + y = 2$
Δy
x


y
2
1
Δy
$\Delta A = \Delta y \Delta x$
x
Δx
1
(a)
y
2
1
Δy
$\Delta A = \Delta x \Delta y$
x
Δx
1
(b)

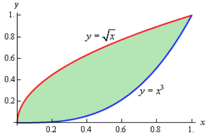




$$
\begin{aligned}
\int_{x=0}^{1} dx \int_{y=0}^{2-2x} dy \int_{z=0}^{1+y} dz &= \int_{x=0}^{1} dx \int_{y=0}^{2-2x} (1+y))dy \\
&= \int_{x=0}^{1} (2x^2 - 6x + 4)dx \\
&= 5/3
\end{aligned}
$$

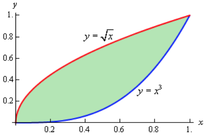
Παράδειγμα 2

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \iint_D (4xy - y^3)dxdy$ όπου D το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες $y = x^3, \ y = \sqrt(x)$



Παράδειγμα 2

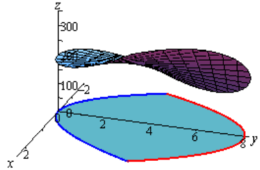
Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \iint_D (4xy - y^3)dxdy$ όπου D το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες $y = x^3$, $y = \sqrt(x)$

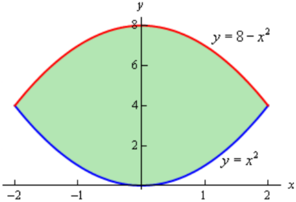


$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 dx \int_{x^3}^{\sqrt{x}} (4xy - y^3)dy \\
&= \int_0^1 \left(2xy^2 - y^4/4\right)\Big|_{y=x^3}^{x=\sqrt{x}} dx \\
&= \int_0^1 (7x^2/4 - 2x^7 + x^{12}/4)dx \\
&= (7x^3/12 - 2x^8/8 + x^13/52)\Big|_0^1 \\
&= 55/156
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα 3

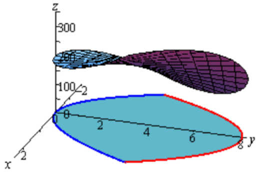
Να βρείτε τον όγκο του στερεού που βρίσκεται κάτω από την επιφάνεια $z = 16xy + 200$ και πάνω από την περιοχή του $xy-$ επιπέδου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = x^2$, $y = 8 - x^2$.

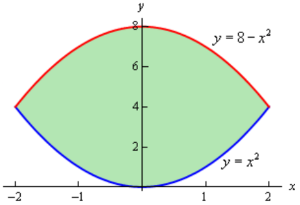




Παράδειγμα 3

Να βρείτε τον όγκο του στερεού που βρίσκεται κάτω από την επιφάνεια $z = 16xy + 200$ και πάνω από την περιοχή του $xy-$ επιπέδου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = x^2$, $y = 8 - x^2$.





$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-2}^{2} dx \int_{x^2}^{8-x^2} (16xy + 200)dy \\
&= \int_{-2}^{2} (8xy^2 + 200y)\Big|_{y=x^2}^{y=8-x^2} dx \\
&= \int_{-2}^{2} (-128x^3 - 400x^2 + 512x + 1600)dx \\
&= (-32x^4 - 400x^3/3 + 256x^2 + 1600x)\Big|_{-2}^{2} \\
&= 12800/3
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα 4

Το διπλό ολοκλήρωμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρούμε το εμβαδόν ενός σχήματος. Πράγματι, μπορούμε να θεωρήσουμε ένα στερεό με βάση το ζητούμενο σχήμα και ύψος 1, άρα ο όγκος του στερεού θα είναι όσο και το εμβαδόν.

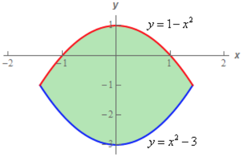
Παράδειγμα 4

Το διπλό ολοκλήρωμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρούμε το εμβαδόν ενός σχήματος. Πράγματι, μπορούμε να θεωρήσουμε ένα στερεό με βάση το ζητούμενο σχήμα και ύψος 1, άρα ο όγκος του στερεού θα είναι όσο και το εμβαδόν. Μπορούμε επίσης να θέσουμε στη θέση του στοιχειώδους εμβαδού το γινόμενο $dxdy$ και να ολοκληρώσουμε σε όλο το σχήμα. Και στις δύο περιπτώσεις, το εμβαδόν του χωρίου D προκύπτει:

$$A_D = \iint_D dxdy$$

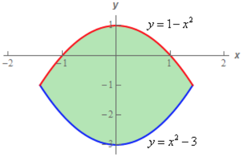
Παράδειγμα 4

Να βρείτε τον εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = 1 - x^2,\ y = x^2 - 3$.



Παράδειγμα 4

Να βρείτε τον εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = 1 - x^2,\ y = x^2 - 3$.



$$\begin{aligned} A &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2-3}^{1-x^2} (16xy + 200)dy \\ &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (4 - 2x^2)dx \\ &= (4x - 2x^3/3)\Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \\ &= 16\sqrt{2}/3 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 5

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^3 dx \int_{2x}^6 \sqrt{y^2+2}dy$$

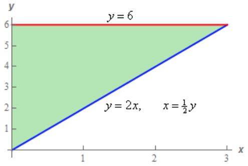
αφού πρώτα αλλάξετε τη σειρά ολοκλήρωσης.

Παράδειγμα 5

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^3 dx \int_{2x}^6 \sqrt{y^2+2}dy$$

αφού πρώτα αλλάξετε τη σειρά ολοκλήρωσης.



$$\begin{aligned} I &= \int_0^6 dy \int_0^{y/2} \sqrt{y^2+2}dx \\ &= \int_0^6 \frac{y}{2}\sqrt{y^2+2} \\ &= \frac{1}{6}\left(38^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 6

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

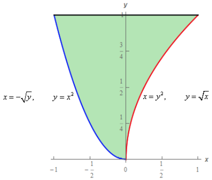
$$I = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{y^2} (6x - y)dx$$

αφού πρώτα αλλάξετε τη σειρά ολοκλήρωσης.

Παράδειγμα 6

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{y^2} (6x - y) dx$$



αφού πρώτα αλλάξετε τη σειρά ολοκλήρωσης.

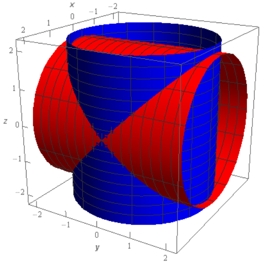
$$\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{0} dx \int_{x^2}^{1} (6x - y) dy + \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{1} (6x - y) dy \\
&= \int_{-1}^{0} dx \left(6xy - y^2/2\right)\Big|_{x^2}^{1} + \int_0^1 dx \left(6xy - y^2/2\right)\Big|_{\sqrt{x}}^{1} \\
&= \int_{-1}^{0} (x^4/2 - 6x^3 + 6x - 1/2) dx + \int_0^1 (-6x^{3/2} + 13x/2 - 1/2) dx \\
&= -31/20
\end{aligned}$$

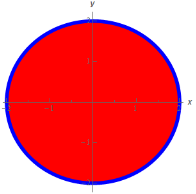
Παράδειγμα 7

Να βρείτε τον όγκο που προκύπτει από την τομή των κυλίνδρων $x^2 + y^2 = 4,\ x^2 + z^2 = 4$

Παράδειγμα 7

Να βρείτε τον όγκο που προκύπτει από την τομή των κυλίνδρων $x^2+y^2=4,\ x^2+z^2=4$

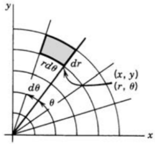


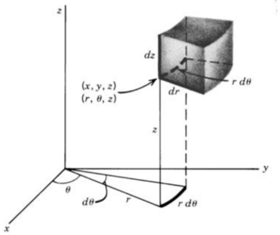


$$
\begin{aligned}
V &= 2\int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4-x^2}\,dy \\
&= 2\int_{-2}^{2} 2(4-x^2)dx \\
&= 128/3
\end{aligned}
$$

Περιεχόμενα

Σε πολικές συντεταγμένες ισχύει:

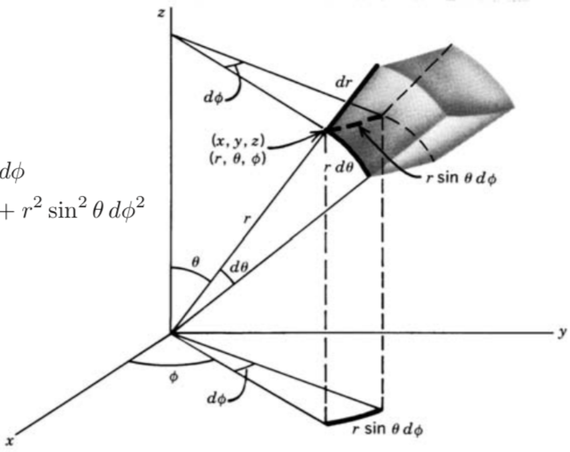




$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\theta \\
y &= r\sin\theta \\
z &= z \\
ds^2 &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 \\
dA &= r dr d\theta \\
dV &= r dr d\theta dz
\end{aligned}
$$

Σε σφαιρικές συντεταγμένες ισχύει:

$$x = r\sin\theta\cos\phi$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi$$
$$z = r\cos\theta$$
$$dV = r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$
$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\phi^2$$
$$dA = a^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi$$



Ιακωβιανή ορίζουσα

Έστω

$$\begin{aligned} x^1 &= x^1(u^1, u^2, \ldots, u^n) \\ x^2 &= x^2(u^1, u^2, \ldots, u^n) \\ \vdots &= \vdots \\ x^n &= x^n(u^1, u^2, \ldots, u^n) \end{aligned}$$

τότε, η Ιακωβιανή ορίζουσα

$$J = \frac{\partial(x^1, x^2, \ldots, x^n)}{\partial(u^1, u^2, \ldots, u^n)}$$

ορίζεται:

Ιακωβιανή ορίζουσα

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial u^n} \\ \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} & \cdots & \frac{\partial x^2}{\partial u^n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial u^1} & \frac{\partial x^n}{\partial u^2} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^n} \end{vmatrix}$$

και ισχύει:

$$dx^1 dx^2 \ldots dx^n = \left| \frac{\partial(x^1, x^2, \ldots, x^n)}{\partial(u^1, u^2, \ldots, u^n)} \right| du^1 du^2 \ldots du^n$$

Επομένως

$$\int \cdots \int_D f(x^1, x^2, \ldots, x^n) dx^1 dx^2 \ldots dx^n =$$

$$\int \cdots \int_D f(u^1, u^2, \ldots, u^n) \left| \frac{\partial(x^1, x^2, \ldots, x^n)}{\partial(u^1, u^2, \ldots, u^n)} \right| du^1 du^2 \ldots du^n$$

Περιεχόμενα

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί ο όγκος της σφαίρας Ω με ακτίνα R.

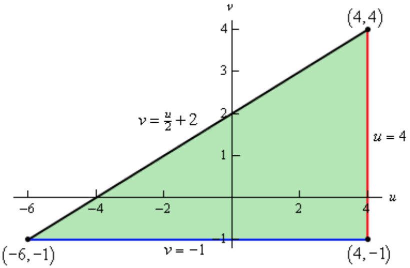
$$\begin{aligned} V &= \iiint_\Omega dxdydz \\ &= \iiint_\Omega \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} \right| drd\theta d\phi \\ &= \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi r^2 \sin\theta d\theta \\ &= \int_0^R dr \int_0^{2\pi} 2r^2 d\phi \\ &= \int_0^R 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{4}{3}\pi R^3 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2

Όταν αλλάζουμε μεταβλητές, πρέπει να βρούμε το χωρίο ολοκλήρωσης στο νέο σύστημα συντεταγμένων.

Έστω ότι θέλουμε να ολοκληρώσουμε στο χωρίο που περικλείεται από τις ευθείες $y = -x+4$, $y = x+1$, $y = x/3-4/3$ και αλλάζουμε μεταβλητές $x = (u+v)/2, y = (u-v)/2$

$$\begin{aligned} y &= -x+4 && \Rightarrow && u = 4 \\ y &= x+1 && \Rightarrow && v = -1 \\ y &= \frac{x}{3} - \frac{4}{3} && \Rightarrow && v = \frac{u}{2} + 2 \end{aligned}$$



Παράδειγμα 3

Να υπολογίσεται το εμβαδό του χωρίου που δίνεται από την ανίσωση $x^2 - xy + y^2 \leq 2$ κάνοντας αλλαγή στις μεταβλητές $x = \sqrt{2}u - \sqrt{2/3}v,\ y = \sqrt{2}u + \sqrt{2/3}v$.

Παράδειγμα 3

Να υπολογίσεται το εμβαδό του χωρίου που δίνεται από την ανίσωση $x^2 - xy + y^2 \leq 2$ κάνοντας αλλαγή στις μεταβλητές
$x = \sqrt{2}u - \sqrt{2/3}v,\ y = \sqrt{2}u + \sqrt{2/3}v.$
Αλλάζοντας τις μεταβλητές, η εξίσωση για το χωρίο γίνεται:

$$x^2 - xy + y^2 \leq 2 \implies u^2 + v^2 \leq 1$$

Παράδειγμα 3

Να υπολογίσεται το εμβαδό του χωρίου που δίνεται από την ανίσωση $x^2 - xy + y^2 \leq 2$ κάνοντας αλλαγή στις μεταβλητές $x = \sqrt{2}u - \sqrt{2/3}v, \; y = \sqrt{2}u + \sqrt{2/3}v$.
Αλλάζοντας τις μεταβλητές, η εξίσωση για το χωρίο γίνεται:

$$x^2 - xy + y^2 \leq 2 \implies u^2 + v^2 \leq 1$$

Η Ιακωβιανή ορίζουσα είναι:

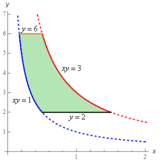
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 4/\sqrt{3}$$

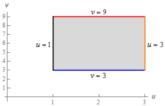
και έτσι το εμβαδόν είναι:

$$\begin{aligned} A &= \iint_{x^2-xy+y^2\leq 2} dxdy \\ &= \iint_{u^2+v^2\leq 1} 4/\sqrt{3}dudv \\ &= 4\pi/\sqrt{3} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 4

Να υπολογιστεί το $I = \iint_R xy^3 dxdy$ όπου R το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες $xy = 1,\ xy = 3,\ y = 2,\ y = 6$ με αλλαγή μεταβλητών $x = \frac{v}{6u},\ y = 2u$





Αλλάζοντας τις μεταβλητές, το νέο χωρίο περικλείεται από τις καμπύλες:

$$\begin{aligned} xy &= 1 \implies v = 3 \\ xy &= 3 \implies v = 9 \\ y &= 2 \implies u = 1 \\ y &= 6 \implies u = 3 \end{aligned}$$

και

$$I = \int_1^3 du \int_3^9 \frac{4vu^2}{3} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv = 64$$

Παράδειγμα 5

Να δειχτεί ότι

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=1$$

Παράδειγμα 5

Να δειχτεί ότι

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1$$

Θεωρούμε τους πίνακες A, B με

$$A = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

Τότε

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = det(A), \; \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = det(B)$$

και γνωρίζουμε πως $det(A) \cdot det(B) = det(A \cdot B)$. Έτσι:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} x_u u_x + x_v v_x & x_u u_y + x_v v_y \\ y_u u_x + y_v v_x & y_u u_y + y_v v_y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies det(A \cdot B) = 1 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 6

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \frac{x^2+y^2}{1+(x^2-y^2)^2} e^{-2xy}$ αλλάζοντας τις μεταβλητές $u = x^2 - y^2, \; v = 2xy$.

Παράδειγμα 6

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \frac{x^2+y^2}{1+(x^2-y^2)^2} e^{-2xy}$ αλλάζοντας τις μεταβλητές $u = x^2 - y^2, \; v = 2xy$.
Αρχικά πρέπει να υπολογίσουμε την $\partial(x,y)/\partial(u,v)$ που σύμφωνα με το αποτέλεσμα του προηγούμενου παραδείγματος είναι $1/(\partial(u,v)/\partial(x,y))$.
Έτσι:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{4(x^2+y^2)}$$

και το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\iint \frac{x^2+y^2}{1+u^2} e^{-v} \frac{1}{4(x^2+y^2)} dudv = \frac{1}{4} \iint \frac{e^{-v}}{1+u^2} dudv$$

Παράδειγμα 6 - Συνέχεια

Για τα όρια της ολοκλήρωσης έχουμε

$$\begin{matrix} 0 \leq x^2 \leq +\infty \\ -\infty \leq -y^2 \leq 0 \end{matrix} \implies -\infty \leq u \leq +\infty$$

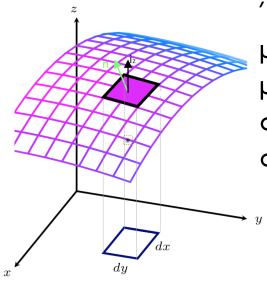
$$\begin{matrix} 0 \leq x \leq +\infty \\ 0 \leq y^{\leq} + \infty \end{matrix} \implies 0 \leq v \leq +\infty$$

και έτσι το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} du \int_{0}^{\infty} dv \frac{e^{-v}}{1+u^2} &= \\ \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+u^2} du &= \\ \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+u^2} du &= \\ \frac{1}{2}\left(\tan^{-1} u\right)_0^{\infty} &= \pi/4 \end{aligned}$$

Περιεχόμενα

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το $\iint_D ds$ πάνω σε ένα τυχαίο χωρίο D το οποίο δεν είναι απαραίτητα επίπεδο. Εδώ με ds συμβολίζουμε το στοιχειώδες εμβαδόν πάνω στο χωρίο D.



Έστω n το κάθετο διάνυσμα στο χωρίο, i_z το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τον άξονα Z και θ η μεταξύ τους γωνία. Τότε το στοιχειώδες εμβαδόν στο χωρίο D και η προβολή του στο επιπεδο $x-y$ συνδέονται με τη σχέση:

$$ds \cos\theta = dxdy$$

και το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\iint_{D'} \frac{1}{\cos\theta} dxdy$$

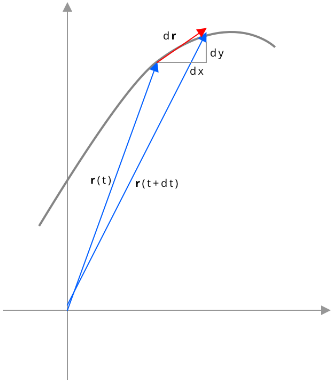
όπου D' η προβολή του D στο επίπεδο $x-y$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το χωρίο D περιγράφεται από την εξίσωση $z = f(x, y)$ ή $\phi(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$. Θα δούμε ότι το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια $\phi = 0$ δίνεται απότον τύπο:

$$\vec{\nabla} f = grad\ \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$$

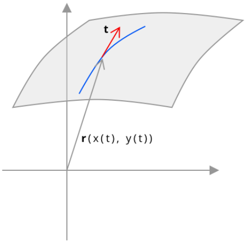
Ας υποθέσουμε τώρα ότι το χωρίο D περιγράφεται από την εξίσωση $z = f(x, y)$ ή $\phi(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$. Θα δούμε ότι το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια $\phi = 0$ δίνεται απότον τύπο:

$$\vec{\nabla} f = grad\ \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)$$

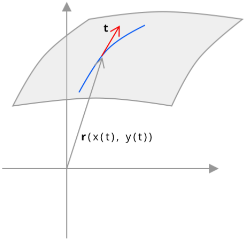


Αν έχουμε μια καμπύλη $\vec{r}(t)$ τότε το εφαπτόμενο διάνυσμα σε ένα σημείο της καμπύλης είναι το $\vec{r}'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$. Πράγματι:

$$d\vec{r} = \vec{r}(t + dt) - \vec{r}(t) = \vec{r}'(t)dt$$



Ας πάρουμε τώρα μια επιφάνεια $\phi(x, y, z) = 0$ και μια καμπύλη $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ πάνω στην επιφάνεια. Αφού η καμπύλη βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια, θα ισχύει $\phi(x(t), y(t), z(t)) = 0$.



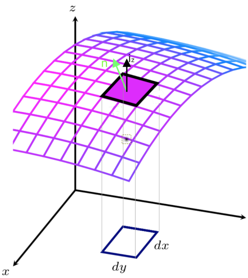
Ας πάρουμε τώρα μια επιφάνεια $\phi(x, y, z) = 0$ και μια καμπύλη $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ πάνω στην επιφάνεια. Αφού η καμπύλη βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια, θα ισχύει $\phi(x(t), y(t), z(t)) = 0$. Το εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπύλη είναι:

$$\vec{r'}(t) = (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt})$$

Όμως:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0 \implies (\vec{\nabla}\phi) \cdot \vec{r'}(t) = 0$$

δηλαδή το $\vec{\nabla}\phi$ είναι κάθετο στην επιφάνεια.



Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το $\cos\theta$:

$$\cos\theta = \left|\vec{n}\cdot\vec{i}_z\right| = \frac{\left|\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|}{\left|\vec{\nabla}\phi\right|}$$

και στην περίπτωση που $\phi = z - f(x,y) = 0$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}$$

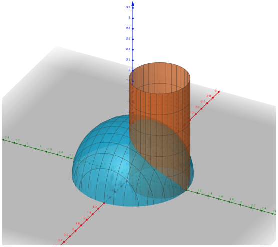
και το ολοκλήρωμα πάνω στο τυχαίο χωρίο D γίνεται

$$\iint_D ds = \iint_{D'} \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}dxdy$$

Περιεχόμενα

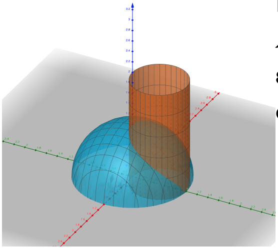
Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η επιφάνεια του τμήματος της σφαίρας με εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ που περιορίζεται από τον κύλινδρο με εξίσωση $x^2 + y^2 - y = 0$.



Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η επιφάνεια του τμήματος της σφαίρας με εξίσωση $x^2+y^2+z^2=1$ που περιορίζεται από τον κύλινδρο με εξίσωση $x^2+y^2-y=0$.



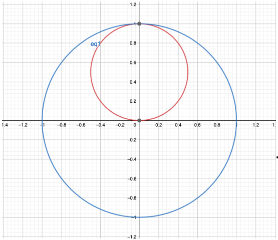
Η προβολή της ζητούμενης επιφάνειας στο επίπεδο $x-y$ είναι ο κύκλος $x^2+(y-1/2)^2=1/4$. Η εξίσωση της επιφάνειας είναι η εξίσωση της σφαίρας $\phi=x^2+y^2+z^2-1=0$ και έτσι έχουμε:

$$S=\iint_{x^2+(y-1/2)^2=1/4}\frac{\left|\vec{\nabla}\phi\right|}{|\partial\phi/\partial z|}dxdy$$

$$S=\iint_{x^2+(y-1/2)^2=1/4}\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy$$

Παράδειγμα 1 - συνέχεια

Τα όρια της ολοκλήρωσης είναι:



$$0 \leq x \leq \sqrt{y - y^2}$$
$$0 \leq y \leq 1$$

Τότε το ολοκλήρωμα γίνεται:

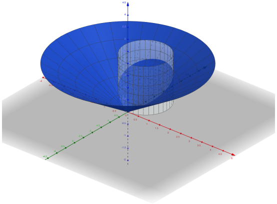
$$S = 2\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y-y^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dx$$

Αλλάζοντας σε πολικές συντεταγμένες προκύπτει:

$$S = 2\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\sin\theta} \frac{rdr}{\sqrt{1 - r^2}} = \pi - 2$$

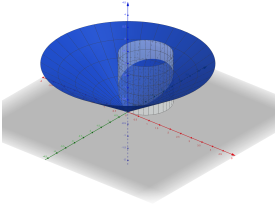
Παράδειγμα 2

Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται πάνω στον κώνο με εξίσωση $2x^2 + 2y^2 = 5z^2$, $x > 0$ και περιορίζεται από τον κύλινδρο με εξίσωση $x^2 + y^2 = 2y$.



Παράδειγμα 2

Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται πάνω στον κώνο με εξίσωση $2x^2 + 2y^2 = 5z^2$, $x > 0$ και περιορίζεται από τον κύλινδρο με εξίσωση $x^2 + y^2 = 2y$.



Έχουμε

$$\phi = 5z^2 - 2x^2 - 2y^2$$
$$\left|\vec{\nabla}\phi\right| = \sqrt{16x^2 + 16y^2 + 100z^2} = \sqrt{140}z$$
$$|\partial\phi/\partial z| = 10z$$
$$0 \leq y \leq 1$$

Τότε το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$S = \sqrt{7/5} \iint_{x^2+y^2=2y} dxdy$$
$$S = \sqrt{7/5}\pi$$

Σύνοψη

- Το πολλαπλό ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ορίζεται σε ένα χωρίο $D \subset \mathbb{R}^n$
- Για τον υπολογισμό ενός πολλαπλού ολοκληρώματος χρησιμοποιούμε το θεώρημα του Fubini ολοκληρώνοντας διαδοχικά για κάθε μεταβλητή
- Τα όρια κάθε διαδοχικού ολοκληρώματος προκύπτουν από το χωρίο ολοκλήρωσης
- Μπορούμε να αλλάξουμε τις μεταβλητές ολοκλήρωσης χρησιμοποιώντας την Ιακωβιανή ορίζουσα
- Τα επιφανειακά ολοκληρώματα υπολογίζονται προβάλλοντας το στοιχειώδες εμβαδόν της επιφάνειας σε ένα επίπεδο και μετά ολοκληρώνουμε στο επίπεδο χωρίο που προκύπτει από την προβολή της επιφάνειας στο επίπεδο

Οδηγίες μελέτης

- Η ύλη που καλύπτει αυτή η διάλεξη υπάρχει στα βιβλία που προτείνονται για το μάθημα
- Η 4η Σειρά Ασκήσεων καλύπτει τα πολλαπλά ολοκληρώματα χωρίς αλλαγή μεταβλητών
- Η 5η Σειρά Ασκήσεων καλύπτει την αλλαγή μεταβλητών και τα επιφανειακά ολοκληρώματα