ΜΑΘ ΙΙ - Διανυσματική Ανάλυση

Δ.Σ. Βλάχος[1]

[1]Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου

Τρίπολη, Απρίλιος 2020

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα

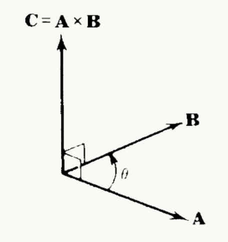
Εισαγωγή

- Εσωτερικό, εξωτερικό και τριπλό γινόμενο διανυσμάτων
- Εμβαδόν στοιχειώδους επιφάνειας σαν διάνυσμα
- Βαθμωτά και διανυσματικά πεδία
- Διαφορικοί διανυσματικοί τελεστές και η φυσική τους σημασία
- Αλλαγή συστήματος συντεταγμένων και καμπυλόγραμμες συντεταγμένες

Περιεχόμενα

Γινόμενο διανυσμάτων

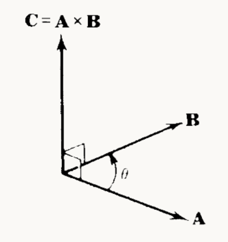
Έστω δύο διανύσματα $\vec{A}$, $\vec{B}$ και θ η μεταξύ τους γωνία.



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos\theta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Γινόμενο διανυσμάτων

Έστω δύο διανύσματα $\vec{A}$, $\vec{B}$ και θ η μεταξύ τους γωνία.



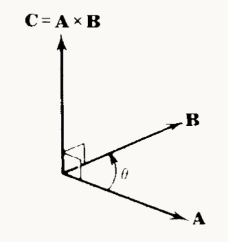
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos\theta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin\theta$$

Γινόμενο διανυσμάτων

Έστω δύο διανύσματα $\vec{A}$, $\vec{B}$ και θ η μεταξύ τους γωνία.



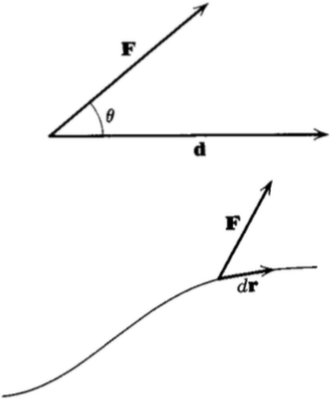
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos\theta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin\theta$$

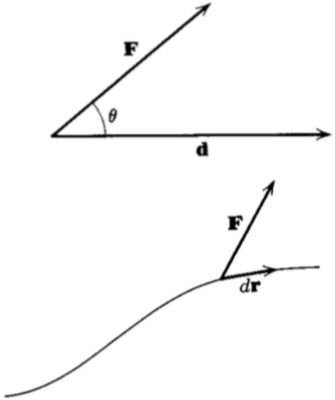
Ισχύει ότι $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$ αλλά $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

Έργο δύναμης



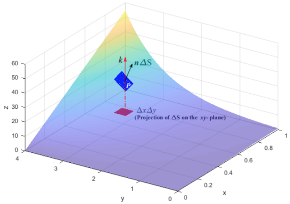
Το έργο μιας δύναμης είναι ίσο με το εσωτερικό γινόμενο της δύναμης με τη μετατόπιση.

Έργο δύναμης



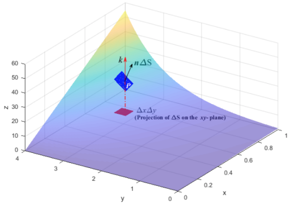
Το έργο μιας δύναμης είναι ίσο με το εσωτερικό γινόμενο της δύναμης με τη μετατόπιση.
Ακόμα και αν η μετατόπιση δεν είναι ευθύγραμμη, πάλι μπορούμε να υπολογίσουμε το έργο αν προσθέσουμε τα στοιχειώδη έργα που παράγονται σε κάθε στοιχειώδη μετατόπιση (θα δούμε στη συνέχεια τα επικαμπύλια ολοκληρώματα).

Στοιχειώδης επιφάνεια



Αν συμβολίσουμε με ds το εμβαδόν μιας στοιχειώδους επιφάνειας, τότε μαζί με το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια μπορούμε να ορίσουμε το διάνυσμα $\vec{ds}$ το οποίο θα έχει μέτρο όσο το εμβαδόν και κατεύθυνση κάθετη στην επιφάνεια.

Στοιχειώδης επιφάνεια



Αν συμβολίσουμε με ds το εμβαδόν μιας στοιχειώδους επιφάνειας, τότε μαζί με το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια μπορούμε να ορίσουμε το διάνυσμα $\vec{ds}$ το οποίο θα έχει μέτρο όσο το εμβαδόν και κατεύθυνση κάθετη στην επιφάνεια.

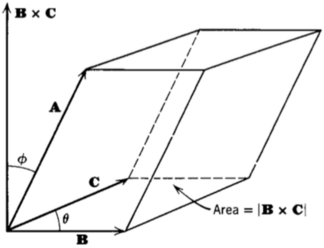
Δηλαδή:

$$\vec{ds} = \vec{n} ds$$

όπου $\vec{n}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια. Αν έχουμε μια επιφάνεια που δίνεται από την εξίσωση $\phi(x, y, z) = 0$ τότε το στοιχειώδες εμβαδόν πάνω σε αυτήν την επιφάνεια είναι:

$$\vec{ds} = \frac{\vec{\nabla}\phi}{|\vec{\nabla}\phi|} \cdot ds$$

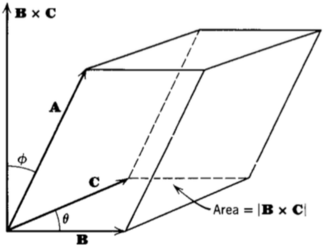
Τριπλό βαθμωτό γινόμενο



Ας θεωρήσουμε τον όγκο ενός παραλληλεπιπέδου με ακμές τα διανύσματα $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$. Τότε ο όγκος του παραλληλεπιπέδου θα είναι το εμβαδόν της βάσης επί το ύψος. Δηλαδή:

$$\begin{aligned} V &= |\vec{B}| \cdot |\vec{C}| \cdot \sin\theta \cdot |\vec{A}| \cos\phi \\ &= |\vec{B} \times \vec{C}| \cdot |\vec{A}| \cos\phi \\ &= \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) \end{aligned}$$

Τριπλό βαθμωτό γινόμενο



Ας θεωρήσουμε τον όγκο ενός παραλληλεπιπέδου με ακμές τα διανύσματα $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$. Τότε ο όγκος του παραλληλεπιπέδου θα είναι το εμβαδόν της βάσης επί το ύψος. Δηλαδή:

$$\begin{aligned} V &= |\vec{B}|\cdot|\vec{C}|\cdot\sin\theta\cdot|\vec{A}|\cos\phi \\ &= |\vec{B}\times\vec{C}|\cdot|\vec{A}|\cos\phi \\ &= \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) \end{aligned}$$

Ισχύει:

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

Τριπλό διανυσματικό γινόμενο

Ας θεωρήσουμε το γινόμενο $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$. Τότε, αφού το αποτέλεσμα θα είναι κάθετο διάνυσμα στο $\vec{B} \times \vec{C}$ και αφού αυτό είναι κάθετο στα $\vec{B}$, $\vec{C}$ προκύπτει ότι θα βρίσκεται στο επίπεδο που ορίζουν τα $\vec{B}$, $\vec{C}$.
Μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

Τριπλό διανυσματικό γινόμενο

Ας θεωρήσουμε το γινόμενο $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$. Τότε, αφού το αποτέλεσμα θα είναι κάθετο διάνυσμα στο $\vec{B} \times \vec{C}$ και αφού αυτό είναι κάθετο στα $\vec{B}$, $\vec{C}$ προκύπτει ότι θα βρίσκεται στο επίπεδο που ορίζουν τα $\vec{B}$, $\vec{C}$.
Μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

Γενικά

Το τριπλό διανυσματικό γινόμενο είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων μέσα στην παρένθεση. Ο συντελεστής καθενός είναι το γινόμενο των άλλων δύο, και το διάνυσμα που βρίσκεται στη μέση είναι αυτό με το θετικό πρόσημο.

Παράδειγμα

Αν θέλουμε να βρούμε το $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$ τότε το γράφουμε ως $-\vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B})$ και εφαρμόζουμε τον παραπάνω κανόνα. Έτσι:

$$\begin{aligned} (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} &= -\vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) \\ &= -\Big((\vec{C} \cdot \vec{B})\vec{A} - (\vec{C} \cdot \vec{A})\vec{B}\Big) \\ &= -(\vec{C} \cdot \vec{B})\vec{A} + (\vec{C} \cdot \vec{A})\vec{B} \end{aligned}$$

Περιεχόμενα

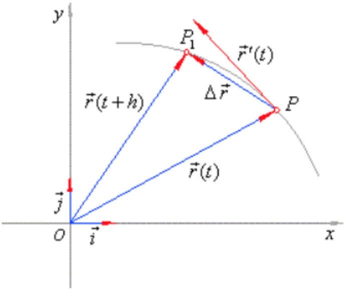
Έστω ένα διάνυσμα $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ τέτοιο ώστε όλες του οι συνιστώσες είναι συναρτήσεις του t. Ορίζουμε τότε:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left(\frac{dA_x}{dt}, \frac{dA_y}{dt}, \frac{dA_z}{dt} \right)$$

δηλαδή

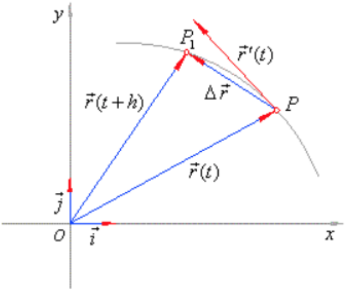
η παράγωγος ενός διανύσματος είναι ένα διάνυσμα με συνιστώσες τις παραγώγους των συνιστωσών του αρχικού διανύσματος.

Γεωμετρική ερμηνεία



$$\begin{aligned}\vec{r}'(t) &= \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\vec{r}(t+h)-\vec{r}(t)}{h}\end{aligned}$$

Γεωμετρική ερμηνεία

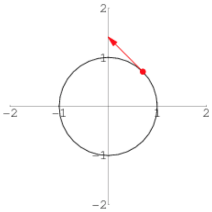


$$
\begin{aligned}
\vec{r}'(t) &= \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\vec{r}(t+h)-\vec{r}(t)}{h}
\end{aligned}
$$

Τότε:

$$
\begin{aligned}
\vec{r}'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{(r_x(t+h)-r_x(t), r_y(t+h)-r_y(t))}{h} \\
&= \left(\lim_{h\to 0} \frac{(r_x(t+h)-r_x(t)}{h}, \lim_{h\to 0} \frac{(r_y(t+h)-r_y(t)}{h} \right) \\
&= (r_x'(t), r_y'(t))
\end{aligned}
$$

Εφαρμογή



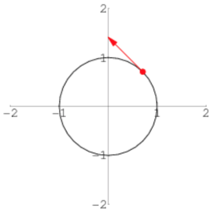
Έστω ένα σώμα κινείται σε κυκλική τροχιά με ακτίνα 1. Τότε το διάνυσμα θέσης θα δίνεται:

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$$

και η ταχύτητα από την παράγωγο του διανύσματος θέσης, δηλαδή

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t)$$

Εφαρμογή



Έστω ένα σώμα κινείται σε κυκλική τροχιά με ακτίνα 1. Τότε το διάνυσμα θέσης θα δίνεται:

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$$

και η ταχύτητα από την παράγωγο του διανύσματος θέσης, δηλαδή

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t)$$

Τότε:

$$\vec{v} \cdot \vec{r} = -\cos t \sin t + \cos t \sin t = 0$$

δηλαδή η ταχύτητα και το διάνυσμα θέσης είναι κάθετα. Έτσι, αφού το διάνυσμα θέσης βρίσκεται πάνω σε κύκλο τότε η ταχύτητα θα είναι κάθετη στην ακτίνα του κύκλου και έτσι εφαπτόμενη στον κύκλο.

Εφαρμογή - συνέχεια

Για την επιτάχυνση τώρα έχουμε:

$$\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = -(\cos t, \sin t) = -\vec{r}$$

και έτσι η επιτάχυνση δείχνει πάντα προς το κέντρο του κύκλου (κεντρομόλος επιτάχυνση) .

Ιδιότητες

Αν f πραγματική συνάρτηση τότε ισχύει:

$$\frac{d(f\vec{A})}{dt} = \frac{df}{dt}\vec{A} + f\frac{d\vec{A}}{dt}$$

Επίσης:

$$\begin{aligned} \frac{d(\vec{A}\cdot\vec{B})}{dt} &= \frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{dt} \\ \frac{d(\vec{A}\times\vec{B})}{dt} &= \frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B} + \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt} \end{aligned}$$

Περιεχόμενα

Η έννοια του πεδίου

- Η θερμοκρασία σε ένα δωμάτιο κοντά σε ένα παράθυρο ή μια σόμπα
- Το ηλεκτρικό πεδίο σε ένα σημείο που η απόστασή του από ένα φορτίο είναι μικρή ή μεγάλη
- Το βαρυτικό πεδίο που αισθάνεται ένας δορυφόρος όταν πλησιάζει ή απομακρύνεται από τη Γη
- Η ταχύτητα ροής του νερού σε ένα ποτάμι κοντά σε μια περιοχή που μικραίνει η μεγαλώνει το πλάτος του ποταμού

Η έννοια του πεδίου

- Η θερμοκρασία σε ένα δωμάτιο κοντά σε ένα παράθυρο ή μια σόμπα
- Το ηλεκτρικό πεδίο σε ένα σημείο που η απόστασή του από ένα φορτίο είναι μικρή ή μεγάλη
- Το βαρυτικό πεδίο που αισθάνεται ένας δορυφόρος όταν πλησιάζει ή απομακρύνεται από τη Γη
- Η ταχύτητα ροής του νερού σε ένα ποτάμι κοντά σε μια περιοχή που μικραίνει η μεγαλώνει το πλάτος του ποταμού

Ορισμός

Πεδίο είναι μια περιοχή του χώρου εφοδιασμένη με μια φυσική ιδιότητα, η τιμή της οποίας σε ένα σημείο εξαρτάται μόνο από αυτό το σημείο.

Παράγωγος κατά κατεύθυνση

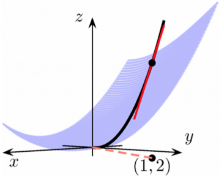
Έστω μια πραγματική συνάρτηση f και ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{a}$. Τότε ορίζουμε την παράγωγο της f κατά την κατεύθυνση που δείχνει το $\vec{a}$:

$$D_{\vec{a}}f(\vec{r}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{r}+h\vec{a}) - f(\vec{r})}{h}$$

Παράγωγος κατά κατεύθυνση

Έστω μια πραγματική συνάρτηση f και ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{a}$. Τότε ορίζουμε την παράγωγο της f κατά την κατεύθυνση που δείχνει το $\vec{a}$:

$$D_{\vec{a}} f(\vec{r}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{r} + h\vec{a}) - f(\vec{r})}{h}$$



Πάρτε ένα σημείο $P = \vec{r}_0$ και τη συνάρτηση $g(t) = f(\vec{r}_0 + t\vec{a})$. Τότε η παράγωγος της f κατά την κατεύθυνση $\vec{a}$ στο σημείο P δεν είναι τίποτε άλλο παρά η $g'(t)$.

Παράγωγος κατά κατεύθυνση

$$\begin{aligned} D_{\vec{a}} f(\vec{r}) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h a_x, y + h a_y, z + h a_z) - f(x, y, z)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f_x h a_x + f_y h a_y + f_z h a_z + O(h^2)}{h} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot (a_x, a_y, a_z) \\ &= \vec{\nabla} f \cdot \vec{a} \end{aligned}$$

Το διάνυσμα

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

ονομάζεται βαθμίδα ή κλίση της συνάρτησης f.

Βαθμίδα

Επειδή

$$D_{\vec{a}} f(\vec{r}) = \vec{\nabla} f \cdot \vec{a} = |\vec{\nabla} f| \cos\theta$$

όπου θ η γωνία που σχηματίζει το $\vec{a}$ με τη βαθμίδα, η παράγωγος κατά κατεύθυνση θα γίνεται μέγιστη όταν $\vec{a} \parallel \vec{\nabla} f$, δηλαδή η βαθμίδα της f δείχνει προς την κατεύθυνση που η μεταβολή της f μεγιστοποιείται.
Επίσης, σε κάθε κάθετη διεύθυνση προς τη βαθμίδα η f έχει μηδενική μεταβολή.

Βαθμίδα

Επειδή

$$D_{\vec{a}} f(\vec{r}) = \vec{\nabla} f \cdot \vec{a} = |\vec{\nabla} f| \cos\theta$$

όπου θ η γωνία που σχηματίζει το $\vec{a}$ με τη βαθμίδα, η παράγωγος κατά κατεύθυνση θα γίνεται μέγιστη όταν $\vec{a} \parallel \vec{\nabla} f$, δηλαδή η βαθμίδα της f δείχνει προς την κατεύθυνση που η μεταβολή της f μεγιστοποιείται.
Επίσης, σε κάθε κάθετη διεύθυνση προς τη βαθμίδα η f έχει μηδενική μεταβολή.
Αν θεωρήσουμε την επιφάνεια $f = 0$ και μια καμπύλη $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ πάνω στην επιφάνεια, τότε το εφαπτόμενο διάνυσμα $\vec{r}\,'(t)$ στην καμπύλη είναι κάθετο στη βαθμίδα της f. Δηλαδή, η βαθμίδα της f είναι κάθετη στην επιφάνεια $f = 0$.

Παράδειγμα

Στην επιφάνεια $f = x^2 + y^2 - z = 0$ θέλουμε να βρούμε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου και της κάθετης ευθείας στο σημείο $(3, 4, 25)$. Ας ξεκινήσουμε με το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα. Θα είναι

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla} f}{|\vec{\nabla} f|} = \frac{(2x, 2y, -1)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{101}}(6, 8, -1)$$

όπου έχουμε αντικαταστήσει τις συντεταγμένες του ζητούμενου σημείου.

Παράδειγμα

Στην επιφάνεια $f = x^2 + y^2 - z = 0$ θέλουμε να βρούμε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου και της κάθετης ευθείας στο σημείο $(3, 4, 25)$.
Ας ξεκινήσουμε με το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα. Θα είναι

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla} f}{|\vec{\nabla} f|} = \frac{(2x, 2y, -1)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{101}}(6, 8, -1)$$

όπου έχουμε αντικαταστήσει τις συντεταγμένες του ζητούμενου σημείου.
Ας δούμε πως βρίσκουμε μια ευθεία παράλληλη σε ένα διάνυσμα $\vec{n}$ που περνά από ένα σημείο (x_0, y_0, z_0): Έστω (x, y, z) το τυχαίο σημείο της ευθείας. Τότε το διάβυσμα $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ πρέπει να είναι παράλληλο με το $\vec{n}$. Έτσι:

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \lambda \vec{n} \implies$$
$$(x - 3, y - 4, z - 25) = \lambda(6, 8, -1)$$

Παράδειγμα - συνέχεια

Ας δούμε τώρα πως βρίσκουμε την εξίσωση ενός επιπέδου κάθετου σε ένα διάνυσμα $\vec{n}$ που περνά από ένα σημείο (x_0, y_0, z_0). Έστω (x, y, z) το τυχαίο σημείο του επιπέδου. Τότε, το διάνυσμα $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ θα βρίσκεται πάνω στο επίπεδο και έτσι θα είναι κάθετο στο $\vec{n}$. Έτσι,

$$\begin{aligned}(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \vec{n} = 0 \implies \\ (x - 3, y - 4, z - 25) \cdot (6, 8, -1) = 0 \implies \\ 6x + 8y - z = 25\end{aligned}$$

Απόκλιση διανύσματος

Ας θεωρήσουμε το διάνυσμα

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Τότε μπορούμε να θεωρήσουμε τη βαθμίδα της συνάρτησης f σαν πολλαπλασιασμό του διανύσματος $\vec{\nabla}$ με την πραγματική τιμή της συνάρτησης f.

Απόκλιση διανύσματος

Ας θεωρήσουμε το διάνυσμα

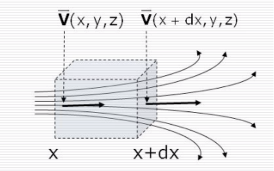
$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Τότε μπορούμε να θεωρήσουμε τη βαθμίδα της συνάρτησης f σαν πολλαπλασιασμό του διανύσματος $\vec{\nabla}$ με την πραγματική τιμή της συνάρτησης f. Τί γινεται όταν το $\vec{\nabla}$ επιδρά σε ένα διάνυσμα $\vec{V}$· Τότε:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (V_x, V_y, V_z) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

το οποίο συμβολίζουμε και με $div \vec{V}$ και ονομάζεται απόκλιση του διανύσματος $\vec{V}$.

Φυσική σημασία της απόκλισης



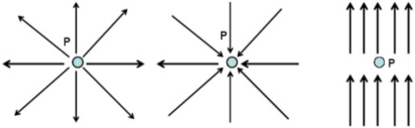
$$
\begin{aligned}
\Delta Q &= \left(V_x(x+\delta x, y, z) - V_x(x, y, z)\right)\delta y \delta z + \\
&\quad \left(V_y(x, y+\delta y, z) - V_y(x, y, z)\right)\delta x \delta z + \\
&\quad \left(V_z(x, y, z+\delta z) - V_z(x, y, z)\right)\delta x \delta y \implies
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\Delta Q}{\delta x \delta y \delta z} = \frac{V_x(x+\delta x, y, z) - V_x(x, y, z)}{\delta x} + \frac{V_y(x, y+\delta y, z) - V_z(x, y, z)}{\delta y} + \frac{V_z(x, y, z+\delta z) - V_z(x, y, z)}{\delta z} \implies
$$

$$
\lim_{\delta x, \delta y, \delta z \to 0} \frac{\Delta Q}{\delta x \delta y \delta z} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \implies
$$

$$
\rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}
$$

Παράδειγμα



Η απόκλιση ενός διανύσματος είναι θετική σε ένα σημείο όταν από αυτό το σημείο "παράγεται" διάνυσμα, αρνητική όταν "καταστρέφεται" διάνυσμα αλλιώς 0

Στροβιλισμός διανύσματος

Το εξωτερικό γινόμενο

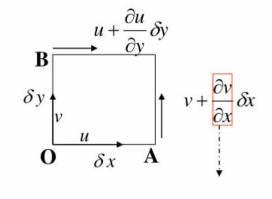
$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} \Longrightarrow$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}, \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}, \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right)$$

ονομάζεται στροβιλισμός του $\vec{V}$ και συμβολίζεται και με $curl\,\vec{V}$. Ισχύει:

$$curl\,\vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \epsilon_{ijk} \vec{e}_i \frac{\partial V_k}{x_j}$$

Φυσική σημασία στροβιλισμού



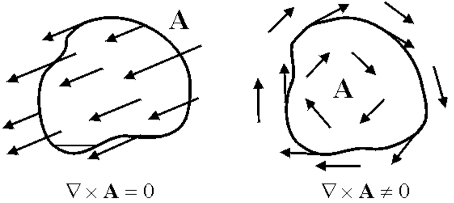
Ας θεωρήσουμε ένα διανυσματικό πεδίο το οποίο στο σημείο O έχει συνιστώσες $\vec{V} = (u, v, 0)$. Το έργο αυτού του διανύσματος πάνω στο ορθογώνιο με πλευρές $\delta x, \delta y$ θα είναι:

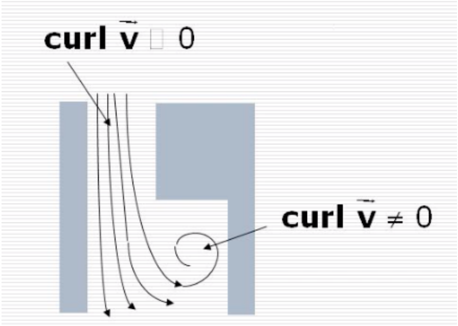
$$\Delta W = u\delta x + \left(v + \frac{\partial v}{\partial x}\delta x\right)\delta y - \left(u + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y\right)\delta x - v\delta y \implies$$

$$\lim_{\delta x, \delta y \to 0} \frac{\Delta W}{\delta x \delta y} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \implies$$

$$\rho = |\vec{\nabla} \times \vec{V}|$$

Φυσική σημασία στροβιλισμού





Παράδειγμα

Αν $\vec{r} = (x, y, z)$ να υπολογιστούν η απόκλιση και ο στροβιλισμός του μοναδιαίου διανύσματος κατά την κατεύθυνση $\vec{r}$.

Παράδειγμα

Αν $\vec{r} = (x, y, z)$ να υπολογιστούν η απόκλιση και ο στροβιλισμός του μοναδιαίου διανύσματος κατά την κατεύθυνση $\vec{r}$.
Το μοναδιαίο διάνυσμα είναι $\vec{i}_r = \vec{r}/r$ όπου $r = |\vec{r}|$. Είναι δηλαδή $\vec{i}_r = (x, y, z)/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Έτσι:

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{i}_r &= \frac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{x^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\
&= 2/r
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα - συνέχεια

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{i}_r &= \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{vmatrix} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Τελεστής του Laplace

Ας θεωρήσουμε μια πραγματική συνάρτηση f. Τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την απόκλιση της βαθμίδας της f

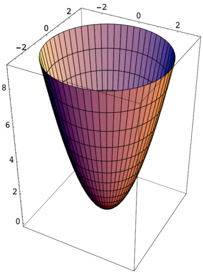
$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}f) = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

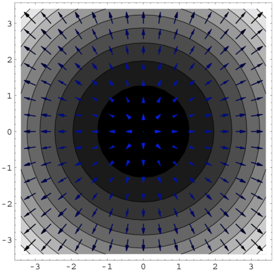
Ο τελεστής ∇^2 συμβολίζεται και ως Δ και λέγεται τελεστής του Laplace και επειδή περιέχει τις δεύτερες παραγώγους έχει να κάνει με τα τοπικά ελάχιστα ή μέγιστα της f. Γενικά ισχύει:

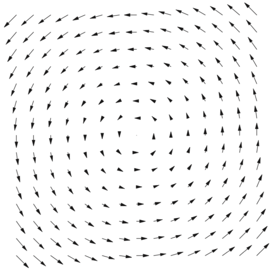
- $\Delta f(\vec{r}) < 0$, η f στο σημείο $\vec{r}$ έχει τιμή μεγαλύτερη από το μέσο όρο των τιμών των γειτονικών σημείων
- $\Delta f(\vec{r}) > 0$, η f στο σημείο $\vec{r}$ έχει τιμή μικρότερη από το μέσο όρο των τιμών των γειτονικών σημείων

Ιδιότητες

Ο στροβιλισμός της βαθμίδας της συνάρτησης f είναι πάντα 0.
Δηλαδή: $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = 0$.







$f(x, y) = x^2 + y^2$

$\vec{V} = (-y, x, 0)$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = 0\,,\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \nabla^2 V$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{V}) = \phi \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) + \vec{V} \cdot (\vec{\nabla}\phi)$$

$$\vec{\nabla} \times (\phi \vec{V}) = \phi(\vec{\nabla} \times \vec{V}) - \vec{V} \times (\vec{\nabla}\phi)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{U} \times \vec{V}) = \vec{V} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{U}) - \vec{U} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{U} \times \vec{V}) = (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{U} - (\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} - \vec{V}(\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) + \vec{U}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V})$$

$$\vec{\nabla}(\vec{U} \cdot \vec{V}) = \vec{U} \times (\vec{\nabla} \times \vec{U}) + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} + \vec{V} \times (\vec{\nabla} \times \vec{U}) + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{U}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}\phi \times \vec{\nabla}\psi) = 0$$

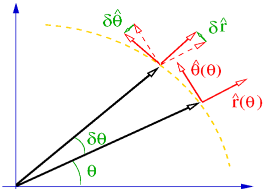
Περιεχόμενα

Έστω $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n$ οι συντεταγμένες ενός διανύσματος $\vec{r}$ στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ τα μοναδιαία διανύσματα της βάσης. Τότε:

$$\vec{r} = \bar{x}^1 \vec{e}_1 + \bar{x}^2 \vec{e}_2 + \ldots + \bar{x}^n \vec{e}_n = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}^i \vec{e}_i = \bar{x}^i \vec{e}_i$$

Έστω $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n$ οι συντεταγμένες ενός διανύσματος $\vec{r}$ στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ τα μοναδιαία διανύσματα της βάσης. Τότε:

$$\vec{r} = \bar{x}^1 \vec{e}_1 + \bar{x}^2 \vec{e}_2 + \ldots + \bar{x}^n \vec{e}_n = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}^i \vec{e}_i = \bar{x}^i \vec{e}_i$$



Στα καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων, τα διανύσματα της βάσης μεταβάλλονται από σημείο σε σημείο.

Έστω $x^1, x^2, \ldots, x^n$ οι συντεταγμένες ενός διανύσματος $\vec{r}$ στο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων και $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ τα μοναδιαία διανύσματα της βάσης. Τότε:

$$\vec{r} = x^i \vec{u}_i$$

$$
\begin{aligned}
d\vec{r} &= (d\bar{x}^1, d\bar{x}^2, \ldots, d\bar{x}^n) \\
&= \left(\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^j} dx^j, \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^j} dx^j, \ldots, \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^j} dx^j\right) \Longrightarrow \\
dr^2 &= d\vec{r} \cdot d\vec{r} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k} dx^i dx^k \\
&= g_{ik} dx^i dx^k
\end{aligned}
$$

όπου

$$
g_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k}
$$

και

$$
(g_{ik})^{-1} = g^{ik} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j}
$$

Αν θέλουμε το καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων να είναι ορθοκανονικό, δηλαδή $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = \delta^i_j$. Όμως, τα διανύσματα βάσης είναι κάθετα στην επιφάνεια που προκύπτει αν κρατήσουμε την αντίστοιχη συντεταγμένη σταθερή. Έτσι για παράδειγμα το $\vec{i}_x$ είναι το μοναδιαίο κάθετο στην επιφάνεια $x = const$ και έτσι $\vec{i}_x = \vec{\nabla} x = (1, 0, 0)$ όπως αναμενόνταν.

Αν θέλουμε το καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων να είναι ορθοκανονικό, δηλαδή $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = \delta^i_j$. Όμως, τα διανύσματα βάσης είναι κάθετα στην επιφάνεια που προκύπτει αν κρατήσουμε την αντίστοιχη συντεταγμένη σταθερή. Έτσι για παράδειγμα το $\vec{i}_x$ είναι το μοναδιαίο κάθετο στην επιφάνεια $x = const$ και έτσι $\vec{i}_x = \vec{\nabla} x = (1, 0, 0)$ όπως αναμενόνταν.

$$\vec{\nabla} x^i \cdot \vec{\nabla} x^j = 0, \ i \neq j \implies$$

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^1}, \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^1 2}, \ldots, \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^n}\right) \cdot \left(\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^1}, \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^1 2}, \ldots, \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^n}\right) = 0 \implies$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k} = g^{ij} = 0$$

άρα οι πίνακες (g^{ij}), (g_{ij}) είναι διαγώνιοι. Τότε θέτουμε $g_{ii} = h_i^2$ και έτσι $g^{ii} = \frac{1}{h_i^2}$.

Ας υπολογίσουμε τώρα το στοιχειώδες μήκος στο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων. Είναι:

$$d\vec{r} = d\bar{x}^1 \vec{e}_1 + \ldots + d\bar{x}^n \vec{e}_n = d\bar{x}^i \vec{e}_i \implies$$
$$d\vec{r} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} dx^j \vec{e}_i$$

Η συνιστώσα του $d\vec{r}$ κατά μήκος του $\vec{u}_k = \vec{\nabla} x^k / |\vec{\nabla} x^k|$ είναι $d\vec{r} \cdot \vec{u}_k$, η οποία προκύπτει

$$\frac{dx^k}{|\vec{\nabla} x^k|}$$

όμως $|\vec{\nabla} x^k| = 1/h_i$ και έτσι

$$d\vec{r} = h_1 dx^1 \vec{u}_1 + \ldots + h_n dx^n \vec{u}_n = h_i dx^i \vec{u}_i$$
$$dr^2 = h_i^2 \left(dx^i\right)^2$$

Ας δούμε τώρα πως υπολογίζουμε τη βαθμίδα μιας συνάρτησης στο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων. Στο καρτεσιανό σύστημα έχω:

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}^i}\vec{e}_i$$

Αρκεί τώρα να βρώ την προβολή της βαθμίδας πάνω στο $\vec{u}_j = \vec{\nabla}x^j/|\vec{\nabla}x^j|$. Έτσι:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}x^j/|\vec{\nabla}x^j| &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^j/\partial \bar{x}^k}{|\vec{\nabla}x^j|} \\
&= \frac{\frac{\partial \phi}{\partial x^i}}{|\vec{\nabla}x^j|} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k} \\
&= \frac{1}{h_j}\frac{\partial \phi}{\partial x^j}
\end{aligned}$$

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \phi}{\partial x^i}\vec{u}_i$$

Εργαζόμενοι με παρόμοιο τρόπο, προκύπτει (για 3 συντεταγμένες):

$$\vec{\nabla}\vec{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left(\frac{\partial}{\partial x^1}(h_2 h_3 V_1) + \frac{\partial}{\partial x^2}(h_1 h_3 V_2) + \frac{\partial}{\partial x^3}(h_1 h_2 V_3)\right)$$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\left(h_2 h_3 \frac{1}{h_1}\frac{\partial \phi}{\partial x^1}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(h_1 h_3 \frac{1}{h_2}\frac{\partial \phi}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x^3}\left(h_1 h_2 \frac{1}{h_3}\frac{\partial \phi}{\partial x^3}\right)\right)$$

Κυλινδρικές συντεταγμένες

$$h_1 = 1,\ h_2 = r,\ h_3 = 1$$

$$d\vec{s} = dr\vec{i}_r + rd\theta\vec{i}_\theta + dz\vec{i}_z$$

$$ds^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + (dz)^2$$

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\vec{i}_\theta + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{i}_z$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

Σφαιρικές συντεταγμένες

$$h_1 = 1,\ h_2 = r,\ h_3 = r\sin\theta$$

$$d\vec{s} = dr\vec{i}_r + rd\theta\vec{i}_\theta + r\sin\theta d\phi\vec{i}_\phi$$

$$ds^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2\sin^2\theta(d\phi)^2$$

$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{i}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\vec{i}_\phi$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2V_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta V_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_\phi}{\partial\phi}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$$

Σύνοψη

- Εσωτερικό, εξωτερικό και τριπλό γινόμενο διανυσμάτων
- Βαθμωτά και διανυσματικά πεδία
- Διανυσματικοί διαφορικοί τελεστές και η φυσική τους σημασία
- Καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων

Οδηγίες μελέτη

- Η ύλη που καλύπτει αυτή η διάλεξη υπάρχει στα βιβλία που προτείνονται για το μάθημα
- Η 6η σειρά ασκήσεων καλύπτει τη διανυσματική ανάλυση ενώ η 7η σειρά ασκήσεων καλύπτει την αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων