ΜΑΘ ΙΙ - Διανυσματική Ολοκλήρωση

Δ.Σ. Βλάχος[1]

[1]Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου

Τρίπολη, Απρίλιος 2020

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα

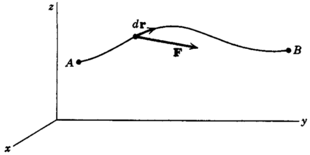
Εισαγωγή

- Ορισμός επικαμπύλιου ολοκληρώματος, έργο δύναμης και συντηρητικά πεδία
- Γενίκευση του θεμελιώδους θεωρήματος του απειροστικού λογισμού και το θεώρημα Green στο επίπεδο
- Το θεώρημα απόκλισης
- Το θεώρημα του Stokes

Περιεχόμενα

Επικαμπύλια ολοκληρώματα

Έστω μία δύναμη $\vec{F}$ η οποία επιδρά κατά μήκος μιας καμπύλης που ενώνει τα σημεία A, B όπως φαίνεται στο σχήμα.



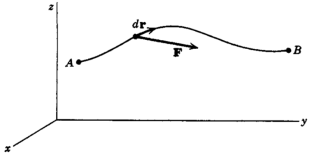
Το έργο της δύναμης dW κατά μήκος της μήκος της στοιχειώδους μετατόπισης $d\vec{r}$ είναι

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Μπορούμε να αθροίσουμε όλα αυτά τα dW ώστε να υπολογίσουμε το συνολικό έργο της δύναμης;

Επικαμπύλια ολοκληρώματα

Έστω μία δύναμη $\vec{F}$ η οποία επιδρά κατά μήκος μιας καμπύλης που ενώνει τα σημεία A, B όπως φαίνεται στο σχήμα.



Το έργο της δύναμης dW κατά μήκος της μήκος της στοιχειώδους μετατόπισης $d\vec{r}$ είναι

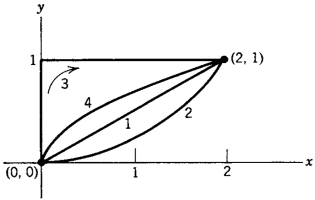
$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Μπορούμε να αθροίσουμε όλα αυτά τα dW ώστε να υπολογίσουμε το συνολικό έργο της δύναμης;

Ναι, αν καταφέρουμε να ολοκληρώσουμε τα dW. Πράγματι, η δύναμη $\vec{F}$ είναι συνάρτηση των x, y, z τα οποία με τη σειρά τους επειδή είναι σημεία μιας καμπύλης, είναι συναρτήσεις μόνο μιας μεταβλητής, έστω t. Άρα, το $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ είναι συνάρτηση μόνο της μεταβλητής t και έτσι μπορούμε να ολοκληρώσουμε.

Παράδειγμα

Έστω μία δύναμη $\vec{F} = xy\vec{i}_x - y^2\vec{i}_y$ και θέλουμε να υπολογίσουμε το έργο της κατά μήκος των 4 διαδρομών που φαίνονται στο σχήμα:



1. $y = \frac{1}{2}x$
2. $y = \frac{1}{4}x^2$
3. $x = 0, 0 \leq y \leq 1 \rightarrow y = 1, 0 \leq x \leq 2$
4. $x = 2t^3, y = t^2$

Παράδειγμα συνέχεια

1. $y = \frac{1}{2}x$

$$d\vec{r} = (dx, dy), y = \frac{1}{2}x \implies dy = \frac{1}{2}dx \implies$$

$$d\vec{r} = (1, \frac{1}{2})dx \implies$$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = (\frac{1}{2}x^2, -\frac{1}{4}x^2) \cdot (1, \frac{1}{2})dx = \frac{3}{8}x^2dx \implies$$

$$W = \int_{x=0}^{2} \frac{3}{8}x^2dx \implies$$

$$W = \frac{1}{8}x^3\Big|_0^2 = 1$$

Παράδειγμα συνέχεια

2. $y = \frac{1}{4}x^2$

$$d\vec{r} = (dx, dy), y = \frac{1}{4}x^2 \implies dy = \frac{1}{2}xdx \implies$$

$$d\vec{r} = (1, \frac{1}{2}x)dx \implies$$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = (\frac{1}{4}x^3, -\frac{1}{16}x^4) \cdot (1, \frac{1}{2}x)dx = \left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{32}x^5\right) dx \implies$$

$$W = \int_{x=0}^{2} \left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{32}x^5\right) dx \implies$$

$$W = \left(\frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{192}x^6\right)_0^2 = \frac{2}{3}$$

Παράδειγμα συνέχεια

3. $x = 0, 0 \le y \le 1 \to y = 1, 0 \le x \le 2$. Εδώ θα υπολογίσουμε πρώτα πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα από το $(0, 0)$ στο $(0, 1)$ και στη συνέχεια πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα από το $(0, 1)$ στο $(2, 1)$.

$$x = 0,\ 0 \le y \le 1,\ d\vec{r} = (dx, dy) = (0, dy) \implies$$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = (0, -y^2) \cdot (0, dy) = -y^2 dy \implies$$

$$W_1 = -\int_{y=0}^{1} y^2 dy = -\frac{1}{3} y^3 \Big|_0^1 = -\frac{1}{3}$$

$$y = 1, 0 \le x \le 2\ d\vec{r} = (dx, dy) = (dx, 0) \implies$$

$$dW = \vec{F} \cdot (dx, 0) = (x, -1) \cdot (dx, 0) = xdx$$

$$W_2 = \int_{x=0}^{2} xdx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^2 = 2$$

$$W = W_1 + W_2 = \frac{5}{3}$$

Παράδειγμα συνέχεια

4. $x = 2t^3, y = t^2$

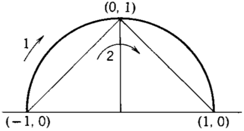
$$x = 2t^3,\ y = t^2,\ dx = 6t^2dt, dy = 2tdt$$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = (2t^5, -t^4) \cdot (6t^2, 2tdt) = (12t^7 - 2t^5)dt \implies$$

$$W = \int_{t=0}^{1} (12t^7 - 2t^5)dt = \frac{7}{6}$$

Παράδειγμα

Ας δούμε τώρα μια άλλη ενδιαφέρουσα περίπτωση. Έστω $\vec{F} = \frac{1}{x^2+y^2}(-y\vec{i}_x + x\vec{i}_y)$ και θέλουμε να υπολογίσουμε το έργο πάνω στις διαδορμές 1,2 που φαίνονται στο σχήμα.



1. $x = \cos t,\ y = \sin t$ όπου το t ξεκινά από π και πάει στο 0.
2. $y = x + 1,\ -1 \leq x \leq 0 \to y = -x + 1,\ 0 \leq x \leq 1$

Παράδειγμα - συνέχεια

1.

$$dx = -\sin t dt, \;\; dy = \cos t dt, \;\; \vec{F} = (-\sin t, \cos t) \implies$$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t)dt = dt \implies$$

$$W = \int_{t=\pi}^{0} dt = -\pi$$

Παράδειγμα - συνέχεια

2.

$$W_1 = \int_{-1}^{0} \frac{-dx}{2x^2+2x+1} = \int_{-1}^{0} \frac{-2dx}{(2x+1)^2+1} \implies$$

$$W_1 = -\tan^{-1}(2x+1)\Big|_{-1}^{0} = -\frac{\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$W_2 = \int_{0}^{1} \frac{-2dx}{(2x-1)^2+1} = -\tan^{-1}(2x-1)\Big|_{0}^{1} = -\frac{\pi}{2}$$

$$W_1 + W_2 = -\pi$$

Παρατήρηση:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

Συντηρητικά πεδία

Έστω $\vec{F} = \vec{\nabla}\phi$. Τότε:

$$\begin{aligned}\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_A^B \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r} \\ &= \int_A^B \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz\right) \\ &= \int_A^B d\phi \\ &= \phi(B) - \phi(A)\end{aligned}$$

δηλαδή το έργο της $\vec{F}$ δεν εξαρτάται από τη διαδρομή που ακολουθούμε αλλά μόνο από το τελικό και το αρχικό σημείο. Αυτό το διανυσματικό πεδίο λέγεται συντηρητικό. Σημειώστε εδώ πως αφού $\vec{F} = \vec{\nabla}\phi \implies \vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$.

Συντηρητικά πεδία - ισοδύναμοι ορισμοί

1. $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$
2. $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$
3. $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ανεξάρτητο της διαδρομής
4. $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ είναι πλήρες διαφορικό
5. $\vec{F} = \vec{\nabla}\phi$

Σημείωση: Όπως έχουμε ήδη δει, αν $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ τότε υπάρχει πάντα μια συνάρτηση ϕ τέτοια ώστε $\vec{F} = \vec{\nabla}\phi$. Είναι σύνηθες στη φυσική να επιλέγουμε μια συνάρτηση ϕ τέτοια ώστε $\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$ (συνάρτηση δυναμικού).

Παράδειγμα

Αν $\vec{F} = (2xy - z^3)\vec{i}_x + x^2\vec{i}_y - (3xz^2 + 1)\vec{i}_z$ να δείξετε ότι το πεδίο είναι συντηρητικό και να βρείτε τη συνάρτηση δυναμικού.

Παράδειγμα

Αν $\vec{F} = (2xy - z^3)\vec{i}_x + x^2\vec{i}_y - (3xz^2 + 1)\vec{i}_z$ να δείξετε ότι το πεδίο είναι συντηρητικό και να βρείτε τη συνάρτηση δυναμικού.

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy - z^3 & x^2 & -(3xz^2 + 1) \end{vmatrix} \\
&= (0, -3z^2 + 3z^2, 2x - 2x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Παράδειγμα - συνέχεια

Η συνάρτηση δυναμικού μπορεί να προσδιοριστεί με ακρίβεια μιας σταθεράς. Πράγματι, αν $\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$ τότε και η συνάρτηση $\psi = \phi + const$ θα είναι συνάρτηση δυναμικού (γιατί $\vec{\nabla} const = 0$). Έτσι, μπορούμε να θέσουμε το δυναμικό 0 στην αρχή των αξόνων. Έτσι, $\phi(P) = -\int_0^P \vec{F}\cdot d\vec{r}$ όπου το σημείο P είναι το σημείο (x, y, z). Επιλέγουμε τη διαδρομή

$$(0,0,0) \xrightarrow[1]{dy=dz=0} (x,0,0) \xrightarrow[2]{dx=dz=0} (x,y,0) \xrightarrow[3]{dx=dy=0} (x,y,z)$$

1. $\vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \implies W_1 = 0$
2. $\vec{F}\cdot d\vec{r} = x^2 dy \implies W_2 = \int_0^y x^2 dy = x^2 y$
3. $\vec{F}\cdot d\vec{r} = -(3xz^2+1)dz \implies W_3 = -\int_0^z (3xz^2+1)dz = -xz^3 - z$

Έτσι: $\phi = -(W_1 + W_2 + W_3) = -x^2y + xz^3 + z$

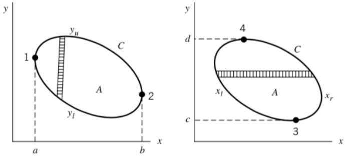
Περιεχόμενα

Ας ξεκινήσουμε με το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού:

$$\int_a^b \frac{d}{dt} f(t)\, dt = f(b) - f(a)$$

Ας ξεκινήσουμε με το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού:

$$\int_a^b \frac{d}{dt} f(t)\, dt = f(b) - f(a)$$

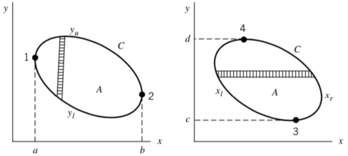


Μπορούμε να ολοκληρώσουμε είτε πρώτα ως προς x είτε ως προς y. Έστω

$$I_1 = \iint_A \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\, dy\, dx$$

Ας ξεκινήσουμε με το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού:

$$\int_a^b \frac{d}{dt} f(t)\, dt = f(b) - f(a)$$



Μπορούμε να ολοκληρώσουμε είτε πρώτα ως προς x είτε ως προς y. Έστω

$$I_1 = \iint_A \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\, dy\, dx$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_a^b dx \int_{y_l}^{y_u} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\, dy \\ &= -\int_a^b P(x, y_l)\, dx - \int_b^a P(x, y_u) dx \\ &= -\oint_C P(x,y) dx \end{aligned}$$

Με όμοιο τρόπο μπορούμνε να ολοκληρώσουμε πρώτα ως προς y. Έτσι μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\iint_A \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\,dx\,dy = \oint_C Q(x,y)dy$$

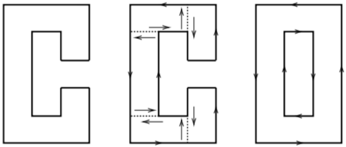
Γράφοντας μαζί τις δύο σχέσεις έχουμε το θεώρημα του Green στο επίπεδο:

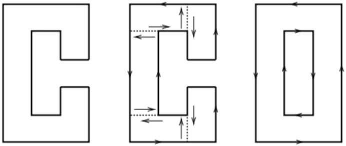
$$\iint_A \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)\,dx\,dy = \oint_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

όπου A ένα χωρίο και C το σύνορο του χωρίου, δηλαδή η καμπύλη που περικλείει το χωρίο.

Σημείωση 1:

Το χωρίο δεν είναι απαραίτητο να είναι συνεκτικό.





Σημείωση 1:
Το χωρίο δεν είναι απαραίτητο να είναι συνεκτικό.

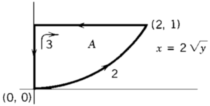
Σημείωση 2:
Αν $\vec{F}$ ένα συντηρητικό πεδίο, τότε $\oint \vec{F}\, d\vec{r} = 0$. Πράγματι:

$$\begin{aligned}\oint F_x dx + F_y dy &= \iint \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) dx\, dy \\ &= \iint (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{i}_z\, dx\, dy \\ &= 0\end{aligned}$$

γιατί ο στροβιλισμός ενός συντηρητικού πεδίου είναι ταυτοτικά 0.

Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \oint_{\partial A} xy\, dx - y^2\, dy$ πάνω στο περίβλημα ∂A του χωρίου A που φαίνεται στο σχήμα.



$$I = W_2 - W_3 = 2/3 - 5/3 = -1$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Green έχουμε:

$$\begin{aligned} I &= \iint_A \left(\frac{\partial}{\partial x}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(xy) \right) dx\, dy \\ &= \iint_A (-x) dx\, dy = -\int_{y=0}^{1} dy \int_{x=0}^{2\sqrt{y}} x dx \\ &= -\int_0^1 2y\, dy \\ &= -1 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2 - Υπολογισμός εμβαδού

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν E ενός κυκλικού δίσκου με ακτίνα a. Τότε

$$E = \iint_A dx\, dy = \iint_A 1\, dx\, dy$$

Μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Green αρκεί να βρούμε P, Q τέτοιες ώστε:

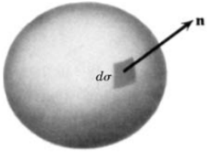
$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

Έχουμε άπειρες δυνατότητες. Οι πιο απλές είναι: $Q = x,\ P = 0$ ή $Q = 0,\ P = -y$. Ας πάρουμε την πρώτη:

$$\begin{aligned} E &= \oint_{\partial A} x\, dy = \int_0^{2\pi} a^2 \cos^2 t\, dt \\ &= \pi a^2 \end{aligned}$$

Περιεχόμενα

Έχουμε δει πως η φυσική σημασία της απόκλισης ενός διανύσματος $\vec{V}$ είναι ένα μέτρο της ροής του διανύσματος που γεννιέται ή καταστρέφεται σε ένα σημείο. Μπορούμε λοιπόν να γράφουμε:



$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V}\,\delta\tau = \iint_{\partial\,\delta\tau} \vec{V}\cdot\vec{n}\,d\sigma$$

ή

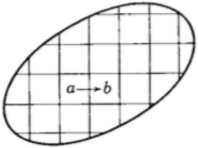
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \lim_{\delta\tau\to 0}\iint_{\partial\,\delta\tau} \vec{V}\cdot\vec{n}\,d\sigma$$

Επίσης, αν ρ η πυκνότητα σε ένα σημείο, τότε:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

η οποία λέγεται και εξίσωση της συνέχειας.

Έστω ένας όγκος Ω και χωρίζουμε σε στοιχειώδεις όγκους $d\tau_i$.



$$\sum_i \vec{\nabla} \cdot \vec{V}\, d\tau_i$$

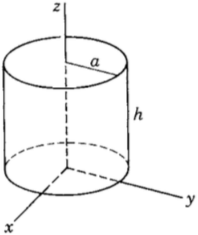
και επειδή οι ροές αλληλοαναιρούνται, προκύπτει

$$\iiint_\Omega \vec{\nabla} \cdot \vec{V}\, d\tau = \iint_{\partial\Omega} \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma$$

το οποίο ονομάζεται θεώρημα της απόκλισης.

Παράδειγμα

Να επαληθευθεί το θεώρημα της απόκλισης αν $\vec{V} = x\vec{i}_x + y\vec{i}_y + z\vec{i}_z$ και ο όγκος είναι ο κύλινδρος που φαίνεται στο σχήμα.



Είναι $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 3$ και έτσι

$$I = \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{V} d\tau = 3\pi a^2 h$$

Η επιφάνεια που περικλείει τον όγκο είναι η επιφάνεια του κυλίνδρου, και οι επίπεδες επιφάνεις στο $z = 0$ και στ $z = h$.

Παράδειγμα - συνέχεια

$$z = 0, \vec{V} = (x, y, 0), \ \vec{n} = -\vec{i_z} \implies \vec{V} \cdot \vec{n} = 0 \implies I_1 = 0$$

$$z = h, \vec{V} = (x, y, h), \ \vec{n} = \vec{i_z} \implies \vec{V} \cdot \vec{n} = h \implies I_2 = \pi a^2 h$$

και στην επιφάνεια του κυλίνδρου

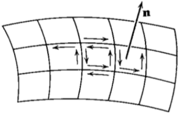
$$\vec{V} = a\vec{i_r} + z\vec{i_z}, \ \vec{n} = \vec{i_r} \implies \vec{V} \cdot \vec{n} = a$$

$$I_3 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h a \cdot a \, dz = 2\pi a^2 h \implies$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 3\pi a^2 h$$

Περιεχόμενα

Έχουμε δει ότι

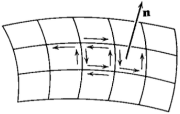


$$(\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot \vec{n}\, d\sigma = \oint_{\partial d\sigma} \vec{V} \cdot d\vec{r}$$

Τότε προκύπτει ότι:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot \vec{n} = \lim_{d\sigma \to 0} \oint_{\partial d\sigma} \vec{V} \cdot d\vec{r}$$

Έχουμε δει ότι



$$(\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot \vec{n}\, d\sigma = \oint_{\partial d\sigma} \vec{V} \cdot d\vec{r}$$

Τότε προκύπτει ότι:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot \vec{n} = \lim_{d\sigma \to 0} \oint_{\partial d\sigma} \vec{V} \cdot d\vec{r}$$

Αν χωρίσουμε μια επιφάνεια S σε στοιχειώδεις επιφάνεις $d\sigma_i$ και εφαρμόσουμε την παραπάνω σχέση, τότε όλα τα επικαμπύλια ολοκληρώματα αλληλοαναιρούνται εκτός από το περίβλημα της επιφάνειας. Έτσι $\sum_i \oint_{d\sigma_i} \vec{V} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot \vec{n} d\sigma$ ή

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot \vec{n} d\sigma = \oint_{\partial S} \vec{V} \cdot d\vec{r}$$

το οποίο ονομάζεται θεώρημα του Stokes .

Παράδειγμα

Να επαληθευθεί το θεώρημα του Stokes για $\vec{V} = 4y\vec{i}_x + x\vec{i}_y + 2z\vec{i}_z$ πάνω στο ημισφαίριο $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \ z \geq 0$

Παράδειγμα

Να επαληθευθεί το θεώρημα του Stokes για $\vec{V} = 4y\vec{i}_x + x\vec{i}_y + 2z\vec{i}_z$ πάνω στο ημισφαίριο $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ z \geq 0$ Ας ξεκινήσουμε πρώτα με το επιφανειακό ολοκλήρωμα. Έχουμε:

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r},\ \vec{\nabla} \times \vec{V} = -3\vec{i}_z \implies (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot \vec{n} = -3\frac{z}{a}$$

$$z = a\cos\theta,\ d\sigma = a^2 \sin\theta d\theta\, d\phi \implies$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} (-3\frac{a\cos\theta}{a}) a^2 \sin\theta d\theta \implies$$

$$I = -3\pi a^2$$

Παράδειγμα - συνέχεια

Το περίβλημα της επιφάνειας είναι ο κύκλος $x^2 + y^2 = a^2$ πάνω στο επίπεδο $x - y$. Έτσι:

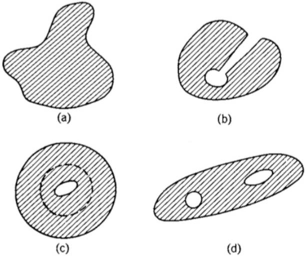
$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = 0,\ d\vec{r} = a(-\sin t, \cos t, 0)dt \implies$$

$$\vec{V} \cdot d\vec{r} = (4a\sin t, a\cos t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)\, a\, dt = (a^2 - 5a^2 \sin^2 t)\, dt \implies$$

$$I = \int_0^{2\pi} (a^2 - 5a^2 \sin^2 t)dt = -3\pi a^2$$

Μπορείτε επίσης να δείτε ότι το ίδιο περίβλημα έχει και η επιφάνεια $x^2 + y^2 \le a^2$ πάνω στο επίπεδο $x - y$!

Συντηρητικά πεδία



Έστω ένα πεδίο $\vec{V}$ του οποίου οι συνιστώσες έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους και ορίζεται σε ένα απλά συνεκτικό χωρίο. Τότε:

1. $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$
2. $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$
3. $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ανεξάρτητο της διαδρομής (συντηρητικό πεδίο)
4. $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ είναι πλήρες διαφορικό
5. $\vec{F} = \vec{\nabla}\phi$

Συντηρητικά και σωληνοειδή πεδία

- Αν $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$ έχουμε δεί ότι υπάρχει συνάρτηση δυναμικού ϕ τέτοια ώστε $\vec{V} = -\vec{\nabla}\phi$. Αυτό το πεδίο είναι συντηρητικό.

Συντηρητικά και σωληνοειδή πεδία

- Αν $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$ έχουμε δεί ότι υπάρχει συνάρτηση δυναμικού ϕ τέτοια ώστε $\vec{V} = -\vec{\nabla}\phi$. Αυτό το πεδίο είναι συντηρητικό.
- Αν τώρα $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$ τότε υπάρχει διάνυσματικό πεδίο $\vec{A}$ τέτοιο ώστε $\vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ (μάλιστα υπάρχουν άπειρα τέτοια πεδία γιατί $\vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla}\phi) = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Αυτό το πεδίο λέγεται σωληνοειδές και το διανυσματικό πεδίο $\vec{A}$ λέγεται διανυσματικό δυναμικό.

Συντηρητικά και σωληνοειδή πεδία

- Αν $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$ έχουμε δεί ότι υπάρχει συνάρτηση δυναμικού ϕ τέτοια ώστε $\vec{V} = -\vec{\nabla}\phi$. Αυτό το πεδίο είναι συντηρητικό.
- Αν τώρα $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$ τότε υπάρχει διάνυσματικό πεδίο $\vec{A}$ τέτοιο ώστε $\vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ (μάλιστα υπάρχουν άπειρα τέτοια πεδία γιατί $\vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla}\phi) = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Αυτό το πεδίο λέγεται σωληνοειδές και το διανυσματικό πεδίο $\vec{A}$ λέγεται διανυσματικό δυναμικό.
- Και στις δύο περιπτώσεις μπορούμε να βρούμε είτε το ϕ είτε το $\vec{A}$.

Παράδειγμα

Να δείξετε ότι το πεδίο $\vec{V} = (x^2 - yz)\vec{i}_x - 2yz\vec{i}_y + (z^2 - 2zx)\vec{i}_z$ είναι σωληνοειδές και να βρείτε το διανυσματικό δυναμικό.

Παράδειγμα

Να δείξετε ότι το πεδίο $\vec{V} = (x^2 - yz)\vec{i_x} - 2yz\vec{i_y} + (z^2 - 2zx)\vec{i_z}$ είναι σωληνοειδές και να βρείτε το διανυσματικό δυναμικό.

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{V} &= 2x - 2z + 2z - 2x \\ &= 0 \end{aligned}$$

Παράδειγμα

Να δείξετε ότι το πεδίο $\vec{V} = (x^2 - yz)\vec{i}_x - 2yz\vec{i}_y + (z^2 - 2zx)\vec{i}_z$ είναι σωληνοειδές και να βρείτε το διανυσματικό δυναμικό.

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{V} &= 2x - 2z + 2z - 2x \\ &= 0 \end{aligned}$$

Αφού μπορούμε να έχουμε άπειρες επιλογές για το δυανυσματικό δυναμικό (μπορούμε να προσθέσουμε τη βαθμίδα οποιασδήποτε συνάρτησης) μπορούμε να επιλέξουμε ένα διανυσματικό δυναμικό της μορφής $\vec{A} = (0, A_y, A_z)$. Τότε:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & A_y & A_z \end{vmatrix} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, -\frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) \\ &= (x^2 - yz, -2yz, z^2 - 2zx) \end{aligned}$$

Παράδειγμα - συνέχεια

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} = z^2 - 2zx \implies A_y = z^2x - zx^2 + f_1(y,z)$$

$$-\frac{\partial A_z}{\partial x} = -2yz \implies A_z = 2xyz + f_2(y,z)$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = x^2 - yz \implies$$

$$2xz + \frac{\partial f_2(y,z)}{\partial y} - 2zx + x^2 - \frac{\partial f_1(y,z)}{\partial z} = x^2 - yz \implies$$

$$\frac{\partial f_2(y,z)}{\partial y} - \frac{\partial f_1(y,z)}{\partial z} = -yz$$

Μπορούμε να επιλέξουμε $f_2 = 0$, $f_1 = \frac{1}{2}yz^2$. Τότε:

$$\vec{A} = (0, z^2x - zx^2 + \frac{1}{2}yz^2, 2xyz)$$

Περιεχόμενα

Χρήσιμες ταυτότητες

Στις παρακάτω ταυτότητες, Ω είναι ένας όγκος, $d\tau$ είναι ο στοιχειώδης όγκος, $\partial\Omega$ είναι η επιφάνεια που καλύπτει τον όγκο Ω, $\vec{n}$ το κάθετο διάνυσμα σε αυτήν την επιφάνεια, $d\sigma$ το στοιχειώδες εμβαδόν, S μια ανοικτή επιφάνεια και ∂S η καμπύλη που είναι το σύνορο της S.

- $$\iiint_\Omega \vec{\nabla}\phi d\tau = \oint_{\partial\Omega} \phi\vec{n}\, d\sigma$$

  Εφαρμογή του θεωρήματος απόκλισης με $\vec{V} = \phi\vec{C}$, όπου $\vec{C}$ είναι ένα τυχαίο σταθερό διάνυσμα.

- $$\iiint_\Omega \vec{\nabla}\times\vec{V} d\tau = \oint_{\partial\Omega} \vec{n}\times\vec{V}\, d\sigma$$

  Εφαρμογή του θεωρήματος απόκλισης με $\vec{V} = \vec{V}\times\vec{C}$, όπου $\vec{C}$ είναι ένα τυχαίο σταθερό διάνυσμα.

Χρήσιμες ταυτότητες

- $$\oint_{\partial S} \phi \, d\vec{r} = \iint_S (\vec{n} \times \vec{\nabla}\phi) \, d\sigma$$

  Εφαρμογή του θεωρήματος Stokes με $\vec{V} = \phi\vec{C}$, όπου $\vec{C}$ είναι ένα τυχαίο σταθερό διάνυσμα.

- $$\oint_{\partial S} d\vec{r} \times \vec{V} = \iint_S (\vec{n} \times \vec{\nabla}) \times \vec{V} \, d\sigma$$

  Εφαρμογή του θεωρήματος Stokes με $\vec{V} = \vec{V} \times \vec{C}$, όπου $\vec{C}$ είναι ένα τυχαίο σταθερό διάνυσμα.

Σύνοψη

- Επικαμπύλια ολοκληρώματα, έργο δύναμης και συντηρητικά πεδία
- Θεώρημα Green στο επίπεδο
- Θεώρημα απόκλισης
- Θεώρημα Stokes

Οδηγίες μελέτη

- Η ύλη που καλύπτει αυτή η διάλεξη υπάρχει στα βιβλία που προτείνονται για το μάθημα
- Η 8η σειρά ασκήσεων καλύπτει τα επικαμπύλια ολοκληρώματα ενώ η 9η σειρά ασκήσεων καλύπτει τα θεωρήματα Green, Stokes και απόκλισης