1 Εισαγωγικές έννοιες

1.1 Συναρτήσεις, παραγώγιση και ολοκλήρωση

- Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$\begin{gathered} sin^2x + cos^2x = 1 \\ sin(x+y) = sinx \cdot cosy + cosx \cdot siny \\ cos(x+y) = cosx \cdot cosy - sinx \cdot siny \\ sin(\frac{\pi}{2} - x) = cosx \\ cos(\frac{\pi}{2} - x) = sinx \\ sin(-x) = -sinx \\ cos(-x) = cosx \end{gathered} \tag{1}$$

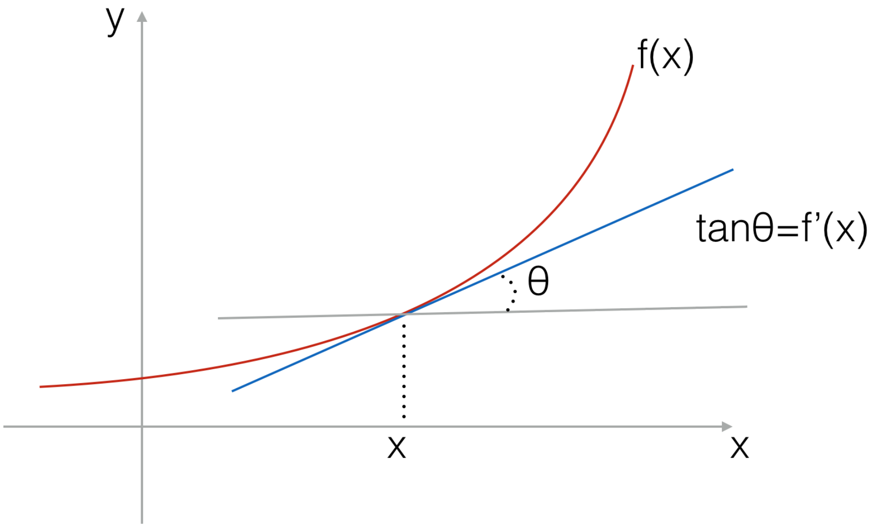
- Εκθετική συνάρτηση

$$\begin{gathered} e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ e^{lnx} = ln(e^x) = x \\ e^x \cdot e^y = e^{x+y} \\ \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \\ (e^y)^y = e^{xy} \\ ln(xy) = lnx + lny \\ ln(\frac{x}{y}) = lnx - lny \\ ln(x^y) = y \cdot lnx \end{gathered} \tag{2}$$

- Παράγωγος

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{3}$$

Η παράγωγος της f στο σημείο x μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι εκείνος ο γραμμικός μετασχηματισμός (δηλ. η ευθεία γραμμή) που προσεγγίζει με τον καλίτερο τρόπο (δηλ. εφάπτεται) την f στο σημείο x. Αυτός ο ορισμός μπορεί να επεκταθεί και σε συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. Το αντίστροφο δεν ισχύει (μπορείτε να δείτε τηε συνάρτηση $f(x) = |x|$ η οποία αν και συνεχής στο $x = 0$ δεν είναι παραγωγίσιμη.
Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα, τότε από το πρόσημο της παραγώγου μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα για τη μονοτονία της συνάρτησης.



Σχήμα 1: Παράγωγος συνάρτησης.

Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη και σε κάποιο σημείο έχει τοπικό ακρότατο, τότε η παράγωγος σε αυτό το σημείο μηδενίζεται.
Ιδιότητες παραγώγων:

$$\begin{aligned}(f+g)' &= f'+g' \\ (fg)' &= f'g+fg' \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g-fg'}{g^2}\end{aligned} \tag{4}$$

- Σύνθεση συναρτήσεων
Ας υποθέσουμε πως έχουμε μια συνάρτηση $f : A \to B$ και μια συνάρτηση $g : B \to C$ (σχήμα 2.3). Τότε μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση $g \circ f : A \to C$ με $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Για τη παράγωγο έχουμε:

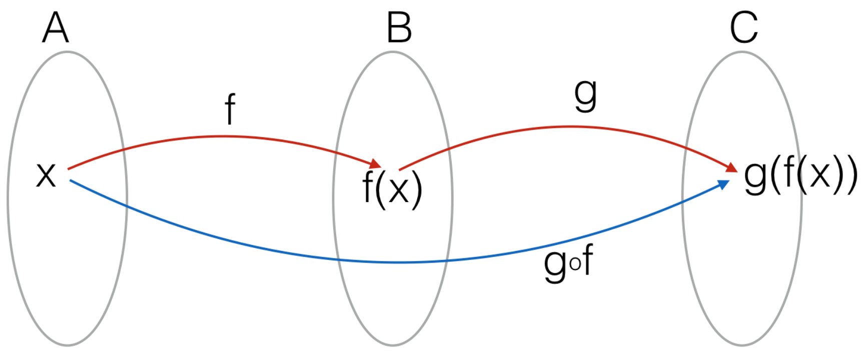
$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) \tag{5}$$

- Ολοκλήρωση
Το εμβαδό μεταξύ της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης και του άξονα x (σχήμα 3) θα είναι:

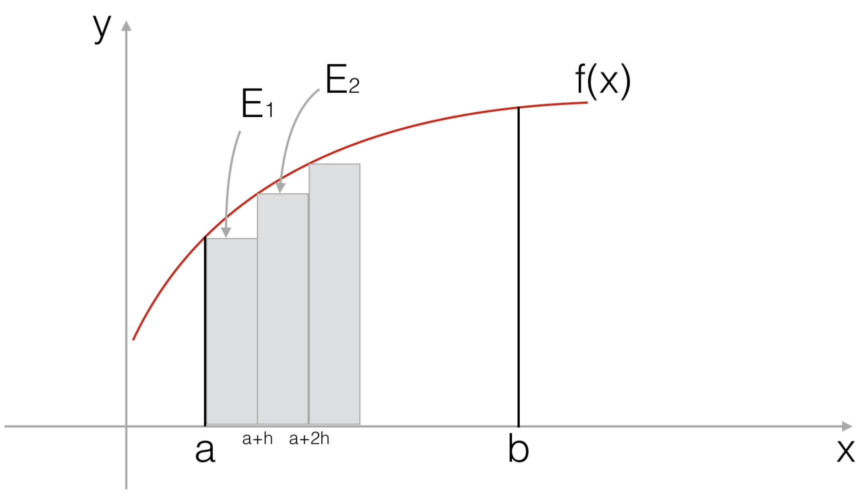
$$E(h) \simeq \sum_{n=1}^{N} f(a+(n-1)h) \cdot h \ , \ N = \frac{b-a}{h} \tag{6}$$

Ορίζουμε σαν το ορισμένο ολοκλήρωμα της f από το a στο b:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h \to 0} E(h) \tag{7}$$



Σχήμα 2: Σύνθεση συναρτήσεων.



Σχήμα 3: Ορισμένο ολοκλήρωμα.

Ιδιότητες:

$$\begin{array}{c} \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \\ \int_a^b (-f(x))dx = -\int_a^b f(x)dx \\ a < b < c\ ,\ \int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \\ \int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \end{array} \tag{8}$$

Το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού:

$$\begin{array}{rcl} \frac{d}{dx}\int_a^x f(s)ds &=& \lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(s)ds - \int_a^x f(s)ds}{h} \\ &=& \lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(s)ds}{h} \\ &=& \lim_{h\to 0}\frac{hf(x)}{h} \\ &=& f(x) \end{array} \tag{9}$$

Ετσι, αν

$$F(x) = \int_a^x f(s)ds + C => F'(x) = f(x) \tag{10}$$

και τότε:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \tag{11}$$

και μπορούμε να ορίσουμε σαν το αόριστο ολοκλήρωμα τη συνάρτηση F, δηλαδή:

$$\int f(x)dx = F(x) \tag{12}$$

Παραδείγματα:

$$\begin{array}{c} \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \\ \int \frac{1}{x}dx = lnx + C \\ \int cosxdx = sinx + C \\ \int sinxdx = -cosx + C \end{array} \tag{13}$$

- Αλλαγή μεταβλητής:

$$\frac{d}{dx}\left(f(g(x))\right) = f'(g(x))g'(x) \tag{14}$$

έτσι:

$$\int f'(g(x))g'(x)dx = f(g(x)) + C \tag{15}$$

όμως, λαμβάνοντας υπόψη ότι $g'(x)dx = dg(x)$ έχουμε:

$$\int f'(g(x))g'(x)dx = \int f'(g(x))dg(x) \tag{16}$$

και αν θέσουμε $u = g(x)$ έχουμε:

$$\int f'(g(x))dg(x) = \int f'(u)du = f(u) + C = f(g(x)) + C \tag{17}$$

- Παραγοντική ολοκλήρωση
  Επειδή $(fg)' = f'g + fg'$ θα έχουμε $f'g = (fg)' - fg'$. Έτσι:

$$\int f'(g(x))g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx \tag{18}$$

ή όπως μπορούμε να το γράψουμε πιο απλά:

$$\int fdg = fg - \int gdf \tag{19}$$

- Ανάπτυγμα Taylor
  Κάθε ομαλή συνάρτηση f σε μια περιοχή ενός σημείου a (δηλαδή απείρως παραγωγίσιμη σε αυτήν την περιοχή) μπορεί να γραφεί:

$$f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\cdot(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}\cdot(x-a)^3 + \dots \tag{20}$$

ή

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n \tag{21}$$

όπου $f^{(0)} = f$.
Παραδείγματα σειρών Taylor:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{22}$$

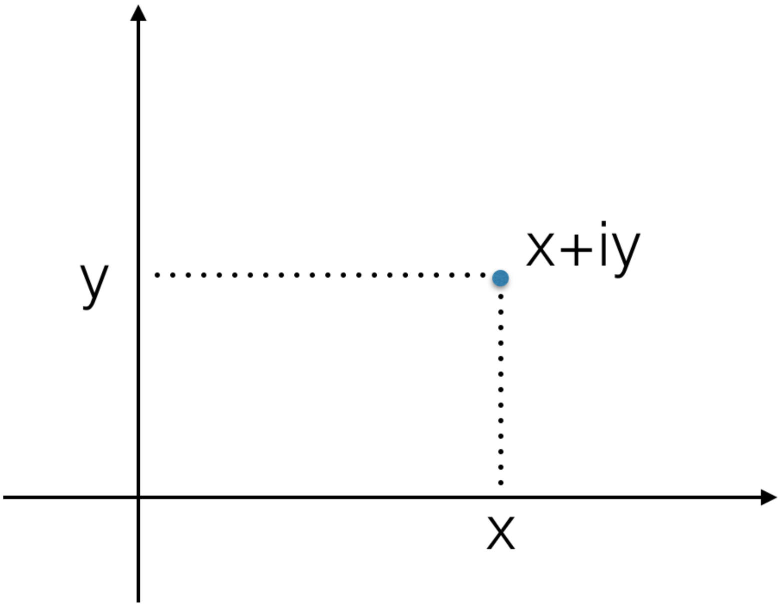
$$sinx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{23}$$

$$cosx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{24}$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \tag{25}$$

$$ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n} \tag{26}$$

- Μιγαδικοί αριθμοί
  Αν θέσουμε $i^2 = -1$ τότε ένας μιγαδικός αριθμός ορίζεται ως $z = x + iy$ όπου το x είναι το πραγματικό του μέρος ($Re(z)$) και y το φανταστικό του ($Im(z)$). Υπάρχει μια φυσική ισομορφία μεταξύ των μιαδικών αριθμών και του επιπέδου όπως φαίνεται στο σχήμα 4. Αν $z = x + iy$ τότε ορίζουμε το συζυγή $\bar{z} = x - iy$ και ἐτσι $Re(z) =$



Σχήμα 4: Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών έχει μια φυσική ισομορφία με τα σημεία του Ευκλείδιου επιπέδου.

$1/2(z+\bar{z})$ και $Im(z) = 1/2(z-\bar{z})$. Επίσης $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$. Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

$$\begin{aligned} |z \cdot w| &= |z| \cdot |w| \\ \left|\frac{z}{w}\right| &= \frac{|z|}{|w|} \\ \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} &= \frac{\bar{z}}{\bar{w}} \\ \overline{z \cdot w} &= \bar{z} \cdot \bar{w} \end{aligned} \tag{27}$$

Αν πάρουμε τώρα το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης $e^{i\theta}$ θα έχουμε:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots\right) \\ &= cos\theta + isin\theta \end{aligned} \tag{28}$$

Έτσι $cos\theta = Re(e^{i\theta})$ και $sin\theta = Im(e^{i\theta})$. Επίσης $e^{i\pi/2} = i$, $e^{i\pi} = -1$.
Για κάθε μιγαδικό αριθμό z υπάρχουν r, θ ώστε $z = r \cdot e^{i\theta}$ με $r \geq 0$ και $-\pi < \theta \leq \pi$.

Ιδιότητες:

$$
\begin{aligned}
&cos(n\theta) + i \cdot sin(n\theta) = (cos\theta + i \cdot sin\theta)^n \\
&\int cos^2\theta d\theta = \tfrac{1}{4}(2\theta + sin2\theta) + C \\
&\int sin^2\theta d\theta = \tfrac{1}{4}(2\theta - sin2\theta) + C \\
&\int_0^{2\pi} sin^2\theta d\theta = \int_0^{2\pi} cos^2\theta d\theta = \pi
\end{aligned}
\tag{29}
$$

1.2 Σύνολα

Ας υποθέσουμε ότι $P(x)$ είναι μια λογική έκφραση η οποία περιλαμβάνει μια μεταβλητή x. Τότε κάθε τέτοια πρόταση ορίζει ένα σύνολο

$$S = \{x|P(x)\} \tag{30}$$

το οποίο περιλαμβάνει όλες τις τιμές της μεταβλητής x που επαληθεύουν την πρόταση $P(x)$. Δύο σύνολα είναι ίσα μόνο αν περιλαμβάνουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία. Ένα σύνολο A λέμε ότι είναι υποσύνολο του B και συμβολίζουμε $A \subset B$ μόνο αν κάθε στοιχείο το A είναι και στοιχείο του B. Έτσι, η ισότητα δύο συνόλων προκύπτει μόνο αν κάθε ένα από τα δύο υποψήφια σύνολα είναι υποσύνολο του άλλου, δηλ.

$$A = B \iff A \subset B \; and \; B \subset A \tag{31}$$

Με τον τρόπο που ορίσαμε τα σύνολα, είναι δυνατόν ένα σύνολο να περιέχει ως στοιχεία άλλα σύνολα. Ένα τέτοιο σύνολο το ονομάζουμε συλλογή και είναι σύνηθες να περιέχει μια μετρήσιμη ποσότητα συνόλων. Έτσι, μια τέτοια συλλογή τη συμβολίζουμε

$$\mathcal{U} = \{U_i, i \in I\} \tag{32}$$

όπου I ένα υποσύνολο των φυσικών αριθμών.

Ο ορισμός των συνόλων όπως δόθηκε παραπάνω καλύπτει όλες σχεδόν τις πρακτικές ανάγκες αλλά δημιουργεί και κάποιες λογικές δυσκολίες. Η πιο φημισμένη από αυτές είναι το γνωστό παράδοξο του Russell, σύμφωνα με το οποίο θεωρούμε τη συλλογή των συνόλων εκείνων που δεν περιέχουν τον εαυτό τους. Η συλλογή αυτή, αν δεν περιέχει τον εαυτό της, θα έπρεπε να είναι στοιχείο της ενώ αν περιέχει τον εαυτό της τότε αυτό εναντιώνεται στον ορισμό της συλλογής. Σε κάθε περίπτωση οδηγούμαστε σε άτοπο (υπάρχουν σύνολα που περιέχουν τον εαυτό τους, όπως το σύνολο όλων των συνόλων που έχουν άπειρα στοιχεία). Στις περιπτώσεις που θα συναντήσουμε, θα θεωρούμε πάντα σύνολα που δεν υποφέρουν από το παράδοξο του Russell.

Μπορούμε να ορίσουμε τώρα μερικές πράξεις στα σύνολα. Αρχικά έχουμε την τομή δύο συνόλων η οποία συμβολίζεται $A \cap B$ και ορίζεται να είναι το σύνολο των κοινών στοιχείων των δύο συνόλων. Αν τα σύνολα δεν έχουν κοινά στοιχεία, τότε το αποτέλεσμα είναι το κενό σύνολο το οποίο συμβολίζεται είτε $\{\}$ είτε $\emptyset$. Όμοια μπορούμε να ορίσουμε την ένωση δύο συνόλων, η οποία συμβολίζεται $A \cup B$, σαν το ελάχιστο σύνολο του οποίου και τα δύο σύνολα είναι υποσύνολα. Έτσι

$$\begin{aligned} A \cap B = \{x | x \in A \; and \; x \in B\} \\ A \cup B = \{x | x \in A \; or \; x \in B\} \end{aligned} \tag{33}$$

Μια άλλη πράξη που μπορούμε να ορίσουμε είναι η διαφορά δύο συνόλων A, B η οποία συμβολίζεται με $A - B$ και είναι το σύνολο όλων των στοιχείων του πρώτου συνόλου που δεν ανήκουν στο δεύτερο. Έτσι,

$$A - B = \{x | x \in A \; and \; x \notin B\} = A \cap B' \tag{34}$$

όπου με B' συμβολίζουμε το σύνολο όλων των στοιχείων που δεν ανήκουν στο B (τις πιο πολλές φορές, όλα τα σύνολα με τα οποία δουλεύουμε είναι υποσύνολα κάποιου συνόλου το οποίο περιλαμβάνει όλα τα στοιχεία που μπορούν να είναι μέλη των συνόλων μας).

Δύο πολύ χρήσιμες σχέσεις για τις πράξεις μεταξύ συνόλων είναι οι τύποι DeMorgan:

$$\begin{aligned} (A \cap B)' = A' \cup B' \\ (A \cup B)' = A' \cap B' \end{aligned} \tag{35}$$

1.3 Το σύνολο $\mathcal{R}^n$

Έστω $\mathcal{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε το σύνολο

$$\mathcal{R}^n = \underbrace{\mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \ldots \times \mathcal{R}}_{n \; times} \tag{36}$$

σαν το σύνολο που τα στοιχεία του είναι όλες οι $n-$άδες της μορφής

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \tag{37}$$

με $a_i \in \mathcal{R}, \; i = 1, 2, \ldots, n$. Τα στοιχεία του $\mathcal{R}^n$ τα ονομάζουμε και διανύσματα.

Αν $A = (a_1, \ldots, a_n), \; B = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathcal{R}^n$ και $\lambda \in \mathcal{R}$ τότε ορίζουμε:

$$\begin{aligned} A + B = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \\ \lambda A = (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n) \end{aligned} \tag{38}$$

Έστω τώρα τα διανύσματα $A^1, A^2, \ldots, A^n$. Θα λέμε ότι αποτελούν μία βάση του $\mathcal{R}^n$ αν για κάθε διάνυσμα $B \in \mathcal{R}^n$ υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ τέτοιοι ώστε:

$$B = \beta_1 A^1 + \beta_2 A^2 + \ldots + \beta_n A^n \tag{39}$$

Ένα σύνολο από $k-$διανύσματα $A^1, A^2, \ldots, A^k$ θα λέμε ότι είναι ανάγωγο (ή ότι τα $A^1, A^2, \ldots, A^k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα) άν ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή:

$$\lambda_1 A^1 + \lambda_2 A^2 + \ldots + \lambda_k A^k = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0 \tag{40}$$

Ας θεωρήσουμε τώρα όλες τις γραμμικές συναρτήσεις από το $\mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$. Για μια τέτοια συνάρτηση T θα ισχύει:

$$T(\lambda_1 A^1 + \lambda_2 A^2) = \lambda_1 T(A^1) + \lambda_2 T(A^2) \tag{41}$$

Έτσι, αν έχουμε μια βάση $E^1, E^2, \ldots, E^n$ και ένα τυχαίο διάνυσμα $A = \sum_{i=1}^{n} a_i E^i$ θα ισχύει

$$T(A) = T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i E^i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i T\left(E^i\right) \tag{42}$$

Από την προηγούμενη σχέση μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η συνάρτηση T προσδιορίζεται πλήρως από τους $n-$αριθμούς $T(E^i)$ και μπορούμε να δείξουμε εύκολα ότι ο χώρος των γραμμικών συναρτήσεων T φέρει τη δομή του $\mathcal{R}^n$. Το χώρο αυτό τον ονομάζουμε δυικό χώρο του $\mathcal{R}^n$ και είναι ισόμορφος με τον $\mathcal{R}^n$.

Ορίζουμε τώρα σαν εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων τη διγραμμική συνάρτηση $< \cdot, \cdot >$: $\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες τρεις ιδιότητες:

$$\begin{gathered} < A, B > = < B, A > \\ < aA + bB, C > = < a < A, C > + b < B, C >, \; a, b \in \mathcal{R} \\ (A, A) \geq 0, \; < A, A > = 0 \Leftrightarrow A = 0 \end{gathered} \tag{43}$$

Ένα πολύ σύνηθες εσωτερικό γινόμενο ορίζεται σαν

$$< A, B > = \sum_{i=1}^{n} A_i B_i \tag{44}$$

όπου A_i, B_i οι συντεταγμένες των A, B.

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε το μέτρο ενός διανύσματος $\parallel A \parallel = \sqrt{< A, A >}$. Επίσης λέμε ότι δύο διανύσματα είναι μεταξύ τους κάθετα αν $< A, B > = 0$. Με τη βοήθεια των παραπάνω ορισμών μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ορθοκανονική βάση, της οποίας όλα τα μέλη είναι μεταξύ τους κάθετα και έχουν μοναδιαίο μέτρο.

Στ εξής θα συμβολίζουμε με A^i τη $i-$συντεταγμένη ενός διανύσματος στήλη

$$\begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} \tag{45}$$

και με A_i τη $i-$συντεταγμένη του διανύσματος γραμμή

$$(A_1, A_2, \ldots, A_n) \tag{46}$$

Επίσης, αν σε μια έκφραση συναντούμε τον ίδιο δείκτη να επαναλαμβάνεται και σαν δείκτης και σαν εκθέτης, τότε θα υπονοείται άθροιση πάνω σε όλες τις δυνατές τιμές του δείκτη. Έτσι:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b^i = a_i b^i \tag{47}$$

Ας θεωρήσουμε τώρα το σύνολο

$$(\mathcal{R}^n)^k = \underbrace{\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n \times \ldots \times \mathcal{R}^n}_{k \; times} \tag{48}$$

του οποίου τα στοιχεία μπορούν να γραφούν:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^k & a_2^k & \dots & a_n^k \end{pmatrix} \tag{49}$$

και τα ονομάζουμε πίνακες με διάσταση $k \times n$ (δηλαδή με $k-$γραμμές και $n-$στήλες). Παρατηρείστε ότι το στοιχείο της $i-$γραμμής και της $j-$στήλης το συμβολίζουμε με a_j^i. Με φυσιολογικό τρόπο μπορούμε τώρα να ορίσουμε την πρόσθεση δύο πινάκων καθώς και τον πολλαπλασιασμό ενός πραγματικού αριθμού με έναν πίνακα. επίσης, αν $A \in (\mathcal{R}^n)^k$ τότε θα λέμε ότι $A \in M_{k\times n}$.

Έστω τώρα ότι $A \in M_{k\times n}$ και $B \in M_{n\times s}$. Ορίζουμε τον πίνακα $C \in M_{k\times s}$ με στοιχεία

$$C_j^i = A_l^i B_j^l \tag{50}$$

Στη συνέχεια θα θεωρούμε πίνακες που ενήκουν στο $M_{n\times n}$, δηλαδή έχουν $n-$γραμμές και $n-$στήλες.

Ο πίνακας A^T ονομάζεται ανάστροφος του A αν

$$\left(A^T\right)_j^i = A_i^j \tag{51}$$

δηλαδή εναλλάσσουμε τις γραμμές με τις στήλες. Επίσης, ο μοναδιαίος πίνακας I_n ορίζεται ως ο πίνακας με στοιχεία

$$(I_n)_j^i = \delta_j^i \tag{52}$$

όπου

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{53}$$

δηλαδή

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{54}$$

Ο αντίστροφος A^{-1} ενός πίνακα A ορίζεται σαν ο πίνακας για τον οποίο ισχύει

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n \tag{55}$$

Πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι δεν έχουν όλοι οι πίνακες αντίστροφο. Το σύνολο των πινάκων που έχουν αντίστροφο το συμβολίζουμε με $\mathcal{GL}\,(n, \mathcal{R})$.

1.4 Ορίζουσες

Έστω $\left(a^i_j\right) \in M_{n\times n}$. Ορίζουμε σαν ορίζουσα a του $\left(a^i_j\right)$ τον αριθμό

$$a = \sum_{j_1,j_2,\ldots,j_n} (-1)^k a^1_{j_1} \cdot a^2_{j_2} \cdots a^n_{j_n} \tag{56}$$

όπου η άθροιση εκτείνεται σε όλες τις $n!$ μεταθέσεις των $j_1, j_2, \ldots, j_n$ και το k παίρνει την τιμέ 0 η 1 ανάλογα με το αν η αντίστοιχη μετάθεση είναι άρτια ή περιττή.

Επειδή στον ορισμ'π της ορίζουσας τα στοιχεία $j_1, j_2, \ldots, j_n$ έχουν όλα μεταξύ τους διαφορετικές τιμές, μπορούμε να αναδιατάξουμε τους όρους του αθροίσματος και να γράψουμε

$$a = \sum_{j_1,j_2,\ldots,j_n} (-1)^k a^{j_1}_1 \cdot a^{j_2}_2 \cdots a^{j_n}_n \tag{57}$$

Παρατηρούμε λοιπόν πως η ορίζουσα του πίνακα $\left(a^i_j\right)$ αποτελείται από $n!$ όρους, κάθε ένας από τους οποίους είναι ένα γινόμενο $n-$στοιχείων του πίνακα, παίρνοντας κάθε φορά ένα στοιχεί από κάθε γραμμή και κάθε στήλη. Έτσι, αν $k-$μια τυχαία γραμμή του πίνακα, μπορούμε να γράψουμε

$$a = a^k_1 A^1_k + a^k_2 A^2_k + \ldots + a^k_n A^n_k \tag{58}$$

όπου με A^j_k συμβολίζουμε όλους τους όρους που συναντάμε στην ορίζουσα που περιέχουν το στοιχείο a^k_j (αφού βέβαια έχουμε βγάλει κοινό παράγοντα τον a^k_j). Επειδή λοιπόν κάθε όρος της ορίζουσας περιέχει μόνο ένα στοιχείο από κάθε γραμμή και κάθε στήλη, το στοιχείο A^j_k θα περιέχει όλους τους συνδυασμούς των στοιχείων του πίνακα αφού όμως έχουμε αφαιρέσει την $k-$γραμμή και την $j-$στήλη. Επιπλέον, πριν αφαιρέσουμε την $k-$γραμμή μπορούμε να την μετακινήσουμε $(k-1)$ θέσεις ώστε να την κάνουμε πρώτη γραμμή και το ίδιο μπορούμε να κάνουμε και για την $j-$στήλη. Έτσι το στοιχείο A^j_k ορίζεται να είναι η ορίζουσα του $(n-1)\times(n-1)$ πίνακα που προκύπτει αν αφαιρέσουμε την $k-$γραμμή και την $j-$στήλη πολλαπλασιασμένη με $(-1)^{k+j}$.

Ας δούμε μερικές βασικές ιδιότητες των οριζουσών:

- Αν δύο γραμμές ή δύο στήλες ενός πίνακα αλλάξουν θέση, τότε η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο. Πράγματι, οι δύο ορίζουσες θα έχουν ακριβώς το ίδιο σύνολο όρων με τη διαφορά όμως ότι κάθε άρτια μετάθεση των στοιχείων του ενός πίνακα θα είναι περιττή μετάθεση των στοιχείων του άλλου και έτσι κάθε όρος θα συναντάται με διαφορετικό πρόσημο.

- Αν δύο γραμμές ή δύο στήλες ενός πίνακα είναι ίδιες, τότε η ορίζουσα είνα μηδέν.

- Αν πολλαπλασιάσουμε μία γραμμή του πίνακα ή μια στήλη με έναν αριθμό, τότε η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με την ίδιο αριθμό.

- Αν προσθέσουμε τα στοιχεία μιας γραμμής (στήλης) με τα στοιχεία μιας άλλης γραμμής (στήλης) τότε η ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει είναι ίδια με του αρχικού πίνακα.

Επειδή τώρα $a = a_j^k A_k^j$ και το A_k^j δεν περιέχει τον όρο a_j^k θα έχουμε

$$A_k^j = \frac{\partial a}{\partial a_j^k} \tag{59}$$

Ας θεωρήσουμε τώρα το άθροισμα $a' = a_j^k A_l^j$. Επειδή ο όρος A_l^j όπως έχουμε πει έχει να κάνει με την ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει από τον A αν αφαιρέσουμε την $j-$στήλη και την $l-$γραμμή, είναι ανεξάρτητος από τα στοιχεία της $l-$γραμμής. Έτσι, μπορούμε στον πίνακα A να αντικαταστήσουμε τα στοιχεία της $l-$γραμμής με τα στοιχεία της $k-$γραμμής. Το άθροισμα λοιπόν $a_j^k A_l^j$ δεν είναι τίποτε άλλο από την ορίζουσα αυτού του νέου πίνακα η οποία είναι 0 γιατί έχει δύο ίδιες γραμμές (την k και την l). Έτσι, φτάσαμε στο συμπέρασμα ότι

$$a_j^k A_l^j = \delta_l^k \cdot a \tag{60}$$

Αν τώρα ορίσουμε τον πίνακα $\left(b_k^j\right)$ με $b_k^j = a^{-1} A_k^j$ θα έχουμε για το γινόμενο $\left(c_k^j\right)$ του $\left(b_k^j\right)$ με τον $\left(a_k^j\right)$

$$c_j^i = a_k^i b_j^k = a_k^i a^{-1} A_j^k = a a^{-1} \delta_j^i = (I_n)_j^i \tag{61}$$

και έτσι ο $\left(b_k^j\right)$ είναι ο αντίστροφος του $\left(a_k^j\right)$

1.5 Γραμμική άλγεβρα

Ορίζουμε τώρα το γενικευμένο σύμβολο του Kronecker:

$$\delta_{h_1 h_2 \ldots h_n}^{j_1 j_2 \cdots j_n} = \begin{vmatrix} \delta_{h_1}^{j_1} & \delta_{h_2}^{j_1} & \cdots & \delta_{h_n}^{j_1} \\ \delta_{h_1}^{j_2} & \delta_{h_2}^{j_2} & \cdots & \delta_{h_n}^{j_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{h_1}^{j_n} & \delta_{h_2}^{j_n} & \cdots & \delta_{h_n}^{j_n} \end{vmatrix} \tag{62}$$

Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι αν δύο από τα j_i ή δύο από τα h_i είναι μεταξύ τους ίσα, τότε το γενικευμένο σύμβολο του Kronecker είναι μηδέν γιατί η ορίζουσα θα έχει δύο γραμμές ή δύο στήλες ίδιες. Επίσης, όλοι οι όροι της ορίζουσας θα είναι 0 εκτός από έναν μόνο όρο ο οποίος θα είναι ή 1 ή -1. Αυτό συμβαίνει γιατί ο πίνακας έχει σε κάθε στήλη του και σε κάθε γραμμή του μόνο ένα στοιχείο που είναι ίσο με το 1 και όλα τα άλλα στοιχεία 0. Έτσι, ο μόνος μη μηδενικός όρος της ορίζουσας θα είναι αυτός που επιλέγει από κάθε στήλη και από κάθε γραμμή το μη μηδενικό στοιχείο. Το πρόσημο τώρα θα έχει να κάνει με το αν τα $j_1, j_2, \ldots, j_n$ είναι άρτια ή περιττή μετάθεση των $h_1, h_2, \ldots, h_n$. Έτσι

$$\delta_{h_1 h_2 \ldots h_n}^{j_1 j_2 \cdots j_n} = sgn \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_n \\ h_1 & h_2 & \cdots & h_n \end{pmatrix} \tag{63}$$

Έτσι για παράδειγμα

$$\delta_{321}^{123} = 1,\ \delta_{312}^{123} = -1,\ \delta_{112}^{123} = 0 \tag{64}$$

με τη βοήθεια τώρα του γενικευμένου συμβόλου Kronecker έχουμε για την ορίζουσα

$$a = \frac{1}{n!} \delta_{j_1 j_2 \ldots j_n}^{i_1 i_2 \ldots i_n} a_{i_1}^{j_1} \cdot a_{i_2}^{j_2} \cdots a_{i_n}^{j_n} \tag{65}$$

Ο όρος $\frac{1}{n!}$ εμφανίζεται γιατί υπολογίζουμε $n!$ φορές την ορίζουσα. Ορίζουμε τώρα το σύμβολο

$$\begin{aligned} \epsilon^{j_1 j_2 \dots j_n} &= \delta^{j_1 j_2 \dots j_n}_{1\,2\,\dots n} \\ \epsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} &= \delta^{1\,2\,\dots n}_{j_1 j_2 \dots j_n} \end{aligned} \tag{66}$$

Μπορούμε τώρα να γράψουμε για την ορίζουσα

$$\epsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} a = \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} \cdot a^{i_1}_{j_1} \cdot a^{i_2}_{j_2} \cdots a^{i_n}_{j_n} \tag{67}$$

και

$$\epsilon^{j_1 j_2 \dots j_n} a = \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} \cdot a^{j_1}_{i_1} \cdot a^{j_2}_{i_2} \cdots a^{j_n}_{i_n} \tag{68}$$

Έστω τώρα $\left(c^i_j\right) = \left(a^i_j\right) \cdot \left(b^i_j\right)$ δηλαδή $c^i_j = a^i_k b^k_j$. Τότε:

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{n!} \delta^{i_1 i_2 \dots i_n}_{j_1 j_2 \dots j_n} \cdot c^{j_1}_{i_1} \cdot c^{j_2}_{i_2} \cdots c^{j_n}_{i_n} \Rightarrow \\ c &= \frac{1}{n!} \delta^{i_1 i_2 \dots i_n}_{j_1 j_2 \dots j_n} \cdot a^{j_1}_{l_1} \cdot b^{l_1}_{i_1} \ \cdots \ a^{j_n}_{l_n} \cdot b^{l_n}_{i_n} \Rightarrow \\ c &= \frac{1}{n!} \frac{1}{n!} \delta^{i_1 i_2 \dots i_n}_{l_1 l_2 \dots l_n} \cdot \delta^{l_1 l_2 \dots l_n}_{j_1 j_2 \dots j_n} \cdot a^{j_1}_{l_1} \cdots a^{j_n}_{l_n} \ \cdot \ b^{l_1}_{i_1} \cdots b^{l_n}_{i_n} \Rightarrow \\ c &= a \cdot b \end{aligned} \tag{69}$$

δηλαδή η ορίζουσα του γινομένου δύο πινάκων είναι το γινόμενο των οριζουσών.

Έστω τώρα (x^i) ένα διάνυσμα που ικανοποιεί τις σχέσεις

$$a^i_j \cdot x^j = b^i \tag{70}$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2 + \ldots + a^1_n x^n &= b^1 \\ a^2_1 x^1 + a^2_2 x^2 + \ldots + a^2_n x^n &= b^2 \\ \vdots &= \vdots \\ a^n_1 x^1 + a^n_2 x^2 + \ldots + a^n_n x^n &= b^n \end{aligned}$$

Τότε, αν $\left(a^i_j\right) \in \mathcal{GL}(n, \mathcal{R})$, θα υπάρχει ο πίνακας $\left(a^i_j\right)^{-1}$. Έτσι:

$$\begin{aligned} \left(a^i_j\right)^{-1} \cdot \left(a^i_j\right) \cdot \left(b^i\right) &= \left(a^i_j\right)^{-1} \cdot \left(b^i\right) \Rightarrow \\ x^i &= (a^{-1})^i_j \cdot b^j \end{aligned} \tag{71}$$

Όμως

$$\left(a^{-1}\right)^i_j = \frac{1}{a} A^I_j \tag{72}$$

και έτσι

$$x^i = \frac{1}{a} b^j A^i_j \tag{73}$$

Θυμίζουμε τώρα ότι $a^1_{i_1} A^{i_1}_1 + a^2_{i-2} A^{i_2}_2 + \ldots + a^n_{j_i} A^{j_i}_n$ και έτσι το άθροισμα $b^j A^i_j$ δεν είναι τίποτε άλλο από την ορίζουσα του πίνακα $\left(a^i_j\right)$ στον οποίο έχουμε αντικαταστήσει την $i-$στήλη με το διάνυσμα (b^i).

Στην περίπτωση τώρα που ο πίνακας $\left(a^i_j\right) \notin \mathcal{GL}(n, \mathcal{R})$ διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν υπάρχει ορίζουσα $a_{(b,i)}$ που προκύπτει από την αντικατάσταση της $i-$στήλης με το διάνυσμα (b^i) και είναι 0, τότε μπορούμε να θέσουμε τον άγνωστο x^i σαν παράμετρο και να προσπαθήσουμε να λύσουμε για τους υπόλοιπους $n-1$ αγνώστους.
- Αν δεν υπάρχει ορίζουσα $a_{(b,i)}$ που προκύπτει από την αντικατάσταση της $i-$στήλης με το διάνυσμα (b^i) και να είναι 0, τότε δεν υπάρχουν λύσεις για τα x^i.

Έστω τώρα ένα διάνυσμα (x^i) με την ιδιότητα:

$$\left(a^i_j\right) \cdot \left(x^i\right) = \lambda \cdot \left(x^i\right) \tag{74}$$

δηλαδή

$$a^i_j \cdot x^j = \lambda x^i \tag{75}$$

τότε λέμε ότι το διάνυσμα (x^i) είναι ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $\left(a^i_j\right)$ με ιδιοτιμή λ.

Αν τώρα έχουμε έναν πίνακα $\left(a^i_j\right)$ με ιδιοδιανύσματα $(x^i_1), (x^i_2), \ldots, (x^i_k)$ και αντίστοιχες ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ με $\lambda_i \neq \lambda_j$ αν $i \neq j$, τότε τα $(x^i_1), (x^i_2), \ldots, (x^i_k)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Πράγματι, αν τα $(x^i_1), (x^i_2), \ldots, \left(x^i_{k-1}\right)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και τα $(x^i_1), (x^i_2), \ldots, (x^i_k)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα θα έχουμε:

$$a_1 \left(x^i_1\right) + a_2 \left(x^i_2\right) + \ldots +_{k-1} \left(x^i_{k-1}\right) + a_k \left(x^i_k\right) = 0 \tag{76}$$

με $a_1 \neq 0$. Πολλαπλασιάζοντας τώρα με $\left(a^i_j\right)$ θα έχουμε

$$a_1\lambda_1 \left(x^i_1\right) + a_2\lambda_2 \left(x^i_2\right) + \ldots +_{k-1} \lambda_{k-1} \left(x^i_{k-1}\right) + a_k\lambda_k \left(x^i_k\right) = 0 \tag{77}$$

Πολλαπλασιάζοντας τώρα την (76) με λ_k και αφαιρώντας από την (77) προκύπτει:

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_k) \left(x^i_1\right) + \ldots + a_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) \left(x^i_{k-1}\right) = 0 \tag{78}$$

Όμως τα $(x^i_1), (x^i_2), \ldots, \left(x^i_{k-1}\right)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και έτσι για παράδειγμα $\lambda_1 = \lambda_k$ πράγμα το οποίο είναι άτοπο. Έτσι τα $(x^i_1), (x^i_2), \ldots, (x^i_k)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Για να βρούμε τις ιδιοτιμές ενός πίνακα $\left(a^i_j\right)$ θα πρέπει:

$$\begin{aligned} \left(a^i_j\right) \cdot \left(x^i\right) &= \lambda \cdot \left(x^i\right) \Rightarrow \\ \left(\left(a^i_j\right) - \lambda I\right) \cdot \left(x^i\right) &= 0 \end{aligned} \tag{79}$$

Για να έχει όμως η (79) μη μεδενική λύση θα πρέπει

$$det\left(\left(a^i_j\right) - \lambda \cdot I\right) = 0 \tag{80}$$

η οποία είναι η χαρακτηριστική εξίσωση, οι ρίζες της οποίας μας δίνουν όλες τις δυνατές ιδιοτιμές. Αν ξέρουμε τις ιδιοτιμές μπορούμε να λύσουμε τα αντίστοιχα γραμμικά συστήματα και να υπολογίσουμε τα ιδιοδιανύσματα.

Μερικές ιδιότητες των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων είναι:

- Αν (x^i) είναι ιδιοδιάνυσμα του $\left(a^i_j\right)$ με ιδιοτιμή λ τότε και το διάνυσμα $\left(ka^i_j\right)$ είναι ιδιοδιάνυσμα με την ίδια ιδιοτιμή

- Αν $(x^i), (y^i)$ είναι ιδιοδιανύσματα με την ίδια ιδιοτιμή λ, τότε και το διάνυσμα $(kx^i) + (ly^i)$ είναι ιδιοδιάνυσμα με την ίδια ιδιοτιμή

Είναι φανερό πως αν $\left(a^i_j\right) \in \mathcal{GL}(n, \mathcal{R})$ τότε ἑχει το πολύ $n-$διαφορετικές ιδιοτιμές. Αν τώρα έχει ακριβώς $n-$διαφορετικές ιδιοτιμές, τότε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα επειδή είναι γραμμικά ανεξάρτητα θα αποτελούν και μία βάση του $(f^i_1), (f^i_2), \ldots, (f^i_n)$.

Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ οι $n-$διαφορετικές ιδιοτιμές του πίνακα $\left(a^i_j\right)$ και $(f^i_1), (f^i_2), \ldots, (f^i_n)$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Αν (x^i) ένα τυχαίο διάνυσμα, τότε επειδή τα $(f^i_1), (f^i_2), \ldots, (f^i_n)$ θα αποτελούν βάση του $(f^i_1), (f^i_2), \ldots, (f^i_n)$ θα έχουμε:

$$\left(x^i\right) = k_1 \left(f^i_1\right) + \ldots + k_n \left(f^i_n\right) \tag{81}$$

Έτσι

$$\left(a^i_j\right) \cdot \left(x^i\right) = k_1 \lambda_1 \left(f^i_1\right) + \ldots + k_n \lambda_n \left(f^i_n\right) \tag{82}$$

Έτσι, ως προς τη βάση $\left(f^i_j\right)$, ο πίνακας $\left(a^i_j\right)$ θα είναι διαγώνιος με τα διαγώνια στοιχεία να είναι οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

1.6 Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων: (i) $sinx^2$, (ii) $cose^x$ και (iii) x^x.
   Λύση:
   (i) Αν $f(x) = x^2$ και $g(x) = sinx$ τότε $sinx^2 = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$. Επομένως,

   $$\left(sinx^2\right)' = g'(f(x)) \cdot f'(x) = cosx^2 \cdot 2x$$

   (ii) Όμοια: $f(x) = cosx$ και $g(x) = e^x$. Τότε $cose^x = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$. Έτσι:

   $$(cose^x)' = -sine^x \cdot e^x$$

   (iii) Έχουμε $x^x = e^{x \cdot lnx}$. Έτσι:

   $$(x^x)' = e^{x \cdot lnx}(x \cdot lnx)' = x^x \cdot (1 + lnx)$$

2. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I_n = \int x^n e^x dx$.
   Λύση:

   $$I_n = \int x^n e^x dx = \int x^n de^x = x^n e^x - \int e^x dx^n = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx$$

   Έτσι $I_n = e^n e^x - n \cdot I_{n-1}$ και $i_0 = \int e^x dx = e^x + C$ και έτσι με αναδρομικό τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε το I_n.

3. Αν $B_1, B_2, \ldots B_n \in \mathcal{R}$ και $a^i_j = B_i \cdot B_j$ τα στοιχεία ενός πίνακα, να υπολογίσετε την $det\left(a^i_j\right)$.

Λύση:

$$det\left(a_j^i\right) = \sum_{j_1,\cdots j_n} (-1)^\sigma a_{j_1}^1 a_{j_2}^2 \ldots a_{j_n}^n \Rightarrow$$

$$det\left(a_j^i\right) = \sum_{j_1,\cdots j_n} (-1)^\sigma B_1 B_{j_1} B_2 B_{j_2} \ldots B_n B_{j_n} \Rightarrow$$

$$det\left(a_j^i\right) = \sum_{j_1,\cdots j_n} (-1)^\sigma B_1^2 B_2^2 B_n^n$$

αφού τα $j_1 \ldots j_n$ παίρνουν όλες τις τιμές από το $1-n$. Επειδή οι μισές μεταθέσεις είναι άρτιες και οι μισές περιττές και όλοι οι όροι του αθροίσματος είναι ίσοι κατ᾽ απόλύτη τιμή, το άθροισμα θα μηδενίζεται. Έτσι $det(a_j^i) = 0$.

4. Αν $a_k^j = -a_j^k$ και $n-$περιτό, να δειχτεί ότι $det\left(a_j^i\right) = 0$.
Λύση:

$$\begin{aligned} det\left(a_j^i\right) &= \textstyle\sum_{j_a\cdots j_n} (-1)^\sigma a_{j_1}^1 \ldots a_{j_n}^n \\ &= \textstyle\sum_{j_a\cdots j_n} (-1)^\sigma (-1)^n a_1^{j_1} \ldots a_n^{j_n} \\ &= -det\left(a_j^i\right) \end{aligned}$$

γιατί το $n-$περιττό. Έτσι, $det\left(a_j^i\right) = 0$.

5. Να δείξετε ότι ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

όταν πολλαπλασιαστεί με το διάνυσμα $(x,y)^T$, δίνει ένα νέο διάνυσμα $(x',y')^T$ με το ίδιο μέτρο αλλά έχει περιστραφεί κατά γωνία θ.
Λύση:
Θα χρησιμοποιήσουμε την ισομορφία του $\mathcal{R}^2$ με το $\mathcal{C}$. Το διάνυσμα $(x,y)^T$ αντιστοιχεί στον μιγαδικό αριθμό $z = re^{i\omega}$ με $x = rcos\omega$ και $y = rsin\omega$. Αν πολλαπλασιάσω με τον αριθμό $e^{i\theta}$ θα πάρω τον μιγαδικό αριθμό $z' = re^{i(\omega+\theta)}$, δηλαδή ο z θα έχει στραφεί κατά γωνία θ. Όμως τότε:

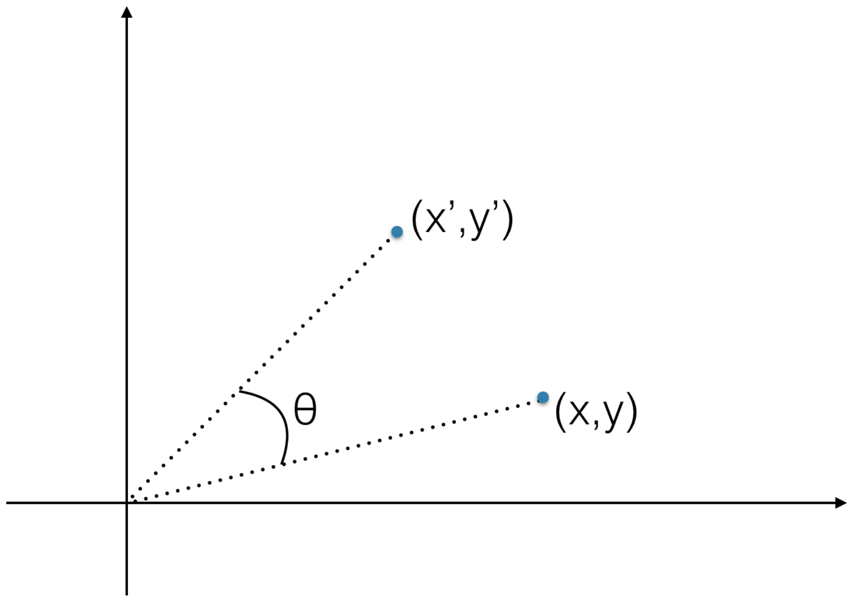
$$\begin{aligned} z' &= rcos(\omega+\theta) + isin(\omega+\theta) \\ &= r(cos\omega \cdot cos\theta - sin\omega \cdot sin\theta) + ir(sin\omega \cdot cos\theta + cos\omega \cdot sin\theta) \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} x' &= xcos\theta - ysin\theta \\ y' &= xsin\theta + ycos\theta \end{aligned}$$

άρα

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Σχήμα 5: Σύνθεση συναρτήσεων.

6. Να δείξετε ότι όταν το x είναι πολύ κοντά στο 0, τότε $\frac{1}{1+x} \simeq 1-x$ και $\sqrt{1+x} \simeq 1+\frac{x}{2}$.
Λύση:
Θα χρησιποιήσουμε το ανάπτυγμα Taylor και θα κρατήσουμε μόνο τους δύο πρώτους όρους:
$$f(x) = \frac{1}{1+x}\ ,\ f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$
έτσι:
$$f(x) \simeq f(0) + f'(0) \cdot x = 1 - x$$
Όμοια:
$$g(x) = \sqrt{1+x}\ ,\ g'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$
έτσι:
$$g(x) \simeq g(0) + g'(0) \cdot x = 1 + \frac{x}{2}$$