# 2 Συναρτήσεις σε Ευκλείδειο Χώρο

## 2.1 Νόρμα

Έστω ένα στοιχείο $x$ του $\mathcal{R}^n$. Τότε ορίζουμε σαν νόρμα του $x$ και συμβολίζουμε $\| x \|$ την ποσότητα

$$\| x \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x^i)^2} \tag{83}$$

Θεώρημα 2.1.1 Αν $x, y \in \mathcal{R}^n$ και $a \in \mathcal{R}$ τότε:

1. $\| x \| \geq 0$ και $\| x \| = 0 \iff x = 0$
2. $\| \sum_{i=1}^{n} x^i y^i \| \leq \| x \| \cdot \| y \|$ και η ισότητα ισχύει αν τα $x, y$ είναι γραμμικά εξαρτημένα
3. $\| x + y \| \leq \| x \| \cdot \| y \|$
4. $\| ax \| = |a| \cdot \| x \|$

Απόδειξη:

1. Από τον ορισμό της νόρμας προκύπτει ότι είναι άθροισμα μη αρνητικών όρων και για να είναι μηδέν θα πρέπει όλοι οι όροι να είναι μηδέν.
2. Αν τα $x, y$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, είναι προφανές ότι η ισότητα ισχύει. Στην αντίθετη περίπτωση, για όλα τα $\lambda \in \mathcal{R}$ θα ισχύει ότι $\lambda y - x \neq 0$ και έτσι

$$\begin{aligned} 0 < \| \lambda y - x \|^2 &= \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda y^i - x^i\right)^2 \\ &= \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} \left(y^i\right)^2 - 2\lambda \sum_{i=1}^{n} x^i y^i + \sum_{i=1}^{n} \left(x^i\right)^2 \end{aligned}$$

Όμως το τριώνυμο που προκύπτει ως προς $\lambda$ δεν πρέπει να έχει πραγματική ρίζα. Έτσι, η διακρίνουσα πρέπει να είναι αρνητική και συνεπώς

$$4 \left( \sum_{i=1}^{n} x^i y^i \right)^2 - 4 \sum_{i=1}^{n} \left(x^i\right)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(y^i\right)^2 < 0$$

3. Για τη νόρμα του αθροίσματος έχουμε

$$\begin{aligned}
\| x+y \|^2 &= \sum_{i=1}^{n} \left(x^i+y^i\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(x^i\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(y^i\right)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x^i y^i \\
&\leq \| x \|^2 + \| y \|^2 + 2 \| x \| \cdot \| y \| \\
&= \left(\| x \|^{+}\| y \|\right)^2
\end{aligned}$$

4. Για τη νόρμα του γινομένου αριθμού επί διάνυσμα έχουμε

$$\| ax \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (ax^i)^2} = \sqrt{a^2 \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2} = |a| \cdot \| x \|$$

∎

Θεώρημα 2.1.2 Αν $x, x_1, x_2, y \in \mathcal{R}^n$ και $a \in \mathcal{R}$ τότε

1. $< x, y > = < y, x >$
2. $< ax, y > = < x, ay > = a < x, y >$
3. $< x_1 + x_2, y > = < x_1, y > + < x_2, y >$
4. $< x, x > \geq 0$ και $< x, x > = 0 \iff x = 0$
5. $\| x \| = \sqrt{< x, x >}$
6. $< x, y > = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$

Απόδειξη: 1. Η έκφραση για το εσωτερικό γινόμενο δίνει

$$< x, y > = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i = \sum_{i=1}^{n} y^i x^i = < y, x >$$

2. Προκύπτει άμεσα από την έκφραση του εσωτερικού γινομένου
3. Όπως και προηγουμένως
4. Προκύπτει παρατηρώντας ότι έχουμε άθροισμα μη αρνητικών όρων
5. Προκύπτει από τον ορισμό

6. Λαμβάνοντας υπ'όψιν τη δι-γραμμικότητα έχουμε

$$
\begin{aligned}
& \frac{\| x+y \|^2 - \| x-y \|^2}{4} \\
= \; & \frac{1}{4}[< x+y, x+y > - < x-y, x-y >] \\
= \; & \frac{1}{4}[< x,x > +2 < x,y > + < y,y > - (< x,x > -2 < x,y > + < y,y >)] \\
= \; & < x,y >
\end{aligned}
$$

∎

Στα επόμενα θα συμβολίζουμε με $e_i$ τα διανύσματα της συνήθους βάσης του $\mathcal{R}^n$ δηλαδή το $e_i$ είναι το διάνυσμα του οποίου οι συντεταγμένες είναι 0 εκτός από την $i-$συντεταγμένη που είναι 1.

## 2.2 Υποσύνολα του $\mathcal{R}^n$

Σε αναλογία με το κλειστό διάστημα $a, b]$ του $\mathcal{R}$ μπορούμε να ορίσουμε τον κλειστό υπερκύβο του $\mathcal{R}^n$ σαν το σύνολο $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ και αντίστοιχα τον ανοικτό υπερκύβο $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_n, b_n)$. Γενικά θα λέμε ότι ένα υποσύνολο $\Gamma$ του $\mathcal{R}^n$ ότι είναι ανοικτό, αν για κάθε στοιχείο του $\Gamma$ μπορούμε να βρούμε έναν ανοικτό υπερκύβο που να ανήκει εξ'ολοκλήρου στο $\Gamma$. Ένα σύνολο $\Gamma$ θα ονομάζεται κλειστό αν το σύνολο $\mathcal{R}^n - \Gamma$ είναι ανοικτό.

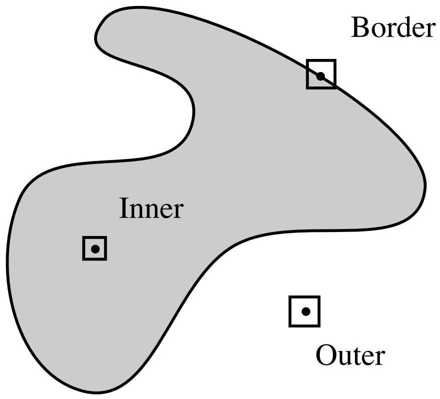
Αν τώρα $A \subset \mathcal{R}^n$ και $x \in \mathcal{R}^n$ τότε ισχύει ακριβώς μία από τις ακόλουθες προτάσεις:

1. Υπάρχει ένας ανοικτός υπερκύβος που περιέχει το $x$ και περιέχεται εξ'ολοκλήρου στο $A$

2. Υπάρχει ένας ανοικτός υπερκύβος που περιέχει το $x$ και περιέχεται εξ'ολοκλήρου στο $\mathcal{R}^n - A$

3. Όλοι οι υπερκύβοι που περιέχουν το $x$ έχουν κοινά σημεία και με το $A$ και με το $\mathcal{R}^n - A$

Τα σημεία που επαληθεύουν την πρόταση (1) λέγονται εσωτερικά σημεία του $A$. Τα σημεία που επαληθεύουν την πρόταση (2) λέγονται εξωτερικά σημεία του $A$ και τέλος τα σημεία που επαληθεύουν την πρόταση (3) λέγοντα συνοριακά σημεία. Αντίστοιχα, το σύνολο των εσωτερικών σημείων του $A$ λέγεται εσωτερικό του $A$, το σύνολο των εξωτερικών σημείων λέγεται εξωτερικό του $A$ και τέλος το σύνολο των συνοριακών σημείων λέγεται σύνορο του $A$. Εύκολα μπορεί κανείς να διαπιστώσει πως το εσωτερικό ενός συνόλου είναι ανοικτό σύνολο όπως επίσης και το εξωτερικό του αφού θα είναι το εσωτερικό του συμπληρωματικού του συνόλου. Ένα ανοικτό σύνολο δεν περιέχει κανένα συνοριακό του σημείο, αφού σε αντίθετη περίπτωση, γι'αυτό το σημείο δε θα μπορούσαμε να βρούμε έναν ανοικτό υπερκύβο που να περιέχεται στο σύνολο. Τέλος, ένα κλειστό σύνολο περιέχει όλα τα συνοριακά του σημεία, αφού σε αντίθετη περίπτωση ένα συνοριακό σημείο που δεν




Σχήμα 6: Τα διάφορα είδη σημείων σε σχέση με ένα δοσμένο υποσύνολο.

περιέχεται στο κλειστό σύνολο θα περιέχεται στο συμπληρωματικό του που είναι ανοικτό και άρα καταλήγουμε σε άτοπο. Στο σχήμα 2.2 φαίνονται σχηματικά τα τρία είδη σημείων.

Μια συλλογή τώρα $\mathcal{O}$ ανοικτών συνόλων αποτελεί ένα κάλυμμα για το σύνολο $A$ αν κάθε σημείο του $A$ βρίσκεται σε κάποιο από τα σύνολα της συλλογής $\mathcal{O}$. Αν τώρα μπορούμε να βρούμε μια μικρότερη συλλογή $\mathcal{O}'$ με σύνολα της $\mathcal{O}$ που να καλύπτει το $A$, τότε αυτή τη νέα συλλογή την ονομάζουμε υποκάλυμμα. Έτσι για παράδειγμα η συλλογή που αποτελείται από τα ανοικτά σύνολα $(a, a+1), a \in \mathcal{R}$ αποτελεί ένα κάλυμμα για το $\mathcal{R}$. Είναι προφανές ότι το $\mathcal{R}$ δεν καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος συνόλων της συλλογής και το ίδιο ισχύει για κάθε μη περατωμένο υποσύνολο του $\mathcal{R}$. Αλλά ακόμα και αν το σύνολο είναι περατωμένο μπορεί να προκύψει κάτι αντίστοιχο. Έτσι για παράδειγμα αν θεωρήσουμε τη συλλογή των ανοικτών διαστημάτων της μορφής $\left(\frac{1}{n+1}, 1 - \frac{1}{n+1}\right)$ με το $n \in \mathcal{N}$, τότε παρατηρούμε ότι καλύπτει το σύνολο $(0, 1)$, το οποίο είναι ένα περατωμένο σύνολο. Όμως δεν μπορούμε να βρούμε ένα πεπερασμένο σύνολο από τα διαστήματα της συλλογής που να καλύπτουν το $(0, 1)$. Η ιδιότητα αυτή μπορεί να διαμερίσει τα σύνολα σε δύο κατηγορίες: αυτά στα οποία για κάθε κάλυμμά τους είναι δυνατόν να βρούμε ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα. και στα υπόλοιπα. Ένα σύνολο για το οποίο, για κάθε του κάλυμμα μπορούμε να βρούμε ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα. ονομάζεται συμπαγές σύνολο.

Προφανώς ένα σύνολο με πεπερασμένο πλήθος σημείων είναι συμπαγές. Έστω τώρα το σύνολο που περιέχει το 0 και όλους τους ρητούς αριθμούς της μορφής $\frac{1}{n}, n \in \mathcal{N}$, περιέχει δηλαδή άπειρα στοιχεία. Κάθε κάλυμμα αυτού του συνόλου θα περιέχει τουλάχιστον ένα σύνολο που θα περιέχει το 0. Επομένως, έξω από αυτό το σύνολο θα βρίσκεται πεπερασμένος αριθμός στοιχείων της μορφής $\frac{1}{n}$ και έτσι θα μπορούμε πάντα να βρίσκουμε ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα. και έτσι το αρχικό μας σύνολο είναι συμπαγές.

Θεώρημα 2.2.1 Το κλειστό διάστημα $[a, b]$ είναι συμπαγές (Θεώρημα των Heine-Borel).

Απόδειξη: Ας ξεκινήσουμε με ένα τυχαίο κάλυμμα $\mathcal{O}$ του $[a, b]$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα $x, a \leq x \leq b$ για το οποίο να ισχύει ότι το σύνολο $[a, x]$ μπορεί να καλύπτεται από ένα πεπερασμένο σύνολο στοιχείων του $\mathcal{O}$. Πράγματι, αν θέσουμε $x = a$ έχουμε ένα τέτοιο σημείο. Έστω τώρα το σύνολο $A$ που περιέχει όλα αυτά τα $x$ (είδαμε ότι το $A$ περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο). Αφού το $A$ περιέχει στοιχεία του $[a, b]$ τότε θα είναι φραγμένο και ας υποθέσουμε ότι το στοιχείο $\gamma$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του $A$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $\gamma \in A$ και $\gamma = b$.

Κατ'αρχήν θα πρέπει να σημειώσουμε κάποιες ιδιότητες που έχει το στοιχείο $\gamma$. Όταν ένα στοιχείο είναι ελάχιστο άνω φράγμα ενός συνόλου, τότε πρέπει να είναι οπωσδήποτε συνοριακό σημείο αυτού του συνόλου. Πράγματι, αν υπήρχε μια περιοχή του ελάχιστου άνω φράγματος που δεν έχει κανένα κοινό στοιχείο με το σύνολο, τότε όλα τα στοιχεία αυτής της περιοχής που είναι μικρότερα από το ελάχιστο άνω φράγμα θα ήταν και αυτά άνω φράγματα του συνόλου και έτσι καταλήγουμε σε άτοπο. Από την άλλη, θα υπάρχει σίγουρα ένα σύνολο της συλλογής $\mathcal{O}$ που θα περιέχει το $\gamma$ γιατί διαφορετικά αν πάρουμε εκείνο το σύνολο της συλλογής $\mathcal{O}$ που περιέχει το $b$, τότε όλα τα στοιχεία αυτού του συνόλου που είναι μεγαλύτερα από $b$ θα είναι άνω φράγματα και μάλιστα μικρότερα του $\gamma$, άρα καταλήγουμε και πάλι σε άτοπο.

Έστω λοιπόν $U$ το σύνολο της συλλογής $\mathcal{O}$ που περιέχει το $\gamma$. Αφού όπως είπαμε το $\gamma$ είναι συνοριακό σημείο του $A$, θα υπάρχει ένα στοιχείο $x$ που να ανήκει στο $A$ και στο $U$ και έτσι τα διάστημα $[a, x]$ καλύπτεται από πεπερασμένο αριθμό συνόλων του $\mathcal{O}$. Αν σε αυτά τα σύνολο προσθέσουμε και το $U$ τότε καλύπτουμε το σύνολο $[a, \gamma]$ με πεπερασμένο αριθμό συνόλων του $\mathcal{O}$ και έτσι το $\gamma \in A$.

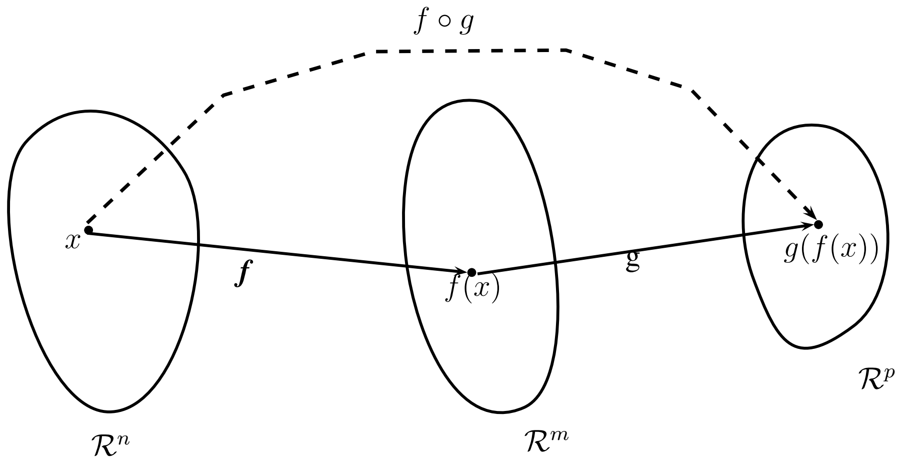
Έτσι έχουμε φτάσει στο συμπέρασμα ότι το $\gamma \leq b$ αφού όλα τα στοιχεία του $A$ ανήκουν στο $[a, b]$. Ας υποθέσουμε ότι το $\gamma < b$. Θα υπάρχει όμως τότε ένα στοιχείο $x$ που θα ανήκει στο $U$ (το σύνολο $U$ είναι αυτό που περιέχει το $\gamma$ και ορίστηκε πριν) και θα ανήκει στο διάστημα $(\gamma, b)$. Αφού λοιπό το $[a, \gamma]$ καλύπτεται από πεπερασμένο αριθμό συνόλων του $\mathcal{O}$ και το $[\gamma, x]$ καλύπτεται από το $U$, τότε και το σύνολο $[a, x]$ καλύπτεται από πεπερασμένο αριθμό συνόλων του $\mathcal{O}$, άρα $x \in A$ και έτσι καταλήγουμε σε άτοπο γιατί έχουμε υποθέσει ότι το $\gamma$ είναι ένα άνω φράγμα του $A$. ∎

Μπορούμε τώρα να γενικεύσουμε τα παραπάνω συμπεράσματα και για υποσύνολα του $\mathcal{R}^n$. Έτσι, αν τα σύνολα $A \in \mathcal{R}^n$ και $B \in \mathcal{R}^m$ είναι συμπαγή, τότε και το σύνολο $A \times B \in \mathcal{R}^{n+m}$ είναι συμπαγές. Επιπλέον, ένα κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathcal{R}^n$ είναι φραγμένο (ισχύει και το αντίθετο, δηλαδή ότι ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathcal{R}^n$ είναι κλειστό και φραγμένο).

## 2.3 Συναρτήσεις και συνέχεια

Μια συνάρτηση από το σύνολο $\mathcal{R}^n$ στο σύνολο $\mathcal{R}^m$ ορίζεται να είναι η απεικόνιση στοιχείων του $\mathcal{R}^n$ με στοιχεία του $\mathcal{R}^m$ με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε στοιχείο να έχει μοναδική εικόνα (χωρίς αυτό να σημαίνει πως δύο στοιχεία δεν μπορούν να έχουν την ίδια εικόνα). Γενικά μια τέτοια συνάρτηση θα είναι της μορφής:

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m \\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad &= \quad \begin{pmatrix} f^1 x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f^2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f^m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{84}$$




Σχήμα 7: Σύνθεση συναρτήσεων

Πολλές φορές είναι δυνατόν η συνάρτηση να ορίζεται σε κάποιο υποσύνολο $A$ του $\mathcal{R}^n$ (το σύνολο $A$ το ονομάζουμε πεδίο ορισμού). Με $f(A)$ συμβολίζουμε το υποσύνολο του $\mathcal{R}^m$ που περιέχει όλες τις εικόνες όλων των $x \in A$. Τέλος, αν $\Gamma \in \mathcal{R}^m$ ορίζουμε με $f^{-1}(\Gamma)$ το υποσύνολο του $\mathcal{R}^n$ το οποίο περιέχει όλα τα $x$ των οποίων οι εικόνες ανήκουν στο $\Gamma$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε μία συνάρτηση $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$ και μια συνάρτηση $g : \mathcal{R}^m \to \mathcal{R}^p$. Τότε μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση $h : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^p$ με $h(x) = g(f(x))$. Σχηματικά αυτό φαίνεται στο σχήμα 2.3. Μια πολύ σημαντική συνάρτηση την οποία θα χρησιμοποιήσουμε πολύ συχνά, είναι η συνάρτηση προβολή $\pi^i : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ η οποία ορίζεται

$$\pi^i \left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right) = x^i \tag{85}$$

Όπως και στις συναρτήσεις μιας μεταβλητής μπορούμε να ορίσουμε την έννοια της έκφρασης $\lim_{x\to a}(x) = b$ ως το γεγονός ότι μπορούμε να φέρουμε την εικόνα ενός $x$ όσο κοντά θέλουμε στο $b$ αρκεί να περιορίσουμε το $x$ σε μια μικρή περιοχή γύρω από το $a$. Αυτό σημαίνει πως για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $\parallel x-a \parallel < \delta$ τότε $\parallel f(x)-b \parallel < \epsilon$. Με φυσιολογικό τρόπο λοιπόν μπορούμε να ορίσουμε την έννοια της συνέχειας σε ένα σημείο ώς το γεγονός ότι $\lim_{x\to a}(x) = f(a)$. Ένα πολύ σημαντικό θεώρημα το οποίο δίνει ένα κριτήριο για τη συνέχεια μιας συνάρτησης είναι το ακόλουθο:

Θεώρημα 2.3.1 Αν $a \subset \mathcal{R}^n$ και μια συνάρτηση $f : A \to \mathcal{R}^m$ είναι συνεχής στο $A$ αν για κάθε ανοικτό σύνολο $U \subset f(A)$ το σύνολο $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό.

Απόδειξη: Ας ξεκινήσουμε πρώτα με την υπόθεση ότι η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής. Έστω επίσης ένα σημείο $x$ το οποίο ανήκει στο σύνολο $f^{-1}(U)$. Αφού έχουμε υποθέσει τη συνέχεια της $f$, μπορούμε να βρούμε μια περιοχή $B(f(x), \epsilon) = \{y :\parallel y - f(x) \parallel < \epsilon\}$ η οποία να ανήκει εξ̓ολοκλήρου στο $U$ και μια αντότοιχη περιοχή $B(x, \delta)$ η οποία να ανήκει εξ̓ολοκλήρου στο $f^{-1}(U)$. Άρα το $x$ είναι εσωτερικό σημείο και έτσι το $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό.

Ας ξεκινήσουμε τώρα από την υπόθεση ότι για κάθε $U \subset f(A)$ ανοικτό, το $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό. Ας πάρουμε ένα τυχαίο σημείο $x$ και την εικόνα του $f(x)$. Τότε μπορούμε για κάθε $\epsilon$ αρκετά μικρό να πάρουμε την περιοχή $B(f(x), \epsilon)$ η οποία να ανήκει στο $f(A)$ και αφού είναι ανοικτό σύνολο, το $f^{-1}(B(f(x), \epsilon)$ είναι επίσης ανοικτό και έτσι μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε $f^{-1}(B(f(x), \epsilon) \subset B(x, \delta)$ και έτσι η $f$ είναι συνεχής στο $x$. ∎

Μπορούμε τώρα να δείξουμε τα επόμενα πολύ χρήσιμα θεωρήματα:

Θεώρημα 2.3.2 Αν η $f : A \to \mathcal{R}^m$ είναι συνεχής και το $A$ είναι συμπαγές, τότε και το $f(A)$ είναι συμπαγές.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι $\mathcal{O}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του $f(A)$. Τότε, για κάθε ανοικτό σύνολο $V$ που ανήκει στο $\mathcal{O}$, θα υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο $f^{-1}(V)$ το οποίο θα είναι ανοικτό αφού η $f$ είναι συνεχής. Η συλλογή όλων των $f^{-1}(V)$ θα είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του $A$ και αφού είναι συμπαγές θα υπάρχει ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα που θα αποτελείται από τα σύνολα $f^{-1}(V_j)$ που θα καλύπτει το $A$. Τότε το πεπερασμένο υποκάλυμμα που θα αποτελείται από τα $V_j$ θα καλύπτει το $f(A)$ και έτσι θα είναι συμπαγές. ∎

Αν περιοριστούμε τώρα στις περατωμένες συναρτήσεις που έχουν εικόνες στο $\mathcal{R}$, μπορούμε να εισάγουμε την έννοια της αιώρησης μιας συνάρτησης σε ένα σημείο. Έστω

$$M(a, f, \delta) = sup\{f(x) : x \in A, \| x - a \|< \delta\} \tag{86}$$

και

$$m(a, f, \delta) = inf\{f(x) : x \in A, \| x - a \|< \delta\} \tag{87}$$

Έτσι, η συνάρτηση $f$ σε ένα διάστημα $B(x, \delta)$ θα παίρνει τιμές στο $m(x, f, \delta), M(x, f, \delta)]$. Ορίζουμε την αιώρηση $o(f, x)$ μιας συνάρτησης $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ στο σημείο $x$ να είναι το όριο $\lim_{\delta \to 0} |M(x, f, \delta) - m(x, f, \delta)|$. Μπορούμε τώρα πολύ εύκολα να διαπιστώσουμε ότι μια συνάρτηση $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ είναι συνεχής τότε και μόνο τότε όταν η αιώρησή της είναι 0.

Ολοκληρώνουμε αυτήν την παράγραφο με το επόμενο πολύ σημαντικό θεώρημα.

Θεώρημα 2.3.3 Αν $A \subset \mathcal{R}^n$ είναι κλειστό, και η $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ είναι μια περατωμένη συνάρτηση, τότε για κάθε $\epsilon > 0$, το σύνολο $\{x \in A : o(f, x) \geq \epsilon\}$ είναι επίσης κλειστό.

Απόδειξη: Έστω $B = \{x \in A : o(f, x) \geq \epsilon\}$. Αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $\mathcal{R}^n - B$ είναι ανοικτό. Έστω $x \in \mathcal{R}^n - B$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: στην πρώτη το $x \notin A$ και αφού το $A$ είναι κλειστό θα υπάρχει μια περιοχή του $x$ η οποία δε θα έχει κανένα κοινό σημείο με το $A$ και έτσι το $x$ θα είναι εσωτερικό σημείο του $\mathcal{R}^n - B$. Στη δεύτερη περίπτωση το $x \in A$ αλλά $o(f, x) < \epsilon$. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε ένα $\delta >$ 0τέτοιο ώστε $M(x, f, \delta) - m(x, f, \delta) < \epsilon$. Έστω τώρα η περιοχή $B(x, \delta)$. Κάθε σημείο $y$ αυτής της περιοχής θα έχει με τη σειρά του μια περιοχή $B(y, \delta_1) \subset B(x, \delta)$ για την οποία θα ισχύει $M(y, f, \delta_1) - m(y, f, \delta_1) < \epsilon$ και έτσι $B(x, \delta) \subset \mathcal{R}^n - B$ που σημαίνει ότι το $x$ είναι εσωτερικό σημείο. Έτσι το σύνολο $\mathcal{R}^n - B$ είναι ανοικτό και το $B$ κλειστό. ∎

## 2.4 Ασκήσεις

1. Να δειχτεί ότι $\| x \| \leq \sum_{i=1}^{n} |x^i|$

   Απόδειξη:

   $$x = x^i e_i \Rightarrow \| x \| \leq |x^i| \| e_i \| = \sum_{i=1}^{n} |x^i|$$

2. Να δειχτεί ότι $| \| x \| - \| y \| | \leq \| x - y \|$

   Απόδειξη:

   $$\begin{aligned} | \| x \| - \| y \| |^2 &= \| x \|^2 + \| y \|^2 - 2 \| x \| \cdot \| y \| \\ &\leq \| x \|^2 + \| y \|^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} x^i y^i \\ &= \| x - y \| \end{aligned}$$

3. Να δειχτεί ότι $\| x - y \| \leq \| x \| + \| y \|$

   Απόδειξη:

   $$\| x - y \| = \| x + (-y) \| \leq \| x \| + \| y \|$$

4. Ένας γραμμικός μετασχηματισμός $T : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$ διατηρεί τη νόρμα αν $\| Tx \| = \| x \|$ και διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο αν $< Tx, Ty > = < x, y >$. Να δειχτεί ότι για έναν γραμμικό μετασχηματισμό η διατήρηση της νόρμας ισοδυναμεί με διατήρηση του εσωτερικού γινομένου και σε αυτή την περίπτωση ο γραμμικός μετασχηματισμός είναι $1-1$ (και άρα και ο αντίστροφος είναι του ίδιου είδους).

   Απόδειξη: Έστω πρώτα $\| Tx \| = \| x \|$. Τότε:

   $$\begin{gathered} \| x + y \| = \| T(x+y) \| \Rightarrow \\ < x+y, x+y > = < T(x+y), T(x+y) > \Rightarrow < x, y > = < Tx, Ty > \end{gathered}$$

   Αν τώρα $< Tx, Ty > = < x, y >$ τότε $\| Tx \| = < Tx, Tx > = < x, x > = \| x \|$.

   ¨Εστω τώρα $Tx_1 = Tx_2$. Τότε $T(x_1 - x_2) = 0$ και έτσι $\| T(x_1 - x_2) \| = \| x_1 - x_2 \| = 0$ και επομένως $x_1 = x_2$ και έτσι ο $T$ είναι $1-1$. Επίσης για τον $T^{-1}$ θα έχουμε ότι $\| T^{-1} y \| = \| T^{-1}(Tx) \| = \| x \| = \| Tx \| = \| y \|$ όπου έχουμε υποθέσει ότι $y = Tx$.

5. ΄Εστω $T : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός. Να δειχτεί ότι υπάρχει θετικός αριθμός $M$ τέτοιος ώστε $\| Th \| \leq M \| h \|$ για κάθε $h \in \mathcal{R}^n$.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι $M = m \cdot max\{T^i_j, i = 1 \ldots m, j = 1 \ldots n\}$. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \parallel Th \parallel &= \sqrt{\sum_{1=1}^{m} \left(T^i_j h^j\right)^2} \\ &\leq \sqrt{m \frac{M}{m}^2 \sum_{i=1}^{n} (h^i)^2} \\ &= M \parallel h \parallel \end{aligned}$$

6. Το σύνολο όλων των γραμμικών απεικονίσεων από το $\mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ το ονομάζουμε δυϊκό χώρο του $\mathcal{R}^n$ και το συμβολίζουμε με $(\mathcal{R}^n)^*$. Να δειχτεί ότι για κάθε στοιχείο $\phi$ του $(\mathcal{R}^n)^*$ υπάρχει ένα μοναδικό $x \in \mathcal{R}^n$ τέτοιο ώστε $\phi(y) =< x, y >$ και έτσι να δειχτεί ότι ο $(\mathcal{R}^n)^*$ είναι ισόμορφος με τον $\mathcal{R}^n$.

   Απόδειξη: Έστω $\phi \in (\mathcal{R}^n)^*$ και $x_i = \phi(e_i)$. Τότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \phi(y) &= \phi(y^i e_i) \\ &= y^i \phi(e_i) \\ &= y^i x_i \\ &= < x, y > \end{aligned}$$

   Το γεγονός ότι οι δύο χώροι είναι ισόμορφοι προκύπτει από τη σχέση $< x_1 - x_2, y >= 0$ για κάθε $y \in \mathcal{R}^n$ συνεπάγεται ότι $x_1 = x_2$.

7. Να δείξετε ότι η ένωση οποιουδήποτε (ακόμη και απείρου) πλήθους ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο. Στη συνέχεια να δείξετε ότι η τομή δύο (και άρα πεπερασμένου πλήθους) ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο. Δώστε και ένα αντιπαράδειγμα για την τομή απείρου πλήθους ανοικτών συνόλων.

   Απόδειξη: Κατ᾿αρχήν αν ένα στοιχείο ανήκει στην ένωση ακόμη και απείρου πλήθους ανοικτών συνόλων, τότε θα ανήκει σε κάποιο από αυτά τα σύνολα, και μαζί με αυτό και μια περιοχή του στοιχείου η οποία με τη σειρά της θα ανήκει στην ένωση. Άρα θα είναι εσωτερικό σημείο και έτσι η ένωση θα είναι ανοικτό σύνολο. Από την άλλη, αν ένα στοιχείο ανήκει στην τομή δύο ανοικτών συνόλων, τότε θα ανήκει και στα δύο σύνολα. Θα υπάρχει λοιπόν μια περιοχή του στοιχείου που θα ανήκει και στα δύο σύνολα και έτσι θα ανήκει και στην τομή. Άρα το στοιχείο θα είναι εσωτερικό και η τομή ανοικτό σύνολο. Ως αντιπαράδειγμα τώρα θεωρείστε τα ανοικτά σύνολα $(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$ με το $n \in \mathcal{N}$. Εύκολα μπορεί κανείς να διαπιστώσει πως η τομή αυτών των άπειρων ανοικτών συνόλων είναι το $[0, 1]$.

8. Αν το σύνολο $U$ είναι ανοικτό και το σύνολο $\Gamma \subset U$ είναι συμπαγές, τότε να δείξετε ότι υπάρχει ένα συμπαγές σύνολο $\Delta$ τέτοιο ώστε $\Gamma \subset in(\Delta) \subset U$.

Απόδειξη: Αφού το $\Gamma$ είναι συμπαγές, μπορούμε να φτιάξουμε ένα κάλυμμά του το οποίο να αποτελείται από το σύνολο $in(\Gamma)$ και τις περιοχές $V_x$ για όλα τα $x$, όπου το $x$ είναι ένα συνοριακό σημείο του $\Gamma$ και η περιοχή ανήκει εξὀλοκλήρου στο $U$ (πράγματι, το $x$ θα είναι σημείο του $U$ και άρα εσωτερικό). Επειδή όμως το $\Gamma$ είναι συμπαγές, μόνο ένα πεπερασμένο πλήθος αυτών των συνόλων αρκούν για να καλύψουν το $\Gamma$. Η ένωση αυτών των πεπερασμένων σε πλήθος συνόλων μαζί με τα συνοριακά του σημεία είναι το ζητούμενο σύνολο.

9. Να δείξετε ότι για μια συνάρτηση $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$ ισχύει $lim_{x\to a} f(x) = b \iff \lim_{x\to a} f^i(x) = b^i$.

   Απόδειξη: Ας υποθέσουμε πρώτα ότι $lim_{x\to a} f(x) = b$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ θα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\| x - a \| < \delta \to \| f(x) - b \| < \epsilon$. Δηλαδή

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} (f^i(x) - b^i)^2} < \epsilon \Rightarrow$$

$$|f^i(x) - b^i| < \epsilon$$

   Το αντίστροφο αποδεικνύεατι με τον ίδιο τρόπο. Μπορούμε τώρα να συμπεράνουμε πως μια συνάρτηση $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$ είναι συνεχής τότε και μόνο τότε αν κάθε μια από τις συνιστώσες της είναι συνεχής συνάρτηση από το $\mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$.

10. Να δείξετε ότι κάθε γραμμικός μετασχηματισμός $T : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$ είναι συνεχής συνάρτηση.

   Απόδειξη: Έχουμε ήδη αποδείξει ότι $\| Tx \| < M \| x \|$ για κάποιο $M > 0$. Έτσι $\| Tx - Ta \| = \| T(x - a) \| < M \| x - a \|$.