3 Διαφόριση

3.1 Ορισμοί

Μια συνάρτηση $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ είναι παραγωγίσιμη (διαφορίσιμη) σε κάποιο σημείο a αν

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \tag{88}$$

Προκειμένου να γενικεύσουμε τον παραπάνω ορισμό και για διανυσματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, παρατηρούμε ότι η πράγωγος μιας συνάρτησης σε ένα σημείο a μπορεί να οριστεί σαν ένας αριθμός λ (ο οποίος εξαρτάται από το a) τέτοιος ώστε να ισχύει

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \lambda h}{h} = 0 \tag{89}$$

Έτσι, έχοντας στα χέρια μας τη νόρμα διανυσμάτων μπορούμε να γενικεύσουμε την έννοια της παραγώγου για μια συνάρτηση $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$ ως εξής:

Ορισμός: Μια συνάρτηση $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο a αν υπάρχει γραμμικός μετασχηματισμός $\lambda : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$ τέτοιος ώστε να ισχύει

$$\lim_{h \to 0} \frac{\parallel f(a+h) - f(a) - \lambda h \parallel}{\parallel h \parallel} = 0 \tag{90}$$

Σημειώστε εδώ ότι το h είναι διάνυσμα του $\mathcal{R}^n$ και ο μετασχηματισμός λ στην ουσία θα είναι ένας πίνακας που ανήκει στο $M_{m \times n}$.

Έτσι, όπως στις συναρτήσεις μιας μεταβλητής αντιστοιχίζουμε σε κάθε σημείο έναν αριθμό που είναι η παράγωγος της συνάρτησης σε αυτό το σημείο, έτσι και στις διανυσματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, αντιστοιχίζουμε σε κάθε σημείο έναν πίνακα που είναι η παράγωγος της συνάρτησης σε αυτό το σημείο. Σε αναλογία πάλι με τις συναρτήσεις μιας μεταβλητής μπορούμε να δώσουμε και μια γεωμετρική ερμηνεία στην έννοια της παραγώγου: στις συναρτήσεις μια μεταβλητής, η παράγωγος προσδιορίζει μια ευθεία η οποία προσεγγίζει με τον καλύτερο δυνατό τρόπο τοπικά τη συνάρτηση. Έτσι, και στις διανυσματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, η παράγωγος είναι μια γραμμική συνάρτηση (δηλαδή ένας πίνακας) η οποία προσεγγίζει με τον καλύτερο δυνατό τρόπο τη συνάρτηση σε μια περιοχή γύρω από το δοσμένο σημείο.

Καταρχήν πρέπει να δούμε ότι ο ορισμός που δώσαμε για την παράγωγο την ορίζει μονοσήμαντα, δηλαδή δεν υπάρχουν άλλοι γραμμικοί μετασχηματισμοί οι οποίοι να ικανοποιούν την (90). Πράγματι, αν υπήρχε κάποιος άλλος τέτοιος μετασχηματισμός μ θα είχαμε ότι

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| f(a+h) - f(a) - \mu h \|}{\| h \|} = 0$$

Τότε όμως

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{\| \lambda h - \mu h \|}{\| h \|} &= \lim_{h \to 0} \frac{\| \lambda h + f(a+h) - f(a) + f(a) - f(a+h) - \mu h \|}{\| h \|} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\| \lambda h - f(a+h) + f(a) \|}{\| h \|} + \lim_{h \to 0} \frac{\| f(a+h) - f(a) - \mu h \|}{\| h \|} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Αν θέσουμε τώρα $h = tx$ για κάποιο σταθερό σημείο x θα έχουμε

$$0 = \lim_{t \to 0} \frac{\| \lambda(tx) - \mu(tx) \|}{\| tx \|} = \lim_{t \to 0} \frac{\| \lambda x - \mu x \|}{\| x \|}$$

δηλαδή $\lambda x = \mu x$ για κάθε x. Το παρακάτω θεώρημα μας δίνει ένα πολύ σημαντικό εργαλείο για να υπολογίζουμε την παράγωγο μιας διανυσματικής συνάρτησης:

Θεώρημα 3.1.1 Αν η $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$ είναι διαφορίσιμη στο x και η συνάρτηση $g : \mathcal{R}^m \to \mathcal{R}^p$ είναι διαφορίσιμη στο $f(x)$ τότε και η συνάρτηση $h = g \circ f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^p$ είναι διαφορίσιμη στο x και μάλιστα ισχύει

$$D(g \circ f)(x) = D(g)(f(x)) \cdot (Df)(x) \tag{91}$$

Απόδειξη: Θέτουμε $\beta = f(a)m\lambda = (Df)(a), \mu = (Dg)(f(a))$ και ορίζουμε

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= f(x) - f(a) - \lambda(x-a) \\
\psi(y) &= g(y) - g(\beta) - \mu(y - \beta) \\
\rho(z) &= g \circ f(x) - g \circ f(a) - \mu \circ \lambda(x-a)
\end{aligned}$$

Τότε

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} \frac{\| \phi(x) \|}{\| x - a \|} &= 0 \\
\lim_{y \to \beta} \frac{\| \psi(y) \|}{\| y - \beta \|} &= 0
\end{aligned}$$

και αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{x \to a} \frac{\| \rho(x) \|}{\| x - a \|} = 0$$

Η συνάρτηση τώρα $\rho(x)$ μπορεί να γραφεί

$$\begin{aligned}
\rho(x) &= g\left(f(x)\right) - g(\beta) - \mu\left(\lambda(x-a)\right) \\
&= g\left(f(x)\right) - g(\beta) - \mu\left(f(x) - f(a) - \phi(x)\right) \\
&= \left[g\left(f(x)\right) - g(\beta) - \mu\left(f(x) - f(a)\right)\right] + \mu\left(\phi(x)\right) \\
&= \psi\left(f(x)\right) + \mu\left(\phi(x)\right)
\end{aligned}$$

και έτσι αρκεί να δείξουμε ότι

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} \frac{\| \psi(f(x)) \|}{\| x-a \|} &= 0 \\ \lim_{x\to a} \frac{\| \mu(\phi(x)) \|}{\| x-a \|} &= 0 \end{aligned}$$

Η δεύτερη σχέση προκύπτει εύκολα γιατί ο μ είναι γραμμικός μετασχηματισμός ενώ για την πρώτη έχουμε:

$$\| \psi(f(x)) \| < \epsilon \| f(x) - \beta \|$$

για κάποιο δ τέτοιο ώστε $\| f(x) - \beta \| < \delta$. Έτσι:

$$\begin{aligned} \| \psi(f(x)) \| &< \epsilon \| f(x) - \beta \| \\ &= \epsilon \| \phi(x) + \lambda(x-a) \| \\ &\leq \epsilon \| \phi(x) \| + \epsilon M \| x-a \| \end{aligned}$$

για κάποιο $M > 0$. ∎

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε τις παρακάτω προτάσεις:

Θεώρημα 3.1.2 Ισχύουν οι ακόλουθες προτάσεις:

1. Αν η $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$ είναι μια σταθερή συνάρτηση, τότε $(Df)(x) = 0$.

2. Αν η $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός που ορίζεται από τον πίνακα T, τότε $(Df)(x) = T$.

3. Αν η $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$, τότε η f είναι διαφορίσιμη στο $a \in \mathcal{R}^n$ αν και μόνο αν κάθε f^i είναι διαφορίσιμη στο a και ισχύει ότι η $i-$γραμμή του πίνακα $(Df)(a)$ είναι το διάνυσμα γραμμή $(Df^i)(a)$.

4. Αν η $s : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ ορίζεται από τη σχέση $s(x,y) = x + y$, τότε $(Ds)(a,b) = (1,1)$.

5. Αν η $p : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ ορίζεται από τη σχέση $p(x,y) = x \cdot y$, τότε $(Dp)(a,b) = (b,a)$.

Απόδειξη: 1. Έχουμε:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\| f(a+h) - f(a) - 0 \cdot h \|}{\| h \|} = 0$$

2. Όμοια:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\| f(a+h) - f(a) - Th \|}{\| h \|} = \lim_{h\to 0} \frac{\| Ta + Th - Ta - Th \|}{\| h \|} = 0$$

3. Αν κάθε f^i είναι διαφορίσιμη στ a τότε:

$$f(a+h) - f(a) - lh = \begin{pmatrix} f^1(a+h) - f^1(a) - (Df^1)h \\ \vdots \\ f^n(a+h) - f^n(a) - (Df^n)h \end{pmatrix}$$

Έτσι:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\| f(a+h) - f(a) - \lambda h \|}{\| h \|} \le \lim_{h\to 0} \sum_{i=1}^{m} \frac{\| f^i(a+h) - f^i(a) - (Df^i)(a)h \|}{\| h \|} = 0$$

Αντίστροφα τώρα, αν η f είναι διαφορίσιμη στο a, τότε η συνάρτηση $f^i = \pi^i \circ f$ είναι με τη σειρά της διαφορίσιμη.

4. Εδώ το αποτέλεσμα προκύπτει εύκολα αν παρατηρήσουμε ότι η s είναι γραμμικός μετασχηματισμός με πίνακα $(1,1)$.

5. Ας θέσουμε $\lambda(x,y) = (by, ax)$. Τότε

$$\lim_{(h,k)\to 0} \frac{\| (a+h)(b+k) - ab - l(h,k) \|}{\| (h,k) \|} = \lim_{(h,k)\to 0} \frac{|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Μπορούμε τώρα να παρατηρήσουμε ότι $|hk| \le h^2 + k^2$ και έτσι

$$\lim_{(h,k)\to 0} \frac{|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

∎

Μπορούμε τώρα να εξάγουμε έναν κανόνα για την παράγωγο του αθροίσματος και του γινομένου δύο συναρτήσεων:

Θεώρημα 3.1.3 Αν οι $f, g : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ είναι διαφορίσιμες στο a τότε

$$\begin{aligned} D(f+g)(a) &= (Df)(a) + (Dg)(a) \\ (Dfg)(a) &= g(a)(Df)(a) + f(a)(Dg)(a) \end{aligned}$$

Επιπλέον, αν $g(a) \ne 0$

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{g(a)(Df)(a) - f(a)(Dg)(a)}{[g(a)]^2}$$

Απόδειξη: Έχουμε $f + g = s \circ (f, g)$ και έτσι

$$D(f+g)(a) = (Ds)(f(a), g(a))((Df)(a), (Dg)(a)) = (Df)(a) + (Dg)(a)$$

Όμοια για τη δεύτερη σχέση έχουμε ότι $fg = p \circ (f, g)$ και έτσι

$$D(fg)(a,b) = (Dp)(f(a), g(a))((Df)(a), (Dg)(a)) = g(a)(Df)(a) + f(a)(Dg)(a)$$

Τέλος, η τελευταία σχέση προκύπτει αν δούμε πως η $D(1/g)(a) = -(Dg)(a)/[g(a)]^2$. ∎

3.2 Μερικές παράγωγοι

Η εύρεση της παραγώγου μιας συνάρτησης με τα εργαλεία που αναπτύχθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο οδηγούν σε μια αρκετά επίπονη διαδικασία. Εδώ θα δούμε πως το πρόβλημα της εύρεσης της παραγώγου μπορεί να αναχθεί στην εύρεση της παραγώγου μιας συνάρτησης μιας μεταβλητής.

Ορισμός: Ονομάζουμε $i-$οστή μερική παράγωγο της $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ την παράγωγο της συνάρτησης αν θεωρήσουμε όλες τις μεταβλητές εκτός από την x^i σαν σταθερές ποσότητες. Η μερική παράγωγος συμβολίζεται

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} \tag{92}$$

Ακόμα και αν η f παίρνει τιμές στο $\mathcal{R}^m$ μπορούμε να ορίσουμε τη μερική παράγωγο της $i-$συνιστώσας της f ως προς τη μεταβλητή x^j με τον ίδιο τρόπο. Αυτή η παράγωγος συμβολίζεται με

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j} \tag{93}$$

Με την ίδια λογική μπορούμε να ορίσουμε και μερικές παραγώγους ανώτερης τάξης. Έτσι η έκφραση

$$\frac{\partial^3 f^i}{\partial x^j \partial x^k \partial x^l}$$

σημαίνει πως αρχικά παραγωγίζουμε την f^i ως προς τη μεταβλητή x^l, το αποτέλεσμα το παραγωγίζουμε ως προς x^k και τέλος το αποτέλεσμα που προκύπτει το παραγωγίζουμε ως προς x^j. Σημειώνεται εδώ, πως αν υπάρχει η παράγωγος μεγαλύτερης τάξης, η σειρά με την οποία εκτελούμε τις παραγωγίσεις δεν έχει σημασία. Έτσι:

$$\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^k \partial x^j} \tag{94}$$

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε το πολύ σημαντικό ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 3.2.1 Αν η $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$ είναι παραγωγίσιμη στο a, τότε το στοιχείο της $i-$γραμμής και της $j-$στήλης της $(Df)(a)$ δίνεται από τη σχέση

$$[(Df)(a)]^i_j = \frac{\partial f^i}{\partial x^j} \tag{95}$$

Απόδειξη: Προκύπτει από τον ορισμό της παραγώγου και αν θεωρήσουμε κάθε φορά ότι προσεγγίζουμε το σημείο a μεταβάλλοντας μόνο την $j-$μεταβλητή, δηλαδή θέτουμε $h^k = 0, k \neq j$. ∎

Το αντίστροφο του προηγούμενου θεωρήματος ισχύει, δηλαδή αν υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι στο σημείο a, τότε και η συνάρτηση είναι διαφορίσιμη στο a. Επίσης αν έχουμε τη συνάρτηση $g : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$ και τη συνάρτηση $f : \mathcal{R}^m \to \mathcal{R}$, τότε η μερικ·η παράγωγος της $f \circ g$ δίνεται

$$\left(\frac{\partial (f \circ g)}{\partial x^i}\right)_x = \left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)_{g(x)} \cdot \left(\frac{\partial g^j}{\partial x^i}\right)_x \tag{96}$$

όπου ο συμβολισμός

$$\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)_a$$

σημαίνει πως παίρνουμε τη $j-$οστή μερική παράγωγο της f^i στο σημείο a.

3.3 Αντίστροφες και πεπλεγμένες συναρτήσεις

Στο σημείο αυτό θα εστιάσουμε στις συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο του $\mathcal{R}^n$ και πεδίο τιμών το $\mathcal{R}^n$. Σε αυτήν την περίπτωση, η παράγωγος της συνάρτησης σε ένα σημείο είναι ένας τετραγωνικός πίνακας διάστασης $n \times n$. Με δεδομένο ότι η παράγωγος της συνάρτησης είναι μια γραμμική προσέγγιση της συνάρτησης τοπικά γύρω από το σημείο που υπολογίζουμε την παράγωγο, θα μπορούσαμε να γράψουμε

$$f(x) - f(a) \sim (Df)(a) \cdot (x - a) \tag{97}$$

Αν τώρα η ορίζουσα του πίνακα $(Df)(a)$ είναι διάφορη του μηδενός, μπορούμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο πίνακα και να γράψουμε

$$x - a = [(Df)(a)]^{-1}\left(f(x) - f(a)\right) \tag{98}$$

δηλαδή βρήκαμε έναν αντίστροφο μετασχηματισμό ο οποίος θα μπορούσε να είναι η παράγωγος της αντίστροφης συνάρτησης.

Ξεκινάμε λοιπόν να δείξουμε την ύπαρξη ή όχι της αντίστροφής συνάρτησης από το επόμενο λήμμα:

Λήμμα 3.3.1 Αν $f : A \subset \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$ μια συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση και M τέτοιο ώστε $\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)_x \leq M$ για x εσωτερικό σημείο του A, τότε

$$\|f(x) - f(y)\| \leq n^2 M \|x - y\|$$

για όλα τχ $x, y \in A$.

Απόδειξη: Στην έκφραση $f^(y) - f^j(x)$ μπορούμε να προσθέσουμε και αφαιρέσουμε ότους και να γράψουμε

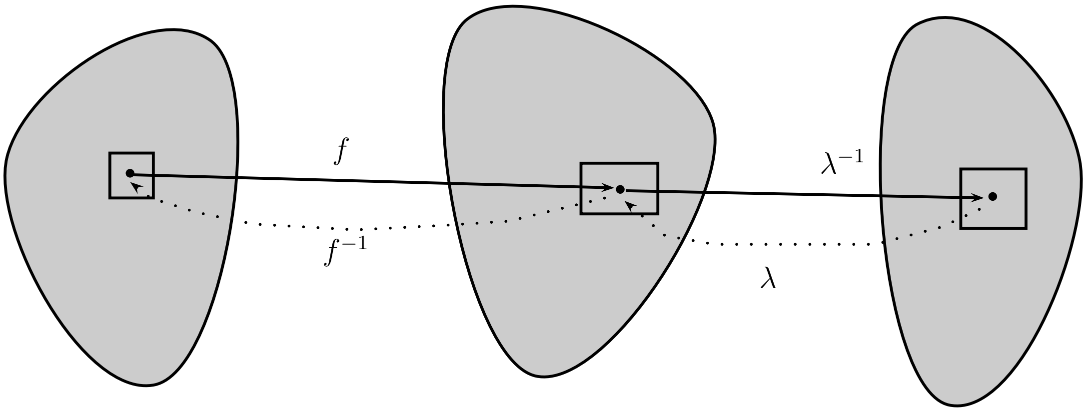
$$f^i(y) - f^i(x) = \sum_{j=1}^{n}\left[f^i(y^1, \ldots, y^j, x^{j+1}, \ldots, x^n) - f^i(y^1, \ldots, y^{j-1}, x^j, \ldots, x^n)\right]$$

Αν εφαρμόσουμε τώρα το θεώρημα μέσης τιμής θα έχουμε

$$f^i(y^1, \ldots, y^j, x^{j+1}, \ldots, x^n) - f^i(y^1, \ldots, y^{j-1}, x^j, \ldots, x^n) = \left(y^j - x^j\right) \cdot \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)_{z_{ij}}$$

και επειδή η έκφραση στο δεύτερο μέλος είναι $\leq M \cdot \|y^j - x^j|$ θα έχουμε

$$\|f^i(y) - f^i(x)\| \leq nM\|y - x|$$



Σχήμα 8: Μπορούμε να αντικαταστήσουμε την f με τη συνάρτηση $\lambda^{-1} \circ f$, όπου $\lambda = (Df)(a)$ της οποίας η παράγωγος στο a είναι ο μοναδιαίος πίνακας.

Τέλος

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|f^i(y) - f^i(x)\| \leq n^2 M \|y - x\|$$

∎

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε το θεώρημα για την αντίστροφη συνάρτηση:

Θεώρημα 3.3.2 Υποθέτουμε ότι η $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη σε ένα ανοικτό σύνολο που περιέχει το σημείο a και $det\left((Df)(a)\right) \neq 0$. Υπάρχει τότε ένα ανοικτό σύνολο V που περιέχει το a και ένα ανοικτό σύνολο W που περιέχει το $f(a)$, έτσι ώστε η $f : V \to W$ να έχει συνεχή αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : W \to V$ η οποία είναι διαφορίσιμη και για όλα τα $y \in W$ ισχύει

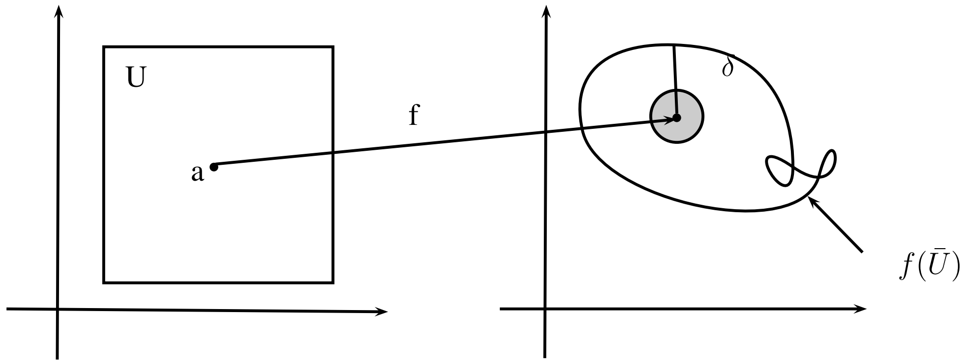
$$\left(Df^{-1}\right)(y) = \left[(Df)\left(f^{-1}(y)\right)\right]^{-1} \tag{99}$$

Απόδειξη: Έστω $\lambda = (Df)(a)$ και επειδή $det(\lambda) \neq 0$ θα υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας λ^{-1}. Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $\lambda^{-1} \circ f$ της οποίας η παράγωγος στο a θα είναι $\lambda^{-1} \cdot \lambda = I_n$, δηλαδή το μοναδιαίο πίνακα. Επειδή ο λ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός, προκύπτει εύκολα πως αν το θεώρημα ισχύει για τη συνάρτηση $\lambda^{-1} \circ f$ θα ισχύει και για την f. Επομένως, μπορούμε από εδώ και πέρα να θεωρούμε ότι η παράγωγος της f στο a είναι ο μοναδιαίος πίνακας. Με αυτήν την παραδοχή, αν υπήρχε κάποιο σημείο y κοντά στο a τέτοιο ώστε $f(y) = f(a)$ θα είχαμε

$$\frac{\|F(y) - f(a) - \lambda(y - a)\|}{\|y - a\|} = \frac{\|y - a|}{\|y - a|} = 1$$

Όμως

$$\lim_{y \to a} \frac{\|F(y) - f(a) - \lambda(y - a)\|}{\|y - a\|} = 0$$



Σχήμα 9: Μπορούμε να βρούμε έναν αριθμό δ τέτοιο ώστε κάθε σημείο του συνόρου του $f(U)$ να απέχει απόσταση μεγαλύτερη από δ από το $f(a)$.

και έτσι θα υπάρχει μια περιοχή που η παραπάνω έκφραση θα είναι μικρότερη του 1 και έτσι σε αυτήν την περιοχή δεν μπορεί το $f(y) = f(a)$. Έστω U_1 αυτή η περιοχή, δηλαδή $f(x) \neq f(a), x \in U$. Επιπλέον, επειδή η f είναι συνεχώς διαφορίσιμη, θα υπάρχει μια περιοχή U_2 γύρω από το a στην οποία η $det(Df)$ θα είναι διάφορη του μηδενός. Έστω τώρα $U = U_1 \cap U_2$. Τότε, στην U η f παίρνει μοναδικές τιμές, είναι δηλαδή $1-1$ (βασική προϋπόθεση για να υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση). Μπορούμε ακόμα να περιορίσουμε επιπλέον την U έτσι ώστε να ισχύει ότι

$$\left| \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)_x - \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)_a \right| < \frac{1}{2n^2}, x \in U$$

Αν εφαρμόσουμε τώρα το προηγούμενο λήμμα στη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} \|f(x_1) - x_1 - f(x_2) + x_2\| &\leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\| \Rightarrow \\ \|x_1 - x_2\| - |f(x_1) - f(x_2)\| &\leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\| \Rightarrow \\ \|x_1 - x_2\| &\leq 2\|f(x_1) - f(x_2)\| \end{aligned}$$

Ας θωρήσουμε τώρα την εικόνα $f(\bar{U})$ του συνόρου του U. Το σύνολο αυτό είναι συμπαγές το οποίο δεν περιέχει το στοιχείο $f(a)$. Θα υπάρχει λοιπόν ένας αριθμός δ τέτοιος ώστε κάθε σημείο του συνόρου του U θα έχει εικόνα η οποία θα απέχει απόσταση μεγαλύτερη από δ από το $f(a)$, δηλαδή $\|f(a) - f(x)| \geq \delta, x \in \bar{U}$. θεωρούμε τώρα την περιοχή W για την οποία ισχύει $W = \{y : \|y - f(a)\| < \delta/2\}$. Έτσι, αν $y \in W$ και $x \in \bar{U}$ θα έχουμε

$$\|y - f(a)\| < \|y - f(x)|$$

Το επόμενο βήμα τώρα είναι να δείξουμε ότι για κάθε $y \in W$ θα υπάρχει μοναδικό $x \in U$ για το οποίο θα ισχύει $f(x) = y$. θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση

$$g(x) = \|y - f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y^i - f^i(x)\right)^2$$

Η συνάρτηση g τώρα είναι συνεχής, παίρνει ελάχιστη τιμή στο U και αυτή την ελάχιστη τιμή δεν την παίρνει στο σύνορο του U. Έτσι, θα παίρνει την ελάχιστη τιμέ σε κάποιο εσωτερικό σημείο του U και σε αυτό το σημείο οι μερικές παράγωγοι θα μηδενίζονται. Έτσι:

$$\sum_{i=1}^{n} 2\left(y^i - f^i(x)\right) \cdot \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)_x = 0$$

το οποίο είναι ένα ομογενές γραμμικό σύστημα με ορίζουσα διαφορετική του μηδενός. Επομένως, η μοναδική λύση του συστήματος είναι η μηδενική και θα ισχύει $y^i = f^i(x)$ δηλαδή $y = f(x)$. Επίσης, η λύση αυτή θα είναι μοναδική γιατί δείξαμε προηγουμένως ότι $\|x_1 - x_2\| \leq 2\|f(x_1) - f(x_2)\|, x_1, x_2 \in U$. Υπάρχει λοιπόν η αντίστροφη συνάρτηση η οποία είναι και συνεχής αν δούμε πάλι την προηγούμενη σχέση, θέτοντας $x = f^{-1}(y)$ δηλαδή $\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)\| \leq 2\|y_1 - y_2\|$.

Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι η f^{-1} είναι διαφορίσιμη. Έστω $\mu = (Df)(x)$. Μπορούμε να προσεγγίσουμε τοπικά τη συνάρτηση f με την παράγωγο, δηλαδή να γράψουμε

$$f(x_1) = f(x) + \mu(x_1 - x) + \phi(x_1 - x)$$

όπου για την ϕπρέπει να ισχύει

$$\lim_{x_1 \to x} \frac{\|\phi(x_1 - x)\|}{\|x_1 - x\|} = 0$$

Αντικαθιστώντας το x με $f^{-1}(y)$ η παραπάνω σχέση γράφεται

$$f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y) + \mu^{-1}(y_1 - y) - \mu^{-1}\phi\left(f^{-1}(y_1) - f_{-1}(y)\right)$$

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{y_1 \to y} \frac{\|\mu^{-1}\phi\left(f^{-1}(y_1) - f_{-1}(y)\right)\|}{\|y_1 - y\|} = 0$$

Επειδή όμως ο μ^{-1} είναι γραμμικός μετασχηματισμός, αρκεί

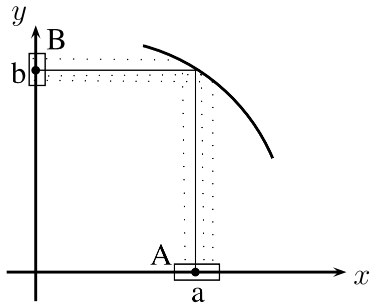
$$\lim_{y_1 \to y} \frac{\|\phi\left(f^{-1}(y_1) - f_{-1}(y)\right)\|}{\|y_1 - y\|} = 0$$

Όμως

$$\frac{\|\phi\left(f^{-1}(y_1) - f_{-1}(y)\right)\|}{\|y_1 - y\|} = \frac{\|\phi\left(f^{-1}(y_1) - f_{-1}(y)\right)\|}{\|\left(f^{-1}(y_1) - f_{-1}(y)\right)\|} \cdot \frac{\|\left(f^{-1}(y_1) - f_{-1}(y)\right)\|}{\|y_1 - y\|}$$

Ο πρώτος όρος του δεύτερου μέλους όμως τείνει στο μηδέν ενώ ο δεύτερος όρος είναι φραγμένος από το 2. Έτσι, ο μ^{-1} είναι ίσιος με $(Df^{-1})(x)$. ∎

Ας θεωρήσουμε τώρα τη συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ και ένα ζεύγος τιμών (a, b) για το οποίο ισχύει $f(a, b) = 0$. παρατηρούμε τώρα ότι υπάρχει ένα διάστημα A που περιέχει το a και ένα διάστημα B που περιέχει το b έτσι ώστε για κάθε $x \in A$ υπάρχει μοναδικό $y \in B$ με $f(x, y) = 0$. Η ιδιότητα αυτή είναι πολύ σημαντική γιατί από τη



Σχήμα 10: Γραφικός προσδιορισμός του y αν δίνεται το x και ισχύει ότι $f(x, y) = 0$.

στιγμή που επιβάλλουμε μια συνθήκη σε μια συνάρτηση, είναι δυνατόν να υπολογίσουμε κάποιες από τις ανεξάρτητες μεταβλητές της από τις υπόλοιπες. Η γενίκευση του παραπάνω παραδείγματος αφορά συναρτήσεις που το πεδίο ορισμού τους είναι μεγαλύτερης διάστασης από το πεδίο τιμών. Έτσι, αν έχουμε την $f : \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m \to \mathcal{R}^m$ και θεωρήσουμε το σημείο $(a, b) = (a^1, \ldots, a^n, b^1, \ldots, b^m)$ τέτοιο ώστε $f(a, b) = 0$ τότε είναι δυνατόν να ορίσουμε μια συνάρτηση $g : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$ τέτοια ώστε σε μια περιοχή του a να ισχύει $f(x, g(x)) = 0$. Τις προϋποθέσεις για να μπορεί να συμβεί κάτι τέτοιο μας τις δίνει το επόμενο θεώρημα:

Θεώρημα 3.3.3 Έστω η $f : \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m \to \mathcal{R}^m$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη σε ένα ανοικτό σύνολο που περιέχει το σημείο (a, b) και $f(a, b) = 0$. Έστω M ο $m \times m$ πίνακας του οποίου το $i, j-$στοιχείο δίνεται

$$\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^{n+j}} \right)_{(a,b)}$$

Αν $detM \neq 0$, υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο $A \subset \mathcal{R}^n$ το οποίο περιέχει το a και ανοικτό σύνολο $B \subset \mathcal{R}^m$ το οποίο περιέχει το b ώστε να ικανοποιείται η ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε $x \in A$ υπάρχει μοναδικό $g(x) \in B$ έτσι ώστε $f(x, g(x)) = 0$. Η συνάρτηση g είναι διαφορίσιμη στο A.

Απόδειξη: Από την f κατασκευάζουμε τη συνάρτηση $F : \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m \to \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m$ με $F(x, y) = (x, f(x, y))$. Τότε, η παράγωγος της F είναι ο $(m + n) \times (m + n)$ πίνακας που θα δίνεται

$$DF = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ L & M \end{pmatrix}$$

όπου I_n ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας και (L, M) η παράγωγος της f. Έτσι, $det(DF) = detM \neq 0$ και έτσι η συνάρτηση F έχει αντίστροφη σε μια περιοχή U που περιέχει το σημείο (a, b). Η αντίστροφη συνάρτηση ορίζεται σε μια περιοχή W που περιέχει το $F(a, b) = (a, 0)$. Έστω h η αντίστροφη συνάρτηση. Τότε αυτή θα είναι της μορφής $h(x, y) = (x, k(x, y))$ για κάποια διαφορίσιμη συνάρτηση k. Ορίζουμε τώρα τη συνάρτηση $\pi \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m \to \mathcal{R}^m$ με

$\pi(x, y) = y$ και έτσι $\pi \circ F = f$. Τότε

$$\begin{aligned} f(x, k(x, y)) &= f \circ h(x, y) \\ &= (\pi \circ F) \circ h(x, y) \\ &= \pi \circ (F \circ h)(x, y) \\ &= \pi(x, y) = y \end{aligned}$$

Συνεπώς $f(x, k(x, 0)) = 0$ και έτσι μπορούμε να ορίσουμε την g να είναι $g(x) = k(x, 0)$. ∎

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε και την παράγωγο της g. Πράγματι, επειδή $f(x, g(x)) = 0$ θα έχουμε

$$\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)_{(x,g(x))} + \sum_{l=1}^{m} \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^{n+l}}\right)_{(x,g(x))} \cdot \left(\frac{\partial g^l}{\partial x^j}\right)_x = 0 \tag{100}$$

Το παραπάνω σύστημα εξισώσεων έχει λύση γιατί $det M \neq 0$. Για παράδειγμα, αν η $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ θα είχαμε για την παράγωγο της g

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{x}\right)_{(x,g(x))} + \left(\frac{\partial f}{y}\right)_{(x,g(x))} \cdot g'(x) = 0 \Rightarrow \\ 2x + 2g(x) \cdot g'(x) = 0 \Rightarrow \\ g'(x) = -\frac{x}{g(x)} \end{aligned}$$

Ολοκληρώνουμε αυτήν την παράγραφο με μια γενικευμένη διατύπωση του προηγούμενου θεωρήματος:

Θεώρημα 3.3.4 Έστω $f\mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^p$ μια συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση σε ένα ανοικτό σύνολο το οποίο περιέχει το σημείο a και $n > p$. Αν τώρα $f(a) = 0$ και ο πίνακας της παραγώγου της f στο a έχει τάξη p, τότε υπάρχει ανοικτό σύνολο $a \subset \mathcal{R}^n$ που περιέχει το a και μια διαφορίσιμη συνάρτηση $h : a \to \mathcal{R}^n$ με διαφορίσιμη αντίστροφη ώστε να ισχύει

$$f \circ h(x^1, \ldots, x^n) = (x^{n-p+1}, \ldots, x^n) \tag{101}$$

Απόδειξη: Το θεώρημα αυτό είναι απλή εφαρμογή του προηγούμενου αν θεωρήσουμε την $f : \mathcal{R}^{n-p} \times \mathcal{R}^p \to \mathcal{R}^p$ και ισχύει ότι η ορίζουσα του $p \times p$ πίνακα με $i, j-$στοιχεία

$$\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^{n-p+j}}\right)_a$$

είναι διάφορη του μηδενός. Στη γενική περίπτωση, μπορούμε να βρούμε $p-$στήλες από τον $p \times n$ πίνακα της παραγώγου $(Df)(a)$ έτσι ώστε ο $p \times p$ πίνακας που σχηματίζεται να έχει μη μηδενική ορίζουσα. Έστω τώρα μια συνάρτηση v η οποία μεταθέτει τις συνιστώσες ενός διανύσματος ώστε οι στήλες που επιλέξαμε να έρχονται στο τέλος του διανύσματος. Η συνάρτηση τώρα $f \circ v$ ικανοποιεί τις απαιτήσεις του προηγούμενου θεωρήματος και έτσι θα υπάρχει συνάρτηση h τέτοια ώστε

$$(f \circ v) \circ h(x^1, \ldots, x^n) = (x^{n-p+1}, \ldots, x^n)$$

και επομένως η ζητούμενη συνάρτηση είναι η $v \circ h$. ∎

3.4 Εφαρμογές

3.4.1 Αλλαγή μεταβλητών

Έστω η $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ και το $x \in \mathcal{R}^n$ εξαρτάται με τη σειρά του από το $z \in \mathcal{R}^n$. Δηλαδή θέλουμε να αλλάξουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή x σε z. Τότε

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \; x^i = x^i(z^1, z^2, \ldots, z^n) = x^i(z^j) \tag{102}$$

Θεωρώντας τώρα τις συνιστώσες x^i σαν συναρτήσεις των z^j, μπορούμε να γράψουμε:

$$F(z^i) = f\left(x^i(z^j)\right) \tag{103}$$

δηλαδή

$$F = f \circ \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \tag{104}$$

και έτσι:

$$(DF)(z^i) = (Df)(x^i(z^j)) \cdot D \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} (z^j) \tag{105}$$

ή

$$(DF)(z^i) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right)_{(x^i(z^j))} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial z^1} & \frac{\partial x^1}{\partial z^2} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial z^n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial z^1} & \frac{\partial x^n}{\partial z^2} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial z^n} \end{pmatrix} \tag{106}$$

Έτσι:

$$\left[(DF)(z^j)\right]_i = \frac{\partial f}{\partial x^1} \cdot \frac{\partial x^1}{\partial z^i} + \frac{\partial f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x^2}{\partial z^i} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n} \cdot \frac{\partial x^n}{\partial z^i}$$

ή χρησιμοποιώντας τη σύμβαση της άθροισης

$$\left[(DF)(z^j)\right]_i = \frac{\partial f}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial z^i} \tag{107}$$

Ας δούμε ένα παράδειγμα: Έστω $f(x, y) = x^2 - 2xy$ και $x = rcos\theta$, $y = rsin\theta$. Τότε:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = (2x - 2y) \cdot cos\theta - 2x \cdot sin\theta$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} = (2x - 2y) \cdot (-rsin\theta) - 2x \cdot rcos\theta$$

3.4.2 Έμμεση παραγώγιση

Ας υποθέσουμε πως $f(x) = g(t)$ πράγμα που σημαίνει πως υπάρχει μια σχέση μεταξύ της ανεξάρτητης μεταβλητής x και t. Έστω ότι θέλουμε να βρούμε την $\frac{dx}{dt}$ ακόμα και αν είναι αδύνατο να υπολογίσουμε την $x(t)$. Τότε:

$$\frac{d}{dt}\left[f(x)\right] = \frac{dg(t)}{dt} \tag{108}$$

και χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας:

$$\frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = g'(t) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{g'(t)}{f'(x)} \tag{109}$$

Σαν παράδειγμα ας υπολογίσουμε την εξίσωση της εφαπτομένης στην καμπύλη $x^3 - 3y^3 + xy + 21 = 0$ στο σημείο $(1, 2)$. Η κλίση της ευθείας δίνεται από την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$. Έτσι:

$$\tfrac{d}{dx}\left[x^3 - 3y^2 + xy + 21\right] = 0 \Rightarrow$$

$$3x^2 - 9y^2\tfrac{dy}{dx} + y + x\tfrac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow$$

$$\tfrac{dy}{dx} = \tfrac{3x^2+y}{9y^2-x} \Rightarrow$$

$$\tfrac{dy}{dx}\Big|_{(1,2)} = \tfrac{1}{7}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας είναι: $y = \frac{1}{7}x + b$ και πρέπει να περνά από το σημείο $(1, 2)$. Έτσι $b = \frac{13}{7}$ και η εξίσωση της ευθείας είναι: $x - 7y + 13 = 0$.

3.4.3 Παραγώγιση ολοκληρωμάτων: Ο κανόνας του Leibniz

Γνωρίζουμε πως αν $f(x) = F'(x)$ τότε:

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

και έτσι

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = \frac{d}{dx}\left[F(x) - F(a)\right] = F'(x) = f(x)$$

Ισχύει επίσης:

$$\frac{d}{dx}\int_x^a f(t)dt = -f(x)$$

Έστω τώρα

$$I = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt$$

Τότε:

$$\frac{dI}{dx} = \frac{\partial I}{\partial h} \cdot \frac{dh}{dx} + \frac{\partial I}{\partial g} \cdot \frac{dg}{dx} \Rightarrow$$

$$\frac{dI}{dx} = f(h(x)) \cdot h'(x) - f(g(x)) \cdot g'(x) \tag{110}$$

Έτσι για παράδειγμα, αν

$$I(x) = \int_0^{x^{1/3}} t^2 dt$$

ϑα έχουμε:

$$\frac{dI(x)}{dx} = \left(x^{1/3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} x^{-2/3} = \frac{1/3}{}$$

Αν τώρα

$$I(x) = \int_{x^2}^{sin^{-1}x} \frac{sint}{t} dt$$

ϑα έχουμε

$$\frac{dI(x)}{dx} = \frac{sin\,(sin^{-1}x)}{sin^{-1}x} \cdot \frac{dsin^{-1}x}{dx} - \frac{sinx^2}{x^2} 2x \Rightarrow$$
$$\frac{dI(x)}{dx} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2} \cdot sin^{-1}x} - \frac{2}{x} sinx^2$$

3.4.4 Προβλήματα βελτιστοποίησης

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια επιφάνεια, τα σημεία της οποίας ικανοποιούν την εξίσωση

$$z = xy + 5 \tag{111}$$

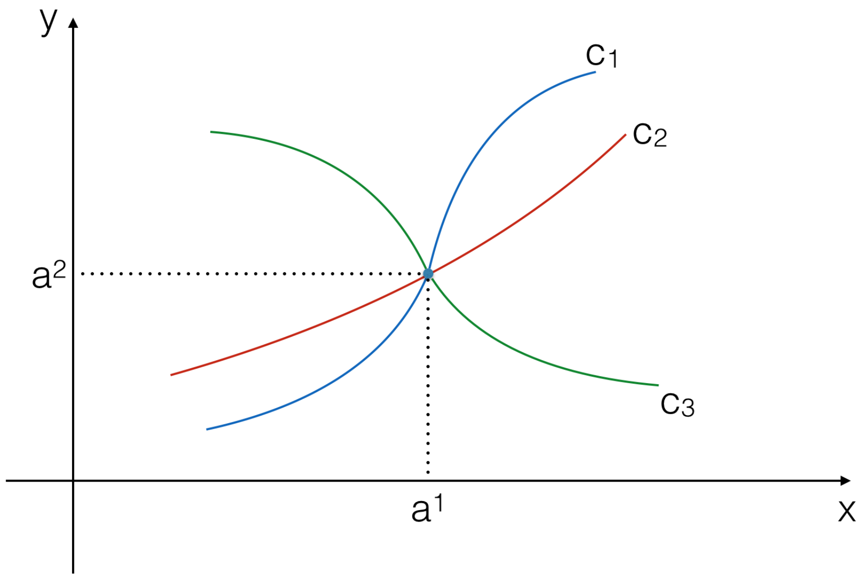
και ϑέλουμε να βρούμε το σημείο της επιφάνειας που είναι πιο κοντά στην αρχή των αξόνων. Θέλουμε λοιπόν το ελάχιστο της συνάρτησης

$$f : \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}\ ,\ f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \tag{112}$$

με τον περιορισμό

$$g(x,y,z) - z - xy - 5 = 0 \tag{113}$$

Πριν αναπτύξουμε τη μεθοδολογία για τη λύση αυτού του προβλήματος, ας δούμε λίγο πως επεκτείνεται η ϑεωρία των ακροτάτων μιας συνάρτησης μιας μεταβλητής στις πραγματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Στην περίπτωση της συνάρτησης μιας μεταβλητής, ξέρουμε ότι αν η $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ σε ένα σημείο x_0 ισχύει $f'(x_0) = 0$ τότε στο σημείο αυτό η συνάρτησης πιθανά να έχει κάποιο ακρότατο (τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο). Το τι ακριβώς ϑα συμβαίνει εξαρτάται από τη μονοτονία της f αριστερά και δεξιά του σημείου x_0, ή αλλιώς από το πρόσημο της $f'(x)$ αριστερά και δεξιά του x_0. Έτσι, αν $f'(x) < 0$ για $x < x_0$ και $f'(x) > 0$ για $x > x_0$ ϑα έχουμε ένα τοπικό ελάχιστο στο x_0 και η $f'(x)$ ϑα είναι αύξουσα γύρω σε μια περιοχή του x_0 πράγμα που σημαίνει πως η $f''(x_0) > 0$. Αντίστοιχα, αν $f'(x) > 0$ για $x < x_0$ και $f'(x) < 0$ για $x > x_0$ ϑα έχουμε ένα τοπικό μέγιστο στο x_0 και η $f'(x)$ ϑα είναι φθίνουσα γύρω σε μια περιοχή του x_0 πράγμα που σημαίνει πως η $f''(x_0) < 0$. Τέλος, αν η $f'(x)$ έχει το ίδιο πρόσημο και αριστερά και δεξιά του x_0 αυτό σημαίνει πως η f' ϑα έχει ένα τοπικό ακρότατο στο x_0 και έτσι η $f''(x_0) = 0$. Στην περίπτωση αυτή, η f ϑα είναι σταθερά αύξουσα ή φθίνουσα σε μια περιοχή του x_0 και



Σχήμα 11: Η συμπεριφορά μιας πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών, σε μια περιοχή ενός σημείου, εξαρτάται από το δρόμο τον οποίο ακολουθούμε για να πλησιάσουμε αυτό το σημείο.

έτσι δε θα έχει ακρότατο στο σημείο x_0 (στην περίπτωση αυτή λέμε πως το x_0 είναι σημείο καμπής). Αυτή η θεωρία μπορεί με φυσιολογικό τρόπο να επεκταθεί και στην περίπτωση πραγματικών συναρτήσεων πολλών μεταβλητών. Έστω λοιπόν η $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ και θέλουμε να ελέγξουμε τη συμπεριφορά της f γύρω από το σημείο a. Εδώ πρέπει να λάβουμε υπόψη μας ότι υπάρχουν άπειροι δρόμοι τους οποίους μπορούμε να ακολουθήσουμε προκειμένου να προσεγγίσουμε το σημείο a. Αν $a = (a^1, a^2)^T$ και $f : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ τότε, όπως φαίνεται στο σχήμα 11 μπορούμε να προσεγγίσουμε το σημείο a ακολουθώντας οποιαδήποτε από τις καμπύλες c_1, c_2, c_3. Τίποτε δε μας εξασφαλίζει ότι η f θα συμπεριφέρεται το ίοδιο και στις τρεις περιπτώσεις. Για παράδειγμα μπορούμε να φανταστούμε τη σέλα ενός αλόγου. Το σημείο που κάθεται ο αναβάτης είναι ένα τοπικό μέγιστο αν ακολουθήσουμε ένα δρόμο από το ένα πλάι της σέλας στο άλλο, ενώ είναι ένα τοπικό ελάχιστο αν ακολουθήσουμε μια διαδρομή από το πίσω στο μπροστινό μέρος της σέλας.

Ας επανέλθουμε τώρα στην $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ και έστω ότι η f έχει ένα τοπικό ακρότατο στο σημείο a. Τότε αν κινηθούμε κατά την κατεύθυνση x^i, θα έχουμε όλες τις υπόλοιπες ανεξάρτητες μεταβλητές $x^j, j \neq i$ σταθερές και μόνο η x^i θα μεταβάλλεται. Έτσι η f γίνεται συνάρτηση μιας μεταβλητής και αφού στο a θα έχει τοπικό ακρότατο θα πρέπει

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right]_a = 0 \tag{114}$$

Αυτή η σχέση θα πρέπει να ισχύει για κάθε x^i. Επίσης, αν το a είναι τοπικό μέγιστο θα πρέπει

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial (x^i)^2}\right|_a < 0 \tag{115}$$

ενώ αν το a είναι τοπικό ελάχιστο θα πρέπει

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial (x^i)^2}\right|_a > 0 \tag{116}$$

Οι παραπάνω συνθήκες είναι αναγκαίες συνθήκες αλλά δεν μπορούμε να πούμε με βεβαιότητα ότι είναι και ικανές. Για να το δούμε αυτό θα θεωρήσουμε την $f : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ με $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_a = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_a = 0$. Αφού οι μερικές παράγωγοι μηδενίζονται, το a είναι ένα πιθανό σημείο ακρότατου της f. Ας υποθέσουμε ακόμα πως

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$$

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, το a πρέπει να είναι τοπικό μέγιστο. Ας δούμε όμως το ανάπτυγμα Taylor της f γύρω από το a:

$$f(a+\delta) = f(a) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_a \cdot h + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_a \cdot k + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_a \cdot \frac{h^2}{2!} + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_a \cdot \frac{k^2}{2!} + 2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_a \cdot \frac{h \cdot k}{2!} + \ldots \tag{117}$$

όπου $\delta = (h, k)$. Έτσι, για h, k πολύ κοντά στο 0 και επειδή οι μερικές παράγωγοι της f στο a μηδενίζονται, θα έχουμε:

$$f(a+\delta) - f(a) \simeq \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_a \cdot \frac{h^2}{2} + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_a \cdot \frac{k^2}{2} + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_a \cdot h \cdot k \tag{118}$$

Για να είναι τώρα το $f(a)$ μέγιστο, θα πρέπει $f(a+\delta) - f(a) < 0$ ή

$$A \cdot h^2 + 2B \cdot h \cdot k + c \cdot k^2 < 0 \tag{119}$$

όπου έχουμε θέσει:

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_a = A \ , \ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_a = B \ , \ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_a = C$$

Τότε πρέπει:

$$A\left(h + B\frac{k}{A}\right)^2 + \left(C - \frac{B^2}{A}\right)k^2 < 0 \tag{120}$$

και αφού $A < 0$, θα πρέπει $C - \frac{B^2}{A} < 0$ ή

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2_a < \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_a \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_a \tag{121}$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να εργαστούμε και στην περίπτωση του τοπικού ελαχίστου και να εξάγουμε μια παρόμοια σχέση.
Ας επανέλθουμε τώρα στο πρόβλημα στο οποίο θέλουμε να βρούμε ένα ακρότατο της $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ όταν έχουμε τις συνθήκες (περιορισμούς) $g : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$ με $g(x) = 0$, δηλαδή

$$g(x) = \begin{pmatrix} g^1(x) \\ g^2(x) \\ \vdots \\ g^m(x) \end{pmatrix} = 0 \tag{122}$$

Η τεχνική που ακολουθούμε εδώ είναι γνωστή ως πολλαπλασιαστές Lagrange και έχει ως εξής: Αντί της f, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(x) = f(x) + \lambda_1 g^1(x) + \ldots \lambda_m g^m(x) \tag{123}$$

ή θεωρώντας τη σύμβαση της άθροισης

$$F(x) = f(x) + \lambda_i g^i(x) \tag{124}$$

Τότε

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x^i} dx^i = \frac{\partial f}{\partial x^i} + \lambda_j \frac{\partial g^j}{\partial x^i} = 0 \tag{125}$$

που είναι $n-$ εξισώσεις οι οποίες μαζί με τις $m-$ εξισώσεις $g^j(x) = 0$ μπορούν να προσδιορίσουν τους $n + m$ αγνώστους $x^1, x^2, \ldots, x^n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Ας δούμε μερικά παραδείγματα:
Έστω ότι ζητάμε την ελάχιστη απόσταση των σημείων της επιφάνειας $y = 1 - x^2$ από την αρχή των αξόνων. Θέτουμε $f(x, y) = x^2 + y^2$ και $g(x, y) = y + x^2 - 1 = 0$. Τότε:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \Rightarrow 2x + 2\lambda y = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ή } \lambda = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \Rightarrow 2y + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -2y$$

και επειδή $g(x, y) = 0 \Rightarrow y + x^2 - 1 = 0$.
Αν $x = 0$ τότε $y = 1$, $\lambda = -2$ και αν $\lambda = -1$ τότε $y = 1/2$ και $x = \pm\sqrt{2}/2$. Έτσι έχουμε 3 υποψήφια σημεία: $(0, 1), (\sqrt{2}/2, 1/2), (-\sqrt{2}/2, 1/2)$. Όμως $f(0, 1) = 1, f(\sqrt{2}/2, 1/2) = f(-\sqrt{2}/2, 1/2) = 3/4$. Έτσι η ελάχιστη απόσταση είναι 3/4 και την έχουν τα σημεία $(\sqrt{2}/2, 1/2)$ και $(-\sqrt{2}/2, 1/2)$.
Έστω τώρα ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την ελάχιστη απόσταση της τομής των επιφανειών $xy = 6$ και $7x + 24z = 0$ από τη αρχή των αξόνων. Θέτουμε:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$g^1(x, y, z) = xy - 6 = 0$$

$$g^2(x, y, z) = 7x + 24z = 0$$

Τότε:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial g^1}{\partial x} + \lambda - 2\frac{\partial g^2}{\partial x} = 2x + \lambda_1 y + 7\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_1 \frac{\partial g^1}{\partial y} + \lambda - 2\frac{\partial g^2}{\partial y} = 2y + \lambda_1 x = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda_1 \frac{\partial g^1}{\partial z} + \lambda - 2\frac{\partial g^2}{\partial z} = 2z + 24\lambda_2 = 0$$

Προκύπτει ότι:

$$x = \pm\frac{12}{5}\ ,\ y = \pm\frac{5}{2}\ ,\ z = \pm\frac{7}{10}$$

3.5 Ασκήσεις

1. Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση είναι διαφορίσιμη στο a τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

   Λύση: Έχουμε

   $$\begin{aligned} \|f(a+h) - f(a)\| &= \|f(a+h) - f(a) - (Df)(a)h + (Df)(a)h\| \\ &\leq \|f(a+h) - f(a) - (DF)(a)h\| + M\|h\| \end{aligned}$$

   όπου η τελευταία έκφραση τείνει στο μηδέν.

2. Μια συνάρτηση $f : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ δεν εξαρτάται από τη δεύτερη μεταβλητή αν ισχύει $f(x, y_1) = f(x, y_2)$. Να δείξετε ότι σε αυτήν την περίπτωση υπάρχει $g : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ τέτοια ώστε $f(x, y) = g(x)$ και να βρείτε την παράγωγο της f.

   Λύση: Ορίζουμε για ένα τυχαίο y_0 τη συνάρτηση $g : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ με $g(x) = f(x, y_0)$. Τότε $f(x, y) = f(x, y_0) = g(x)$. Για την παράγωγο θα έχουμε $(Df)(x) = (g'(x), 0)$.

3. Έστω g μια συνεχής πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο μοναδιαίο κύκλο $\{x \in \mathcal{R}^2 : |x\| = 1\}$ τέτοια ώστε $g(0,1) = g(1,0) = 0$ και $g(-x) = -g(x)$. Ορίζουμε στη συνέχεια τη συνάρτηση $f : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ με

   $$f(x) = \begin{cases} \|x| \cdot g\left(\frac{x}{\|x\|}\right), x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

   Έστω ένα σημείο $x \in \mathcal{R}^2$ και η συνάρτηση $h_x : \mathcal{R} - rightarrow\mathcal{R}$ με $h_x(t) = f(tx)$. Να δείξετε ότι η h_x είναι διαφορίσιμη. Στη συνέχεια να δείξετε ότι η f δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$.

   Λύση: Για την h_x έχουμε

   $$h_x(t) = \begin{cases} t\|x| \cdot g\left(\frac{x}{\|x\|}\right), t > 0 \\ 0, t = 0 \\ -t\|x| \cdot g\left(-\frac{x}{\|x\|}\right) = t\|x| \cdot g\left(\frac{x}{|x\|}\right), t < 0 \end{cases} \tag{126}$$

η οποία είναι διαφορίσιμη με παράγωγο τη σταθερά $\|x| \cdot g\left(-\frac{x}{\|x\|}\right)$. Από την άλλη έχουμε αν $h = (h_x, 0)$ ότι

$$\lim_{h_x \to 0} \frac{\||h_x|g\left(\frac{x}{\|x|}\right) - \lambda(h_x, 0)\|}{|h_x|} = 0$$

πρέπει $\lambda = (0, 0)$. Αν όμως ακολουθήσουμε μια άλλη κατεύθυνση (κατα μήκος του διανύσματος x και θέσουμε $h = tx$ τότε η παράγωγος θα είναι διάφορη του μηδενός. Συνεπώς η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

4. Να δειχτεί ότι η συνάρτηση $f : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ με $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$.

   Λύση: Μπορούμε να υπολογίσουμε την παράγωγο με βάση τον ορισμό αν $h = (h_x, 0)$ και αν $h = t(1, 1)$. Στην πρώτη περίπτωση η παράγωγος θα είναι ο πίνακας $(0, 0)$ ενώ στη δεύτερη $(1/2, 1/2)$. Επομένως δεν είναι διαφορίσιμη

5. Έστω μια συνάρτηση $f : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ με $f(x) \leq \|x\|^2$. Να δειχτεί ότι είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$.

   Λύση: Για $\lambda = 0$ έχουμε
   $$\frac{\|f(h)\|}{\|h\|} \leq \frac{\|h\|^2}{\|h\|} \to 0$$

6. Να δείξετε ότι η $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}^2$ είναι διαφορίσιμη μόνο αν οι f^1, f^2 είναι διαφορίσιμες και ισχύει
   $$(Df)(x) = \begin{pmatrix} (f^1)'(x) \\ (f^2)'(x) \end{pmatrix}$$

   Λύση: Έχουμε
   $$\frac{\left\|\begin{pmatrix} f^1(x+h) \\ f^2(x+h) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f^1(x) \\ f^2(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 h \\ \lambda_2 h \end{pmatrix}\right\|}{|h|} = \frac{\left\|\begin{pmatrix} f^1(x+h) - f^1(x) - \lambda_1 h \\ f^2(x+h) - f^2(x) - \lambda_2 h \end{pmatrix}\right\|}{|h|}$$
   που είναι ίσο με
   $$\sqrt{\frac{(f^1(x+h) - f^1(x) - \lambda_1 h)^2}{|h|^2} + \frac{(f^2(x+h) - f^2(x) - \lambda_2 h)^2}{|h|^2}}$$

7. Να βρείτε με χρήση του ορισμού τις παραγώγους στις ακόλουθες συναρτήσεις:

   α΄) $f(x, y, z) = x^y$

   β΄) $f(x, y, z) = (x^y, z)$

γ′) $f(x,y,z) = sin(x \cdot siny)$

δ′) $f(x,y,z) = x^{y^z}$

ε′) $f(x,y,z) = (x+y)^z$

ϛ′) $f(x,y,z) = sin(xy)$

ζ′) $f(x,y,z) = (sin(xy), sin(x \cdot siny), x^y)$

Λύση: α′)

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^y \\ &= e^{ylnx} \\ &= exp \circ p(\pi^2, ln \circ \pi^1)(x,y,z) \end{aligned}$$

Έτσι

$$\begin{aligned} (Df)(x,y,z) &= e^{ylnx}\left(yD(ln \circ \pi^1)(x,y,z) + lnxD(\pi^2)(x,y,z)\right) \\ &= e^{ylnx}(\frac{y}{x}D\pi^1(x,y,z) + lnxD\pi^2(x,y,z)) \\ &= e^{ylnx}(\frac{y}{x}(1,0,0) + lnx(0,1,0)) \\ &= \left(\frac{y}{x}x^y, x^y lnx, 0\right) \end{aligned}$$

β′)

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (x^y, z) \\ &= \left(exp \circ p(\pi^2, ln \circ \pi^1), \pi^3\right)(x,y,z) \end{aligned}$$

λαμβάνοντας υπ'όψιν την προηγούμενη άσκηση προκύπτει

$$(Df)(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{y}{x}x^y & x^y lnx & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

γ′)

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= sin \circ p(x, siny) \\ &= sin \circ p(\pi^1, sin \circ \pi^2)(x,y,z) \end{aligned}$$

Έτσι

$$\begin{aligned} (Df)(x,y,z) &= cos(xsiny)\left(xD(sin \circ \pi^2) + sinyD\pi^1\right)(x,y,z) \\ &= cos(xsiny)\left(xcosy(0,1,0) + siny(1,0,0)\right) \\ &= (siny \cdot cos(xsiny), xcosy, 0) \end{aligned}$$

δ΄)

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^{y^z} \\ &= exp \circ p\left(exp \circ p(\pi^3, ln \circ \pi^2), ln \circ \pi^1\right)(x,y,z) \end{aligned}$$

Έτσι:

$$\begin{aligned} (Df)(x,y,z) &= x^{y^z}\left(lnxD(exp \circ p(\pi^3, ln \circ \pi^2) + y^z D(ln \circ \pi^1)\right)(x,y,z) \\ &= x^{y^z}\left(lnxy^z(lnyD\pi^3 + zD(ln \circ p^2)) + y^z \frac{1}{x} D\pi^1\right)(x,y,z) \\ &= x^{y^z}\left(lnxy^z(lny(0,0,1) + \frac{z}{y}(0,1,0)) + y^z\frac{1}{x}(1,0,0)\right) \\ &= \left(x^{y^z} y^z \frac{1}{x}, x^{y^z} y^z \frac{z}{y} lnx, x^{y^z} y^z lnx \cdot lny\right) \end{aligned}$$

ε΄)

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (x+y)^z \\ &= exp \circ p(\pi^3, ln \circ s_{xy})(x,y,z) \end{aligned}$$

με $s_{xy}(x,y,z) = x+y$ και $(Ds_{xy})(x,y,z) = (1,1,0)$. Έτσι

$$\begin{aligned} (Df)(x,y,z) &= (x+y)^z(ln(x+y)(0,0,1) + z\frac{1}{x+y}(1,1,0)) \\ &= \left(z(x+y)^{z-1}, x(x+y)^{z-1}, (x+y)^z ln(x+y)\right) \end{aligned}$$

ϛ΄)

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= sin(xy) \\ &= sin \circ p * \pi^1, \pi^2)(x,y,z) \end{aligned}$$

Έτσι:

$$\begin{aligned} (Df)(x,y,z) &= cos(xy)(xD\pi^2 + yD\pi^1)(x,y,z) \\ &= cos(xy)(x(0,1,0) + y(1,0,0)) \\ &= (ycos(xy), xcos(xy), 0) \end{aligned}$$

ζ΄) Μπορούμε να δείξουμε μια γενική ιδιότητα σύμφωνα με την οποία αν $f_1, f_2, \ldots, f_m$ είναι πραγματικές συναρτήσεις στο $\mathcal{R}^n$, δηλαδή $f_1, f_2, \ldots, f_m : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$, τότε η συνάρτηση $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$ που ορίζεται $f(x) = (f_(x), \ldots, f_m(x))$ έχει παράγωγο

$$(Df)(x) = \begin{pmatrix} (Df_1)(x) \\ (Df_2)(x) \\ \vdots \\ (Df_m)(x) \end{pmatrix}$$

8. Μια συνάρτηση $f : \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m \to \mathcal{R}^p$ ονομάζεται διγραμμική αν ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

$$\begin{aligned} f(ax, y) &= af(x, y) = f(x, ay) \\ f(x_1 + x_2, y) &= f(x_1, y) + f(x_2, y) \\ f(x, y_1 + y_2) &= f(x, y_1) + f(x, y_2) \end{aligned}$$

Να δείξετε αρχικά ότι για μια διγραμμική συνάρτηση ισχύει

$$\lim_{(h,k)\to 0} \frac{\|f(h, k)\|}{\|(h, k)\|} = 0$$

Στη συνέχεια να υπολογίσετε την παράγωγο $(Df)(x, y)$ και να δείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $p(x, y) = xy$ είναι μια ειδική περίπτωση.

Λύση: Η πρώτη σχέση μπορεί πολύ εύκολα να δειχτεί αν παρατηρήσουμε ότι $f(h, k) = \|h\| \cdot \|k\| f(\frac{h}{\|h\|}, \frac{k}{\|k\|})$. Στη συνέχεια μπορούμε να διαπιστώσουμε από τον ορισμό της παραγώγου ότι $(Df)(a, b)(x, y) = f(a, x)+f(x, b)$. Τέλος η συνάρτηση $p(x, y) = xy$ είναι διαγραμμική, άρα $(Dp)(a, b)(x, y) = p(a, y) + p(x, b) = ay + bx$.

9. Να υπολογίσετε την παράγωγο της ταυτοτικής συνάρτησης $\iota_n : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$ και στη συνέχεια να δείξετε πως αν μια συνάρτηση $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$ είναι διαφορίσιμη και έχει αντίστροφη συνάρτησην f^{-1} τότε ισχύει $(Df^{-1})(x) = [(Df)(f^{-1}(x)]^{-1}$.

Λύση: Η ταυτοτική συνάρτηση είναι γραμμικός μετασχηματισμός με πίνακα I_n. Ο πίνακας αυτός είναι και η παράγωγος. Στη συνέχεια μπορούμε να γράψουμε $(f \circ f^{-1})(x) = \iota_n(x)$ και έτσι $I_n = (Df)(f^{-1}(x)) \cdot (Df^{-1})(x)$.

10. Ορίζουμε τη συνάρτηση $IP : \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ με $IP(x, y) =< x, y >$. Αφού υπολογίσετε την παράγωγο της $IP(x, y)$, να δείξετε τις ακόλουθες προτάσεις:

α′) Αν $f, g : \mathcal{R} \to \mathcal{R}^n$ και $h : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ με $h(x) =< f(x), g(x) >$ τότε $h'(a) =< f'(a)^T, g(a) > +(f(a), g'(a)^T >$

β′) Αν η $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}^n$ είναι διαφορίσιμη με $\|f(t)\| = 1$ για όλα τα t, τότε $< f'(t)^T, f(t) >= 0$

Λύση: Η συνάρτηση $IP(x, y)$ είναι μια διγραμμική συνάρτηση, επομένως

$$(DIP)(a, b)(x, y) = IP(a, y) + IP(x, b) =< a, y > + < x, b >$$

Η πρώτη πρόταση προκύπτει αν θεωρήσουμε την $h(x, y) = IP \circ (f, g)(x, y)$ και η δεύτερη πρόταση αν γράψουμε $\|f(t)\|^2 =< f(t), f(t) >$.

11. Μια συνάρτηση $f : \mathcal{R}^{n_1} \times \mathcal{R}^{n_2} \times \cdots \times \mathcal{R}^{n_k} \to \mathcal{R}$ λέγεται πολυγραμμική, αν η αντίστοιχη συνάρτηση $g : \mathcal{R}^{n_j} \to \mathcal{R}$ με $g(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \ldots, x_k)$ είναι γραμμικός μετασχηματισμός. Να δείξετε ότι

$$(Df)((a_1, \ldots, a_k)(a_1, \ldots, x_x) = \sum_{i=1}^{k} f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_k)$$

12. Αν θεωρήσουμε τις γραμμές ενός $n \times n$ πίνακα σαν στοιχεία του $\mathcal{R}^n$, μπορούμε να πούμε πως ο πίνακας είναι ένα στοιχείο του $\mathcal{R}^n \times \cdots \mathcal{R}^n$, όπου ο $\mathcal{R}^n$ πολλαπλασιάζεται με τον εαυτό του $n-$φορές.

    α΄) Να δείξετε αρχικά ότι η συνάρτηση της ορίζουσας $det : \mathcal{R}^n \times \cdots \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ είναι διαφορίσιμη και να υπολογίσετε την παράγωγο.

    β΄) Αν $a_{ij} : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις και $f(t) = det(a_{ij}(t))$, να υπολογίσετε την $f'(t)$.

    γ΄) Αν $det(a_{ij}(t)) \neq 0$ για όλα τα t και $b_1, \ldots, b_n : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις και $s_1, \ldots, s_n : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ οι συναρτήσεις οι οποίες συνιστούν λύση στο παρακάτω σύστημα εξισώσεων

    $$\sum_{j=1}^{n} a_{ji}(t)x_j(t) = b_i(t),\ i = 1, \ldots, n$$

    τότε να δείξετε ότι οι s_i είναι διαφορίσιμες και να υπολογίσετε τις παραγώγους τους.

Λύση: α΄) Κατἀρχήν μπορούμε πολύ εύκολα να διαπιστώσουμε ότι η συνάρτηση της ορίζουσας είναι πολυγραμμική και έτσι η παράγωγός της θα είναι:

$$D(det)(a_1, \ldots, a_n)(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

β΄) Αν θέσουμε

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

τότε η $f(t) - det \circ A(t)$ και έτσι θα έχουμε

$$f'(t) = \sum_{j=1}^{n} det \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{j1}(t) & \ldots & a'_{jn}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

γ΄) Μπορούμε εύκολα να δούμε πως

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ji}(t)\frac{ds_j(t)}{dt} = \frac{db_i(t)}{dt} - \sum_{j=1}^{n} \frac{da_{ji}(t)}{dt}s_j(t)$$

13. Να εκφράσετε τις μερικές παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων σε σχέση με τις παραγώγους των g, h

α′) $f(x, y) = g(x)h(y)$

β′) $f(x, y) = g(x)^{h(y)}$

γ′) $f(x, y) = g(x + y)$

Λύση: α′)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x,y)} &= g'(x)h(y) \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x,y)} &= g(x)h'(y) \end{aligned}$$

β′)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x,y)} &= (h(y) - 1)g(x)^{h(y)-1}g'(x) \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x,y)} &= g(x)^{h(y)}lng(x) \cdot h'(y) \end{aligned}$$

γ′)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x,y)} &= g'(x + y) \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x,y)} &= g'(x + y) \end{aligned}$$

14. Έστω $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$. Για κάποιο διάνυσμα $v \in \mathcal{R}^n$ ορίζουμε την παράγωγο της f στο σημείο a κατά τη διεύθυνση του v και τη συμβολίζουμε $(D_v f)(a)$ σαν το όριο

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}, t \in \mathcal{R}$$

Να δείξετε ότι $(D_{e_i} f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_a$. Στη συνέχεια να δείξετε ότι $(D_{sv} f)(a) = s(D_v f)(a)$ και τέλος να δείξετε ότι $(D_v f)(a) = (Df)(a)(v)$ και άρα $(D_{x+y} f)(a) = (D_x f)(a) + (D_y f)(a)$.

Λύση: Παρατηρούμε ότι ο ορισμός της παραγώγου κατά την κατεύθυνση e_i ταυτίζεται με τον ορισμό της μερικής παραγώγου ως προς τη μεταβλητή x^i. Η δεύτερη πρόταση προκύπτει πολύ εύκολα αν θέσουμ $tv = \frac{t}{s}sv$. Τέλος

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{\|f(a + tv) - f(a) - (Df)(a)(tv)\|}{t\|x\|} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{\|\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tx)-f(a)}{t} - (Df)(a)(x)\|}{|x\|} &= 0 \Rightarrow \\ (Dxf)(a) = (Df)(a)(x) & \end{aligned}$$

Έτσι $(D_{x+y}f)(a) = (Df)(a)(x+y) = (Df)(a)+(Df)(a)(y) = (D_xf)(a)+(D_yf)(a)$.

15. Μια συνάρτηση $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ είναι ομογενής βαθμού m αν ισχύει

$$f(tx) = t^m f(x)$$

Αν τώρα η f είναι διαφορίσιμη να δείξετε ότι

$$f(x) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} x^i \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_x$$

Λύση: Αν θέσουμε $g(t) = f(tx)$ θα έχουμε

$$g'(t) = \frac{d(t^m f(x))}{dt} = mt^{m-1}f(x)$$

Όμως

$$\begin{aligned} g'(t) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_{tx} \cdot \left(\frac{d\pi^i(tx)}{dt}\right)_x \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_{tx} \cdot x^i \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $t = 1$ και εξισώσουμε τις δύο εκφράσεις για την $g'(tx)$ προκύπτει η ζητούμενη σχέση.

16. Αν η $f : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ τότε να δείξετε ότι δεν μπορεί να είναι $1-1$.

Λύση: Έστω $\partial f/\partial x \neq 0$ για όλα τα σημεία (x, y). Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x, y) = (f(x, y), y)$ η οποία έχει παράγωγο

$$Dg = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

με μη μηδενική ορίζουσα. Επομένως υπάρχει η g^{-1} η οποία θα είναι της μορφής $g^{-1}(x, y) = (k(x, y), y)$. Επίσης έχουμε ότι $f = \pi^1 \circ g$. Έτσι

$$\begin{aligned} f(k(x,y),y) &= \left(f \circ g^{-1}\right)(x,y) \\ &= \left((\pi^1 \circ g) \circ g^{-1}\right)(x,y) \\ &= \pi^1(x,y) \\ &= x \end{aligned}$$

Έτσι, $f(k(0, y), y)$ για όλα τα y είναι 0 και η f δεν είναι $1-1$.

17. Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι:

α′)

$$w = 8x^4 + y^4 - 2xy^2 \ , \ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \ , \ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \ , \ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

β′) Αν $z = x^2 + 2y^2$ και $x = rcos\theta$ και $y = rsin\theta$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \ , \ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_r \ , \ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \ , \ \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)_x \ , \ \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_\theta$$

όπου ο συμβολισμός $(\partial f/\partial x)_u$ σημαίνει την μερική παράγωγο της f ως προς x κρατώντας τη μεταβλητή u σταθερή.

Λύση: α′)

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= 32x^3 - 2y^2 \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= 4y^3 - 4xy \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 96x^2 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 12y^2 - 4x \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= -4y \end{aligned}$$

β′) Για να υπολογίσουμε το $(\partial z/\partial x)_y$, πρέπει πρώτα να γράψουμε το z σαν συνάρτηση των x, y. Έτσι, επειδή $z = x^2 + 2y^2$ θα έχουμε $(\partial z/\partial x)_y = 2x$. Για να βρούμε τώρα το $(\partial z/\partial x)_r$ θα πρέπει να γράψουμε το z σαν συνάρτηση των x, r. Έτσι, $x^2 + y^2 = r \Rightarrow y^2 = r^2 - x^2$ και $z = -x^2 + 2r^2$. Επομένως $(\partial z/\partial x)_r = -2x$. Εργαζόμενοι με αυτόν τον τρόπο βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x &= 4y \\ \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)_x &= 2x(1 + 2tan^2\theta) \\ \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_\theta &= 4x^2 \frac{tan\theta}{\cos^2\theta} \end{aligned}$$

18. Να βρεθεί το dy/dx αν $y = ln(sin2x)$.

Λύση: Είναι $y(x) = (ln \circ sin \circ 2x)(x)$. Άρα:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \left.\frac{dln}{dx}\right|_{sin2x} \cdot \left.\frac{dsin}{dx}\right|_{2x} \cdot \left.\frac{d2x}{dx}\right|_x \Rightarrow \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{sin2x} \cdot cos(2x) \cdot 2 = 2cot(2x) \end{aligned}$$

19. Να βρεθεί το dz/dt αν $z = x^y$ με $y = tan^{-1}(t)$ και $x = sint$.

Λύση: Είναι $z : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ με $z(x, y) = x^y$ και $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}^2$ με $f(t) = (sint, tan^-1t)^T$. Θέλουμε λοιπόν να βρούμε την παράγωγο της συνάρτησης $Z(t) = (z \circ f)(t)$. Έτσι:

$$\begin{aligned}
\frac{dZ}{dt} &= (Dz)(f(t) \cdot (Df)(t) \\
&= (yx^{y-1}, x^y lnx) \cdot \begin{pmatrix} cost \\ cos^2 t \end{pmatrix}_t \\
&= \left(tan^{-1}t \cdot sint^{tan^{-1}t-1}, sin^{tan^{-1}t} \cdot ln(sint)\right) \cdot \begin{pmatrix} cost \\ cos^2 t \end{pmatrix} \\
&= cost \cdot tan^{-1}t \cdot sint^{tan^{-1}t-1} + cos^2 t \cdot ln(sint) \cdot sint^{tan^{-1}t}
\end{aligned}$$

20. Να βρείτε το dz/dt αν $z = xy$, $x = 2t^2$ και $y = sint$.

Λύση:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = y4t + xcost$$

21. Αν $z = (x + y)^5$ και $y = sin10x$ να υπολογιστεί το dz/dx.

Λύση:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 5(x + y)^4 + 5(x + y)4 \cdot 10 \cdot cos10x$$

22. Αν $x^y = y^x$, να βρεθεί το dy/dx στο σημείο $(2, 4)$.

Λύση:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x^y}{\partial x} + \frac{\partial x^y}{\partial y}\frac{dy}{dx} &= \frac{\partial y^x}{\partial x} + \frac{\partial y^x}{\partial y}\frac{dy}{dx} \\
yx^{y-1} + lnx \cdot x^y \frac{dy}{dx} &= lny \cdot y^x + xy^{x-1}\frac{dy}{dx}
\end{aligned}$$

Θέτουμε τώρα $x = 2, y = 4$ και έχουμε:

$$\begin{aligned}
4 \cdot 2^3 + ln2 \cdot 2^4 \frac{dy}{dx} &= ln4 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^1 \frac{dy}{dx} \Rightarrow \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{4(ln2 - 1)}{2ln2 - 1}
\end{aligned}$$

23. Για την καμπύλη με εξίσωση $xe^y + ye^x = 0$ να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στο $(0, 0)$.

Λύση:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[xe^y + ye^x\right] = 0 \Rightarrow \\
e^y + xe^y\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx}e^x + ye^x = 0 \Rightarrow \\
\frac{dy}{dx} = -\frac{e^y + ye^x}{xe^y + e^x} \Rightarrow \\
\frac{dy}{dx} = -1
\end{aligned}$$

και έτσι η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y + x = 0$.

24. Αν $z = x - y$ με $x^2 + y^2 = t^2$ και $xsint = ye^y$, να υπολογιστεί το dz/dt.

Λύση:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}$$

Όμως

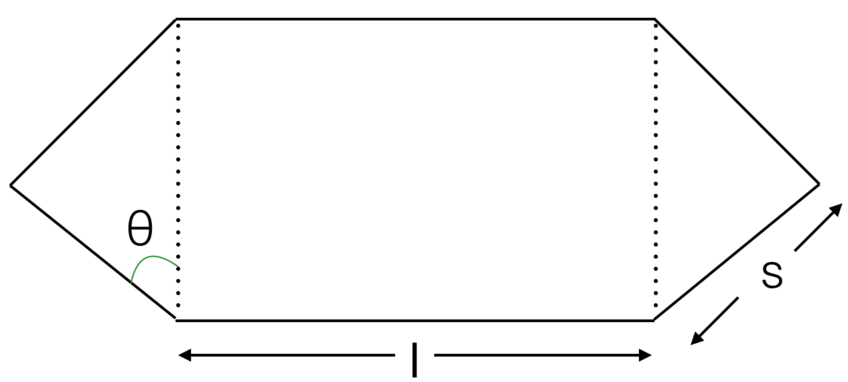
$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = \frac{dt^2}{dt} \Rightarrow 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2t \Rightarrow x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = t$$

και

$$\frac{dx}{dt}sint + xcost = (e^y + ye^y)\frac{dy}{dt}$$

Οι δύο τελευταίες εξισώσεις αποτελούν ένα γραμμικό σύστημα από το οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε τις dx/dt και dy/dt και στη συνέχεια την dz/dt.

25. Στο σχήμα 12 να βρείτε τη γωνία θ που μεγιστοποιεί το εμβαδό αν δίνεται ότι $l + 2s = const$.



Σχήμα 12:

Λύση: Είναι:

$$E = 2lscos\theta + 2s^2 cos\theta \cdot sin\theta$$

και $g(l, s, \theta) - l + 2s - C = 0$. Εφαρμόζουμε λοιπόν τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange και έχουμε:

$$\frac{\partial E}{\partial l} + \lambda = 0 \Rightarrow 2scos\theta + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial s} + 2\lambda = 0 \Rightarrow 2lcos\theta + 4scos\theta \cdot sin\theta + 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial \theta} + \frac{\partial g}{\theta} = 0 \Rightarrow -2ls \cdot sin\theta + 2s^2 \left(cos^2\theta - sin^2\theta\right) = 0$$

και $l = c - 2s$. Μετά από πράξεις βρίσκουμε $\theta = sin^{-}1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)$.