Εργαστήριο Μαθηματικής Μοντελοποίησης
και Πολύπλοκων Συστημάτων
Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου

Ανάπτυξη πληθυσμών

Μαθηματικά ΙΙΙ - Εργασία 02

Περίληψη

Στα πλαίσια αυτής της εργασίας, θα προσπαθήσουμε να καταστρώσουμε τις εξισώσεις που διέπουν την ανάπτυξη πληθυσμών, θα συγκρίνουμε τις λύσεις με πραγματικά αποτελέσματα και θα δούμε ποιες είναι εκείνες οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται ώστε ένας πληθυσμός να κινδυνεύει με εξαφάνιση.

Λέξεις κλειδιά – Διαφορικές εξισώσεις 1ου βαθμού, ανάπτυξη πληθυσμών, λογιστική εξίσωση

1 Εξέλιξη πληθυσμών

Στα πλαίσια αυτής της εργασίας, θα μελετήσουμε τη διαφορική εξίσωση πρώτου βαθμού που περιγράφει την ανάπτυξη του πληθυσμού διαφόρων ειδών. Από μια πρώτη ματιά θα φαινόταν αδύνατο να μοντελοποιήσουμε την ανάπτυξη του πληθυσμού των ειδών με μία διαφορική εξίσωση αφού ο πληθυσμός οποιουδήποτε είδους πάντα μεταβάλλεται με ακέραια βήματα. Επομένως ο πληθυσμός οποιουδήποτε είδους πότε δεν μπορεί να είναι μία διαφορίσιμη συνάρτηση του χρόνου. Όμως αν το μέγεθος του πληθυσμού είναι πάρα πολύ μεγάλο και ξαφνικά αυξηθεί κατά μία μονάδα, τότε η μεταβολή είναι πολύ μικρή συγκρινόμενη με το μέγεθος του πληθυσμού. Έτσι κάνουμε την προσέγγιση ότι οι μεγάλοι πληθυσμοί μεταβάλλονται συνεχόμενα και μπορούν να περιγράφουν από μια διαφορίσιμη συνάρτηση.

Έστω $p(t)$ Ο πληθυσμός ενός δεδομένου είδους την χρονική στιγμή t και έστω $r(t,p)$ η διαφορά μεταξύ της ταχύτητας γεννήσεων και της ταχύτητας θανάτων μέσα στο πληθυσμό. Αν αυτός ο πληθυσμός είναι απομονωμένος, δηλαδή δεν υπάρχει μετανάστευση προς τα μέσα ή προς τα έξω, τότε η μεταβολή $dp(t)/dt$ του πληθυσμού είναι ίση με $r \cdot p(t)$. Στο πιο απλοϊκό μοντέλο υποθέτουμε ότι r είναι σταθερά δηλαδή δεν αλλάζει με την πάροδο του χρόνου, ούτε με το μέγεθος του πληθυσμού. Έτσι μπορούμε να γράψουμε την επόμενη διαφορική εξίσωση που περιγράφει την εξέλιξη του πληθυσμού:

$$\frac{dp(t)}{dt} = r \cdot p(t) \tag{1}$$

Μπορούμε εύκολα με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών να λύσουμε την παραπάνω εξίσωση:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{p} &= r \cdot dt \\ \ln p &= rt + Const \\ p(t) &= C \cdot e^{rt} \end{aligned} \tag{2}$$

Ας δούμε λοιπόν αν η παραπάνω εξίσωση μπορεί να εφαρμοστεί στην εξέλιξη του πληθυσμού των ανθρώπων πάνω στη γη. Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται ο πληθυσμός της γης μέχρι και το 1μ.Χ.

Έτος	Πληθυσμός
-10000	2431214
-9000	3564407
-8000	5136461
-7000	7561695
-6000	11461003
-5000	17920172
-4000	28370429
-3000	44819892
-2000	72108132
-1000	115065665
1	188239090

Πίνακας 1: Ο πληθυσμός της γης από το 10000π.Χ. μέχρι και το 1μ.Χ.

Έλεγχος εκθετικής εξάρτησης Για να δούμε αν όντως ο πληθυσμός έχει την εκθετική εξάρτηση από το χρόνο που υπολογίσαμε, θα κάνουμε καταρχήν έναν απλό οπτικό έλεγχο. Παρατηρούμε ότι αν μια ποσότητα $p(t)$ έχει εκθετική συνάρτηση από τη μεταβλητή t, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε τη νέα μεταβλητή $z = \ln p(t)$ που θα είναι:

$$z(t) = \ln C + r \cdot t$$

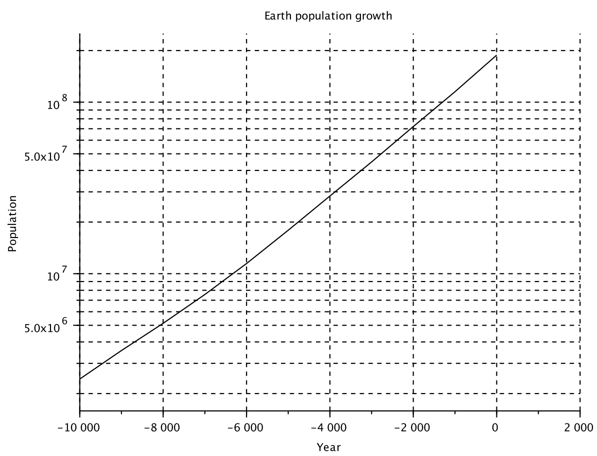
δηλαδή η νέα μεταβλητή z θα έχει γραμμική εξάρτηση από το t. Μπορούμε λοιπόν να κάνουμε μια γραφική παράσταση του $p(t)$ σαν συνάρτηση του t, αλλά να έχουμε τον $y-$άξονα (δηλαδή το $p(t)$) σε λογαριθμική κλίμακα. Στο SciLab αυτό γίνεται ως εξής:

Listing 1: Log-linear plot

```
x=[-10000 -9000 -8000 -7000 -6000 -5000 -4000 -3000 -2000 -1000 1];
```

```
y=[2431214 3564407 5136461 7561695 11461003 17920172 ↩
  28370429 44819892 72108132 115065665 188239090];
plot2d('nl',x,y);
a=gca();
a.grid=[1,1,−1];
xtitle('Earth population growth','Year','Population');

```



Σχήμα 1: **Πληθυσμός της γης** - Η εξάρτηση του λογαρίθμου του πληθυσμού της γης από το χρόνο είναι γραμμική.

Όπως φαίνεται από το σχήμα 1, η εξάρτηση του λογαρίθμου του πληθυσμού από το χρόνο είναι γραμμική όπως προκύπτει από το νόμο της εκθετικής ανάπτυξης του πληθυσμού. Για να υπολογίσουμε τώρα τις σταθερές C, r θα εφαρμόσουμε μια μέθοδο που είναι γνωστή ως μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων. Ας υποθέσουμε πως έχουμε N ζεύγη τιμών (t_i, p_i) τα οποία πιστεύουμε ότι προκύπτουν από την εξίσωση $p(t) = Ce^{rt}$. Για μεγαλύτερη ευκολία, μετατρέπουμε τα δεδομένα μας σε N ζεύγη τιμών (t_i, z_i) όπου $z_i = \ln p_i$ και θέλουμε να τα περιγράψουμε με την εξίσωση $z(t) = \ln C + r \cdot t$. Για ένα δεδομένο ζεύγος τιμών για τα C, r, το λάθος που προκύπτει για ένα ζεύγος δεδομένων θα είναι:

$$e_i = (z(t_i) - z_i)^2$$
$$e_i = (\ln C + r \cdot t_i - z_i)^2$$

όπου παίρνουμε το τετράγωνο για να έχουμε ένα μέτρο του απόλυτου λάθους. Αθροίζοντας τώρα όλα τα λάθη από όλα τα δεδομένα μας θα έχουμε:

$$E = \sum_{i=1}^{N} (\ln C + r \cdot t_i - z_i)^2 \tag{3}$$

Το ελάχιστο λάθος θα προκύψει όταν

$$\frac{\partial E}{\partial C} = \frac{\partial E}{\partial r} = 0 \tag{4}$$

Μετά από λίγες πράξεις έχουμε:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{N} z_i t_i - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} z_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} t_i\right)}{\sum_{i=1}^{N} t_i^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} t_i\right)^2} \tag{5}$$

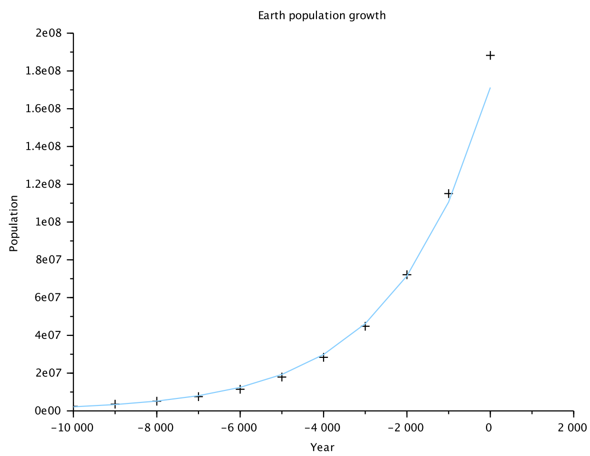
$$\ln C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (z_i - r t_i) \tag{6}$$

Ο κώδικας σε SciLab για τον υπολογισμό και τη γραφική παράσταση είναι:

Listing 2: Fitting data

```
z=log(y);
r=(sum(z.*x)−1/11*sum(z)*sum(x))/(sum(x.*x)−1/11*sum(↩
  x)^2);
C=exp(1/11*sum(z−r*x));
plot2d(x,y,−1);
plot2d(x,C*exp(r*x),12);
xtitle('Earth population growth','Year','Population');

```



Σχήμα 2: **Πληθυσμός της γης** - Βέλτιστη προσαρμογή της εκθετικής συνάρτησης στην εξέλιξη του πληθυσμού της γης με τιμές $C = 1.71210^8$ και $r = 0.0004367$

Λογιστική εξίσωση Όπως γνωρίζουμε από τη θεωρία των συναρτήσεων, κάθε ομαλή συνάρτηση $f(x)$ μπορεί να γραφεί σύμφωνα με το θεώρημα του Taylor:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

ή πιο απλά

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Θα μπορούσαμε λοιπόν να γράψουμε για την ανάπτυξη των πληθυσμών έναν πιο γενικό νόμο της μορφής:

$$\frac{dp(t)}{dt} = r(p) \cdot p(t) = (r_0 + r_1 p + r_2 p^2 + \ldots)p(t) \quad (7)$$

Στην περίπτωση που μόλις εξετάσαμε για τον πληθυσμό της γης, είδαμε ότι η προσέγγιση $r(p) = r_0$ ήταν αρκετή για να εξηγήσει την εξέλιξη του πληθυσμού. Ας δούμε τώρα ένα άλλο παράδειγμα του πληθυσμού μιας οικογένειας φυκιών στην Αδριατική Θάλασσα η οποία εξελίσσεται σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

Χρόνος	Πληθυσμός
11	0.00476
15	0.0105
18	0.0207
23	0.0619
26	0.337
31	0.74
39	1.7
44	2.45
54	3.5
64	4.5
74	5.09

Πίνακας 2: Ο πληθυσμός μιας οικογένειας φυκιών στην Αδριατική Θάλασσα.

Στο επόμενο σχήμα φαίνεται ο λογάριθμος του πληθυσμού σαν συνάρτηση του χρόνου που παράγεται με τον ακόλουθο κώδικα:

Listing 3: Algal population

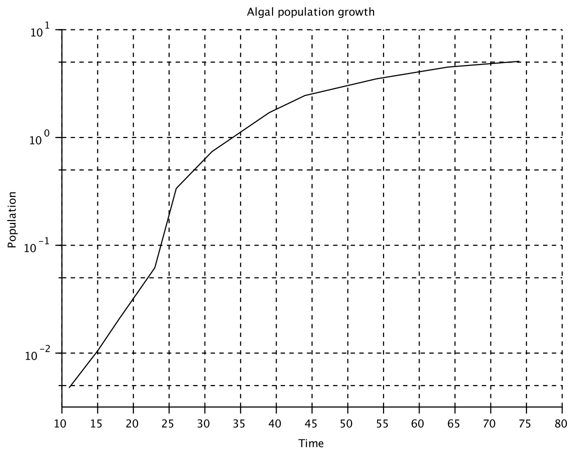
```
x=[11 15 18 23 26 31 39 44 54 64 74];
y=[0.00476 0.0105 0.0207 0.0619 0.337 0.74 1.7 2.45 3.5 4.5↩
    5.09];
plot2d('nl',x,y);
a=gca();
a.grid=[1,1,−1];
xtitle('Algal population growth','Time','Population');
```

Είναι προφανές τώρα ότι το μοντέλο που έχουμε αναπτύξει δεν επαρκεί. Για το λόγο αυτό, θα πάρουμε άλλον έναν όρο από την εξίσωση (7) και θα υποθέσουμε ότι:

$$\frac{dp}{dt} = (r_0 - r_1 p)p \quad (8)$$

Για την επίλυση της παραπάνω εξίσωσης έχουμε:

$$\frac{dp}{(r_0 - r_1 p)p} = dt$$



Σχήμα 3: **Πληθυσμός οικογένειας φυκιών** - Ο λογάριθμος του πληθυσμού μιας οικογένειας φυκιών της Αδριατικής Θάλασσας σαν συνάρτηση του χρόνου.

$$\frac{1}{r_0}\frac{dp}{p} + \frac{r_1}{r_0}\frac{dp}{r_0 - r_1 p} = dt$$

$$\frac{p}{|r_0 - r_1 p|} = C \cdot e^{r_0 t}$$

Αν υποθέσουμε ότι $r_0 - r_1 p > 0$ τότε μετά από λίγες πράξεις παίρνουμε:

$$p(t) = \frac{r_0}{r_1 + Ce^{-r_0 t}} \quad (9)$$

Μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων για να προσαρμόσουμε αυτήν την εξίσωση στα δεδομένα μας αλλά θα χρησιμοποιήσουμε το SciLab για να το πετύχουμε με έναν πιο γενικό τρόπο. Αρχικά θα φτιάξουμε δύο αρχεία με δύο συναρτήσεις ως εξής:

Listing 4: File data_fit_1.sce

```
// This function takes vector x and the parameters of the ↩
    function
// c(1) is r0
// c(2) is r1
// c(3) is C

function y = data_fit_1(x, c)
    y = c(1)/(c(2)+c(3)*exp(−c(1).*x));
endfunction
```

και

Listing 5: File myerror.sce

```
// This is a way to measure the error, to find the least one.
// The error function will call the parameterized function.
function e = myerror(c, z)
    x = z(1);
    y = z(2);
    e = (y − data_fit_1(x, c))^2;
endfunction
```

Η συνάρτηση data_fit_1 περιγράφει την εξίσωση του μοντέλου μας ενώ η συνάρτηση myerror παράγει το λάθος στην εκτίμηση. Τότε, ξεκινώντας από μια αρχική εκτίμηση για τις παραμέτρους του μοντέλου, χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση datafit του SciLab ως εξής:

Listing 6: File myerror.sce

```
z = [x; y];
c0=[0.5 0.01 4];
[copt, err] = datafit(myerror, z, c0);
```

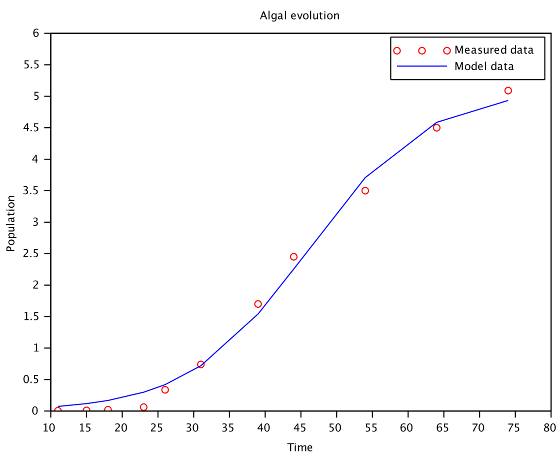
και οι τιμές που παίρνουμε είναι 0.1213054, 0.023809 και 6.1413906, δηλαδή το μοντέλο μας είναι:

$$p(t) = \frac{0.1213054}{0.023809 + 6.1413906 e^{-0.1213054 t}} \tag{10}$$

Μπορούμε να δούμε τα αποτελέσματα σε ένα σχήμα:

Listing 7: Fitted plot

```
plot(x,y,'ro');
pp=data_fit_1(x,copt);
plot(x,pp);
xtitle(' Algal evolution','Time','Population');
legend('Measured data','Model data');
```



Σχήμα 4: **Πληθυσμός οικογένειας φυκιών** - Προσαρμογή της λογιστικής εξίσωσης στα δεδομένα.

Συνοψίζοντας, μπορούμε να πούμε ότι στη λογιστική εξίσωση οι γεννήσεις είναι ανάλογες του πληθυσμού αλλά οι θάνατοι αυξάνονται γιατί τα μέλη του πληθυσμού ανταγωνίζονται ανά δύο (έτσι προκύπτει το p^2) για τις περιορισμένες πηγές (τροφή, χώρος κτλ).

2 Ασκήσεις

Οι ασκήσεις είναι προαιρετικές. Κάθε άσκηση βαθμολογείται σε κλίμακα από 0 ως 5. Στο τέλος αθροίζονται οι βαθμοί από όλες τις ασκήσεις που έχετε παραδώσει και το αποτέλεσμα που προκύπτει πολλαπλασιάζεται με 0.01 και αθροίζεται στο βαθμό που θα γράψετε στις εξετάσεις. Έτσι, αν έχετε παραδώσει 20 ασκήσεις και σε όλες έχετε πάρει 5, το άθροισμα είναι 100. Τότε, έχετε στον τελικό σας βαθμό, συν 100*0.01=1 βαθμό.

Οι ασκήσεις παραδίδονται μόνο με email στο dvlachos@uop.gr. Το email πρέπει να έχει τίτλο *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ III - ΑΣΚΗΣΕΙΣ* και η απάντηση της άσκησης να είναι σε ένα αρχείο pdf με τίτλο **MATH-3-2017-XXXXXXXXXXXX-YY.pdf** όπου αντί για XXXXXXXXXXXX θα γράψετε τον αριθμό μητρώου σας και αντί για YY τον αριθμό της άσκησης.

03 Υπάρχουν διάφορα είδη πληθυσμών στα οποία οι γεννήσεις δεν είναι ανάλογες του πληθυσμού. Για παράδειγμα, αν για μια γέννηση χρειάζεται να εμπλακούν δύο μέλη του πληθυσμού, τότε μπορούμε να γράψουμε για την εξέλιξη του πληθυσμού

$$\frac{dp}{dt} = bp^2 - ap, \ la, b > 0$$

Να δείξετε ότι $p(t) \to 0$ όταν $t \to \infty$ και $p_0 < a/b$. Έτσι, αν ο πληθυσμός αυτού του είδους πέσει κάτω από ένα κατώφλι, το είδος θα εξαφανιστεί!

04 Να χρησιμοποιήσετε τα ακόλουθα δεδομένα για τον πληθυσμός των Ηνωμένων Πολιτειών για να δείτε αν περιγράφονται από τη λογιστική εξίσωση.

Έτος	Πληθυσμός	Έτος	Πληθυσμός
1790	3.929		
1800	5.308	1900	75.996
1810	7.240	1910	91.972
1820	9.638	1920	105.711
1830	12.866	1930	122.775
1840	17.069	1940	131.669
1850	23.192	1950	150.697
1860	31.443	1960	179.323
1870	38.558	1970	203.185
1880	50.156	1980	226.546
1890	62.948	1990	248.710

Πίνακας 3: Ο πληθυσμός των Ηνωμένων Πολιτειών σε εκατομμύρια.