Ενότητα 1

Άσκηση 1. *Έστω $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$. Ας είναι $\mathsf{AT}_n(\mathbb{K})$ (αντιστοίχως $\mathsf{KT}_n(\mathbb{K})$) το σύνολο των άνω (αντιστοίχως κάτω) τριγωνικών $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$.*

Να δειχθεί ότι η τομή $\mathsf{AT}_n(\mathbb{K}) \cap \mathsf{KT}_n(\mathbb{K})$) των δύο αυτών συνόλων ισούται με το σύνολο των διαγωνίων πινάκων.

Λύση. *Συμβολίζουμε με $\Delta_n(\mathbb{K})$ το σύνολο των διαγωνίων πινάκων. Ένα τυπικό στοιχείο του συνόλου αυτού είναι της μορφής:*

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

όπου $k_i \in \mathbb{K},\ 1 \leq i \leq n$.

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathsf{AT}_n(\mathbb{K}) \cap \mathsf{KT}_n(\mathbb{K})$, δηλαδή $A \in \mathsf{AT}_n(\mathbb{K})$ και $A \in \mathsf{KT}_n(\mathbb{K})$. Αφού ο πίνακας A είναι άνω και κάτω τριγωνικός έπεται ότι κάτω και πάνω από την κύρια διαγώνιο έχει μηδέν. Συνεπώς, ο πίνακας $A \in \Delta_n(\mathbb{K})$ και άρα δείξαμε ότι $\mathsf{AT}_n(\mathbb{K}) \cap \mathsf{KT}_n(\mathbb{K}) \subseteq \Delta_n(\mathbb{K})$. Επίσης είναι φανερό ότι αν έχουμε έναν διαγώνιο πίνακα τότε αυτός είναι άνω και κάτω τριγωνικός, δηλαδή $\Delta_n(\mathbb{K}) \subseteq \mathsf{AT}_n(\mathbb{K}) \cap \mathsf{KT}_n(\mathbb{K})$. Επομένως $\mathsf{AT}_n(\mathbb{K}) \cap \mathsf{KT}_n(\mathbb{K}) = \Delta_n(\mathbb{K})$. $\square$

Άσκηση 2. *Για κάθε $n \geq 1$, να βρείτε την n-οστή δύναμη του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Λύση. *Για να καταλάβουμε τη περιγραφή του A^n, ξεκινάμε πρώτα κάνοντας τους παρακάτω πολλαπλασιασμούς πινάκων:*

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1+2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1+2+3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1+2+3+4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Με βάση τους παραπάνω υπολογισμούς θα δείξουμε με Μαθηματική Επαγωγή ότι:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad n \geq 1 \tag{$*$}$$

1. *Για $n = 1$, και λαμβάνοντας υπ'οψιν ότι $A^1 = A$ και τη μορφή του πίνακα A, η ζητούμενη σχέση $(*)$ προφανώς ισχύει.*
2. *Υπόθεση Επαγωγής: Έστω ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή δεχόμαστε ότι:*

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. *Θα δείξουμε ότι η ζητούμενη σχέση $(*)$ ισχύει για $n = k+1$. Έχουμε*

$$A^{k+1} = A^k A = \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως, η n-οστή δύναμη του πίνακα A είναι ο πίνακας $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\forall n \geq 1$. $\square$

Άσκηση 3. *Έστω A και B $n \times n$ πίνακες τέτοιοι ώστε ο πίνακας $I_n - (AB)^2$ να είναι αντιστρέψιμος. Δείξτε ότι ο πίνακας $(I_n - (BA)^2$ είναι αντιστρέψιμος και*

$$(I_n - (BA)^2)^{-1} = I_n + B(I_n - (AB)^2)^{-1}ABA$$

Λύση. *Αρκεί να δείξουμε ότι*

$$(I_n - (BA)^2) \cdot [I_n + B(I_n - (AB)^2)^{-1}ABA] = I_n = [I_n + B(I_n - (AB)^2)^{-1}ABA] \cdot (I_n - (BA)^2)$$

1. *Θα έχουμε:*

$$\begin{aligned}
(I_n - (BA)^2) \cdot [I_n + B(I_n - (AB)^2)^{-1}ABA] &= I_n + B(I_n - (AB)^2)^{-1}ABA \\
&\quad -(BA)^2 - (BA)^2 B(I_n - (AB)^2)^{-1}ABA \\
&= I_n + B(I_n - (AB)^2)^{-1}ABA \\
&\quad -(BA)^2 - BABAB(I_n - (AB)^2)^{-1}ABA \\
&= I_n - (BA)^2 + \\
&\quad +B(I_n - (AB)^2)^{-1}ABA - B(AB)^2(I_n - (AB)^2)^{-1}ABA \\
&= I_n - (BA)^2 + \\
&\quad +B\big[(I_n - (AB)^2)^{-1} - (AB)^2(I_n - (AB)^2)^{-1}\big]ABA \\
&= I_n - (BA)^2 + B\big(I_n - (AB)^2\big)\big(I_n - (AB)^2\big)^{-1}ABA \\
&= I_n - (BA)^2 + BI_nABA \\
&= I_n - (BA)^2 + (BA)^2 \\
&= I_n
\end{aligned}$$

2. *Θα έχουμε:*

$$
\begin{aligned}
[I_n + B(I_n - (AB)^2)^{-1}ABA] \cdot (I_n - (BA)^2) &= I_n + B(I_n - (AB)^2)^{-1}ABA \\
&\quad -(BA)^2 - B(I_n - (AB)^2)^{-1}ABA(BA)^2 \\
&= I_n - (BA)^2 + \\
&\quad +B(I_n - (AB)^2)^{-1}ABA - B(I_n - (AB)^2)^{-1}ABABABA \\
&= I_n - (BA)^2 + \\
&\quad +B(I_n - (AB)^2)^{-1}\big[ABA - (AB)^2ABA\big] \\
&= I_n - (BA)^2 + \\
&\quad +B(I_n - (AB)^2)^{-1}(I_n - (AB)^2)ABA \\
&= I_n - (BA)^2 + BI_nABA \\
&= I_n - (BA)^2 + BABA \\
&= I_n - (BA)^2 + (BA)^2 \\
&= I_n
\end{aligned}
$$

Από τα **1.** *και* **2.** *έχουμε το ζητούμενο.* □

Παρατήρηση 1. *Έστω A, B δύο $n \times n$ πίνακες με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$. Τότε όπως θα δούμε σύντομα με χρήση της θεωρίας οριζουσών, ισχύει ότι:*

$$A \cdot B = I_n \qquad \Longrightarrow \qquad B \cdot A = I_n$$

και άρα ο A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = B$. Επομένως στην Άσκηση 3 (και σε ανάλογες Ασκήσεις, βλέπε την Άσκηση 5 παρακάτω), αρκεί να δειχθεί μόνο η μία εκ των δύο απαιτουμένων ισοτήτων.

Άσκηση 4. *Αν για τους $n \times n$ πίνακες A ισχύει $A^4 - A^3 + A^2 - A + I_n = 0$ τότε $A^{-1} = -A^4$.*

Λύση. *Από τη σχέση $A^4 - A^3 + A^2 - A + I_n = 0$ έχουμε $-A^4 + A^3 - A^2 + A = I_n$ και άρα*

$$A(-A^3 + A^2 - A + I_n) = I_n \ \text{ και } \ (-A^3 + A^2 - A + I_n)A = I_n$$

Συνεπώς ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = -A^3 + A^2 - A + I_n = -A^4$. □

Άσκηση 5. *Θεωρούμε τους $n \times n$ πίνακες A και B και υποθέτουμε ότι ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος και ισχύει:*

$$A + B = AB \tag{†}$$

Να δείξετε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και ισχύει: $A^{-1} + B^{-1} = I_n$.

Λύση. *Επειδή ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος, υπάρχει ο αντίστροφός του B^{-1}. Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση (†) από δεξιά με τον πίνακα B^{-1} θα έχουμε:*

$$A + B = AB \Longrightarrow (A + B)B^{-1} = ABB^{-1} \Longrightarrow AB^{-1} + I_n = A \Longrightarrow A - AB^{-1} = I_n \Longrightarrow A(I_n - B^{-1}) = I_n$$

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 1, ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = I_n - B^{-1}$. Τέλος έχουμε ότι

$$A^{-1} + B^{-1} = I_n - B^{-1} + B^{-1} = I_n \qquad \square$$

Άσκηση 6. *Να ευρεθούν όλοι οι πίνακες που μετατίθενται με τους πίνακες τής μορφής:*

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

(2) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Λύση. *Ας είναι* $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *ένας πίνακας με* $AC = CA$, *δηλαδή* $\begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & 0 \\ c-d & 0 \end{pmatrix}$. *Τότε* $b = 0$ *και* $c = a + d$.

Ας είναι $C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ *ένας πίνακας με* $BC = CB$, *δηλαδή* $\begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix}$. *Τότε* $d = 0, g = 0, h = 0, e = a, k = a, f = b$. □

Ένας πίνακας $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ ονομάζεται **ταυτοδύναμος**, αν $A^2 = A$.

Άσκηση 7. *Να προσδιοριστούν όλοι οι* 2×2 *ταυτοδύναμοι πίνακες.*

Λύση. *Ας είναι* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *ένας* 2×2 *πίνακας με* $A^2 = A$, *δηλαδή*

$$\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a^2+bc = a & (1) \\ ab+bd = b & (2) \\ ac+cd = c & (3) \\ bc+d^2 = d & (4) \end{cases}$$

Έστω ότι $b \neq 0$, *τότε η (2) δίνει τη λύση* $d = 1 - a$, *η οποία ικανοποιεί και την (3). Από την (1) έχουμε* $c = \frac{a-a^2}{b}$. *Αυτές οι τιμές των* c, d *ικανοποιούν την (4).*

Έστω ότι $b = 0$, *τότε το παραπάνω σύστημα εξισώσεων γίνεται*

$$\begin{cases} a^2 = a \\ ac+cd = c \\ d^2 = d \end{cases}$$

Παίρνοντας υπ' όψιν ότι $a = 0$ *ή* 1 *και* $d = 0$ *ή* 1 *έχουμε τις λύσεις:* $(a = 0, b = 0, d = 1, c \in \mathbb{K})$, $(a = 1, b = 0, d = 0, c \in \mathbb{K})$, $(a = 0, b = 0, c = 0, d = 0)$, $(a = 0, b = 0, c = 0, d = 1)$, $(a = 1, b = 0, c = 0, d = 0)$, $(a = 1, b = 0, c = 0, d = 1)$. □

Άσκηση 8. *Να προσδιοριστούν όλοι οι* 2×2 *πίνακες που υψούμενοι στο τετράγωνο χορηγούν τον μηδενικό* 2×2 *πίνακα.*

Λύση. *Ας είναι* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *ένας* 2×2 *πίνακας με* $A^2 = \mathbb{O}_2$, *δηλαδή*

$$\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a^2+bc = 0 & (1) \\ ab+bd = 0 & (2) \\ ac+cd = 0 & (3) \\ bc+d^2 = 0 & (4) \end{cases}$$

Έστω ότι $b \neq 0$, *τότε η (1) δίνει* $c = -\frac{a^2}{b}$, *η (2) δίνει* $d = -a$. *Οι (3) και (4) ικανοποιούνται από τις προηγούμενες λύσεις.*

Έστω ότι $b = 0$, *τότε επειδή έπεται* $a = 0$ *και* $d = 0$, *έχουμε τη λύση* $a = 0, b = 0, c \in \mathbb{K}, d = 0$.

Ενότητα 2

Άσκηση 1. *Να υπολογίσετε την ορίζουσα* $\begin{vmatrix} 1+\alpha_1\beta_1 & 1+\alpha_1\beta_2 & 1+\alpha_1\beta_3 \\ 1+\alpha_2\beta_1 & 1+\alpha_2\beta_2 & 1+\alpha_2\beta_3 \\ 1+\alpha_3\beta_1 & 1+\alpha_3\beta_2 & 1+\alpha_3\beta_3 \end{vmatrix}$.

Λύση. *Έχουμε*

$$\begin{vmatrix} 1+\alpha_1\beta_1 & 1+\alpha_1\beta_2 & 1+\alpha_1\beta_3 \\ 1+\alpha_2\beta_1 & 1+\alpha_2\beta_2 & 1+\alpha_2\beta_3 \\ 1+\alpha_3\beta_1 & 1+\alpha_3\beta_2 & 1+\alpha_3\beta_3 \end{vmatrix} \xlongequal{\Gamma_2\to\Gamma_2-\Gamma_1} \begin{vmatrix} 1+\alpha_1\beta_1 & 1+\alpha_1\beta_2 & 1+\alpha_1\beta_3 \\ (\alpha_2-\alpha_1)\beta_1 & (\alpha_2-\alpha_1)\beta_2 & (\alpha_2-\alpha_1)\beta_3 \\ (\alpha_3-\alpha_1)\beta_1 & (\alpha_3-\alpha_1)\beta_2 & (\alpha_3-\alpha_1)\beta_3 \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)\begin{vmatrix} 1+\alpha_1\beta_1 & 1+\alpha_1\beta_2 & 1+\alpha_1\beta_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \square$$

Άσκηση 2. *Να λυθεί η εξίσωση* $\begin{vmatrix} 2-x & 1 & i \\ 1 & 2-x & i \\ -i & -i & 2-x \end{vmatrix} = 0$, *όπου* $i^2 = -1$.

Λύση. *Έχουμε*

$$\begin{vmatrix} 2-x & 1 & i \\ 1 & 2-x & i \\ -i & -i & 2-x \end{vmatrix} \xlongequal{\Gamma_1\to\Gamma_1-\Gamma_2} \begin{vmatrix} 1-x & -1+x & 0 \\ 1 & 2-x & i \\ -i & -i & 2-x \end{vmatrix} = (1-x)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2-x & i \\ -i & -i & 2-x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\Sigma_2\to\Sigma_2+\Sigma_1} (1-x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3-x & i \\ -i & -2i & 2-x \end{vmatrix} = (1-x)\begin{vmatrix} 3-x & i \\ -2i & 2-x \end{vmatrix} = (1-x)(x^2-5x+4)$$

Άρα, έπεται ότι

$$(1-x)(x^2-5x+4) = 0 \Rightarrow (1-x)(x-1)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1, & \textit{πολλαπλότητας 2.} \\ x = 4, & \textit{απλή.} \end{cases} \qquad \square$$

Άσκηση 3. *Να υπολογισθεί η* $n \times n$ *ορίζουσα* $|A_n| = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$.

Λύση. *Αν αναπτύξουμε την ορίζουσα $|A_n|$ ως προς την πρώτη γραμμή, τότε έχουμε:*

$$|A_n| = (\alpha+\beta)\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} - \alpha\beta \begin{vmatrix} 1 & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

Να σημειώσουμε ότι οι παραπάνω ορίζουσες είναι $(n-1)\times(n-1)$. Παρατηρούμε ότι η πρώτη ορίζουσα είναι η αρχική που ξεκινήσαμε αλλά διάστασης $(n-1)\times(n-1)$ και αν αναπτύξουμε την δεύτερη ορίζουσα ως προς την πρώτη στήλη, τότε καταλήγουμε

$$|A_n| = (\alpha+\beta)|A_{n-1}| - \alpha\beta|A_{n-2}| \tag{1}$$

Για να καταλάβουμε ποια είναι η τιμή της ορίζουσας $|A_n|$, ξεκινάμε πρώτα υπολογίζοντας τις παρακάτω ορίζουσες:

$$|A_1| = \alpha+\beta$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3$$

Με βάση τους παραπάνω υπολογισμούς θα δείξουμε με Μαθηματική Επαγωγή ότι:

$$|A_k| = \alpha^k+\alpha^{k-1}\beta+\alpha^{k-2}\beta^2+\cdots+\alpha^2\beta^{k-2}+\alpha\beta^{k-1}+\beta^k\ ,\ k\geq 1. \tag{$*$}$$

1. *Για $k=1$, η ζητούμενη σχέση $(*)$ ισχύει αφού $|A_1| = \alpha+\beta$.*
2. Υπόθεση Επαγωγής: *Έστω ότι ισχύει για $k\leq n$, δηλαδή δεχόμαστε ότι:*
$$|A_k| = \alpha^k+\alpha^{k-1}\beta+\alpha^{k-2}\beta^2+\cdots+\alpha^2\beta^{k-2}+\alpha\beta^{k-1}+\beta^k$$
3. *Θα δείξουμε ότι η ζητούμενη σχέση $(*)$ ισχύει για $k=n+1$. Έχουμε*
$$\begin{aligned}|A_{n+1}| \overset{(1)}{=} (\alpha+\beta)|A_n| - \alpha\beta|A_{n-1}| &= (\alpha+\beta)(\alpha^n+\alpha^{n-1}\beta+\cdots+\alpha\beta^{n-1}+\beta^n) \\ &\quad -\alpha\beta(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}\beta+\cdots+\alpha\beta^{n-2}+\beta^{n-1}) \\ &= \alpha^{n+1}+\alpha^n\beta+\cdots+\alpha\beta^n+\beta^{n+1}\end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε $|A_n| = \alpha^n+\alpha^{n-1}\beta+\alpha^{n-2}\beta^2+\cdots+\alpha^2\beta^{n-2}+\alpha\beta^{n-1}+\beta^n\ ,\ \forall n\geq 1.$ $\square$

Άσκηση 4. *Να υπολογισθεί η $2n\times 2n$ ορίζουσα* $|A_{2n}| = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & \cdots & \beta & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \beta & \cdots & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{vmatrix}.$

Λύση. *Αν αναπτύξουμε την ορίζουσα $|A_{2n}|$ ως προς την πρώτη στήλη, τότε έχουμε:*

$$|A_{2n}| = \alpha \begin{vmatrix} \alpha & 0 & \cdots & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta & 0 & \cdots & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{vmatrix} - \beta \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta \\ \alpha & 0 & \cdots & \beta & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \beta & 0 & \cdots & \alpha & 0 \end{vmatrix}$$

Να σημειώσουμε ότι οι παραπάνω ορίζουσες είναι $(2n-1) \times (2n-1)$. Αν αναπτύξουμε την πρώτη ορίζουσα ως προς τη τελευταία γραμμή και τη δεύτερη ορίζουσα ως προς τη πρώτη γραμμή, τότε καταλήγουμε

$$|A_{2n}| = \alpha^2 |A_{2n-2}| - \beta^2 |A_{2n-2}| = (\alpha^2 - \beta^2)|A_{2n-2}| \tag{1}$$

Για να καταλάβουμε ποια είναι η τιμή της ορίζουσας $|A_{2n}|$, ξεκινάμε πρώτα υπολογίζοντας τις παρακάτω ορίζουσες:

$$|A_2| = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - \beta^2$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha^2 - \beta^2)^2$$

$$|A_6| = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha^2 - \beta^2)^3$$

Με βάση τους παραπάνω υπολογισμούς θα δείξουμε με Μαθηματική Επαγωγή ότι:

$$|A_{2k}| = (\alpha^2 - \beta^2)^k\ ,\ k \geq 1. \tag{$*$}$$

1. *Για $k = 1$, η ζητούμενη σχέση $(*)$ ισχύει αφού $|A_2| = \alpha^2 - \beta^2$.*
2. *Υπόθεση Επαγωγής: Έστω ότι ισχύει για $k < n$, δηλαδή δεχόμαστε ότι:*

$$|A_{2k}| = (\alpha^2 - \beta^2)^k$$

3. *Θα δείξουμε ότι η ζητούμενη σχέση $(*)$ ισχύει για $k = n$. Έχουμε*

$$|A_{2n}| \overset{(1)}{=} (\alpha^2 - \beta^2)|A_{2n-2}| = (\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \beta^2)^{n-1} = (\alpha^2 - \beta^2)^n$$

Άρα, έχουμε $|A_{2n}| = (\alpha^2 - \beta^2)^n\ ,\ \forall n \geq 1.$ $\square$

Άσκηση 5. *Να υπολογισθεί η ορίζουσα του ακόλουθου $n \times n$ πίνακα A, όπου $x \in \mathbb{R}$:*

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}.$$

Λύση. *Αν αναπτύξουμε την ορίζουσα $|A_n|$ ως προς την πρώτη γραμμή, τότε έχουμε:*

$$|A_n| = (1+x^2)\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & \cdots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & \cdots & x & 1+x^2 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} x & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1+x^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & \cdots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

Να σημειώσουμε ότι οι παραπάνω ορίζουσες είναι $(n-1) \times (n-1)$. Παρατηρούμε ότι η πρώτη ορίζουσα είναι η αρχική που ξεκινήσαμε αλλά διάστασης $(n-1) \times (n-1)$ και αν αναπτύξουμε την δεύτερη ορίζουσα ως προς την πρώτη στήλη, τότε έχουμε

$$|A_n| = (1+x^2)|A_{n-1}| - x^2|A_{n-2}| \tag{1}$$

Για να καταλάβουμε ποια είναι η τιμή της ορίζουσας $|A_n|$, ξεκινάμε πρώτα υπολογίζοντας τις παρακάτω ορίζουσες:

$$|A_1| = 1+x^2$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x \\ x & 1+x^2 \end{vmatrix} = 1+x^2+x^4$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 \\ x & 1+x^2 & x \\ 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix} = 1+x^2+x^4+x^6$$

Με βάση τους παραπάνω υπολογισμούς θα δείξουμε με Μαθηματική Επαγωγή ότι:

$$|A_k| = 1+x^2+x^4\cdots+x^{2k}\ ,\ k \geq 1. \tag{$*$}$$

1. *Για $k=1$, η ζητούμενη σχέση $(*)$ ισχύει αφού $|A_1| = 1+x^2$.*
2. Υπόθεση Επαγωγής: *Έστω ότι ισχύει για $k \leq n$, δηλαδή δεχόμαστε ότι:*

$$|A_k| = 1+x^2+\cdots+x^{2k}$$

3. *Θα δείξουμε ότι η ζητούμενη σχέση $(*)$ ισχύει για $k=n+1$. Έχουμε*

$$\begin{aligned} |A_{n+1}| &\overset{(1)}{=} (1+x^2)|A_n| - x^2|A_{n-1}| = (1+x^2)(1+x^2+\cdots+x^{2n}) - x^2(1+x^2+\cdots+x^{2(n-1)}) \\ &= 1+x^2+\cdots+x^{2n+2} \end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε $|A_n| = 1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}\ ,\ \forall n \geq 1.$ $\square$

Ενότητα 3

Άσκηση 1. *Έστω ο πίνακας* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Να δειχθεί ότι ο* A *είναι αντιστρέψιμος και στη συνέχεια να υπολογισθεί ο* A^{-1}:

(1) *με χρήση του συμπληρωματικού adj*A *του* A,

(2) *με τη μέθοδο στοιχειωδών μετασχηματισμών επί των γραμμών του πίνακα* $(A|I_3)$.

Λύση. *Καταρχήν, αφού*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

έπεται ότι ο πίνακας A *είναι αντιστρέψιμος. Συνεπώς, υπάρχει πίνακας* A^{-1} *έτσι ώστε* $A^{-1}A = I_n = AA^{-1}$, *τον οποίο βρίσκουμε παρακάτω με δυο τρόπους.*

(1) *Υπολογίζουμε όλες τις ελάσσονες ορίζουσες του πίνακα* A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3, \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2, \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

Άρα, έχουμε

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj} A = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(2) *Έχουμε*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + 2\Gamma_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - 2\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_3 \to \frac{1}{2}\Gamma_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_3]{\Gamma_1 \to \Gamma_1 + \Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

και άρα έπεται ότι $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. □

Άσκηση 2. *Αν ένας από τους πίνακες* $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *είναι αντιστρέψιμος, τότε να δειχθεί ότι:*

$$|A \cdot B + I_n| = |B \cdot A + I_n|$$

Λύση. *Έστω ότι ο πίνακας* A *είναι αντιστρέψιμος. Τότε έχουμε*

$$\begin{aligned} |AB + I_n| &= |AB + AA^{-1}| \\ &= |A(B + A^{-1})| \\ &= |A||B + A^{-1}| \\ &= |B + A^{-1}||A| \\ &= |(B + A^{-1})A| \\ &= |BA + A^{-1}A| \\ &= |BA + I_n| \end{aligned}$$

Όμοια δείχνουμε το ζητούμενο αν ο πίνακας B *είναι αντιστρέψιμος.* □

Άσκηση 3. *Να υπολογισθεί η ορίζουσα του ακόλουθου* $n \times n$ *πίνακα πραγματικών αριθμών:*

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1^2 & \cdots & \rho_1^{n-1} \\ 1 & \rho_2 & \rho_2^2 & \cdots & \rho_2^{n-1} \\ 1 & \rho_3 & \rho_3^2 & \cdots & \rho_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \rho_n & \rho_n^2 & \cdots & \rho_n^{n-1} \end{pmatrix} \qquad \text{(Ορίζουσα Vandermonde } n \text{ τάξης)}$$

Λύση. *Για* $n = 2$ *έχουμε την ορίζουσα*

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ 1 & \rho_2 \end{vmatrix} = \rho_2 - \rho_1$$

Στην άσκηση 4 *του Φυλλαδίου* 2 *είχαμε αποδείξει την ορίζουσα Vandermonde για* $n = 3$, *δηλαδή*

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1^2 \\ 1 & \rho_2 & \rho_2^2 \\ 1 & \rho_3 & \rho_3^2 \end{vmatrix} = (\rho_2 - \rho_1)(\rho_3 - \rho_1)(\rho_3 - \rho_2)$$

Θα αποδείξουμε με Μαθηματική Επαγωγή ότι

$$|A_n| = \prod_{i>j}^{1,n} (\rho_i - \rho_j) \qquad (*)$$

Υπόθεση Επαγωγής: *Έστω ότι ισχύει για* $k = n - 1$, *δηλαδή δεχόμαστε ότι:*

$$|A_{n-1}| = \prod_{i>j}^{1,n-1} (\rho_i - \rho_j)$$

Θα δείξουμε ότι η ζητούμενη σχέση $(*)$ *ισχύει για* $k = n$. *Έχουμε*

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1^2 & \cdots & \rho_1^{n-1} \\ 1 & \rho_2 & \rho_2^2 & \cdots & \rho_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \rho_n & \rho_n^2 & \cdots & \rho_n^{n-1} \end{vmatrix} \xlongequal{\Sigma_n \to \Sigma_n - \rho_1 \Sigma_{n-1}} \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1^2 & \cdots & 0 \\ 1 & \rho_2 & \rho_2^2 & \cdots & \rho_2^{n-2}(\rho_2 - \rho_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \rho_n & \rho_n^2 & \cdots & \rho_n^{n-2}(\rho_n - \rho_1) \end{vmatrix}$$

$$= \cdots \xlongequal{\Sigma_3 \to \Sigma_3 - \rho_1 \Sigma_2} \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \rho_2 & \rho_2(\rho_2 - \rho_1) & \cdots & \rho_2^{n-2}(\rho_2 - \rho_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \rho_n & \rho_n(\rho_n - \rho_1) & \cdots & \rho_n^{n-2}(\rho_n - \rho_1) \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\Sigma_2 \to \Sigma_2 - \rho_1 \Sigma_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \rho_2 - \rho_1 & \rho_2(\rho_2 - \rho_1) & \cdots & \rho_2^{n-2}(\rho_2 - \rho_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \rho_n - \rho_1 & \rho_n(\rho_n - \rho_1) & \cdots & \rho_n^{n-2}(\rho_n - \rho_1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \rho_2 - \rho_1 & \rho_2(\rho_2 - \rho_1) & \cdots & \rho_2^{n-2}(\rho_2 - \rho_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_n - \rho_1 & \rho_n(\rho_n - \rho_1) & \cdots & \rho_n^{n-2}(\rho_n - \rho_1) \end{vmatrix} = (\rho_2 - \rho_1) \cdots (\rho_n - \rho_1) \begin{vmatrix} 1 & \rho_2 & \rho_2^2 & \cdots & \rho_2^{n-2} \\ 1 & \rho_3 & \rho_3^2 & \cdots & \rho_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \rho_n & \rho_n^2 & \cdots & \rho_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{ΕΠΑΓΩΓΗΣ}]{\text{ΥΠΟΘΕΣΗ}} (\rho_2 - \rho_1) \cdots (\rho_n - \rho_1) \prod_{i>j}^{2,n-1} (\rho_i - \rho_j) = \prod_{i>j}^{1,n} (\rho_i - \rho_j)$$

Επομένως, έχουμε $|A_n| = \prod_{i>j}^{1,n} (\rho_i - \rho_j)$, $\forall n \geq 1$. $\square$

Άσκηση 4. *Να υπολογισθεί η ορίζουσα του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ a & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1 \\ a & a & 1 & 2 & \cdots & n-4 & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & a & \cdots & 1 & 2 & 3 \\ a & a & a & a & \cdots & a & 1 & 2 \\ a & a & a & a & \cdots & a & a & 1 \end{pmatrix}$$

Λύση. *Έχουμε*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ a & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & a & \cdots & a & 1 & 2 \\ a & a & a & a & \cdots & a & a & a \end{vmatrix} \xlongequal{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2} \begin{vmatrix} 1-a & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & a & \cdots & a & 1 & 2 \\ a & a & a & a & \cdots & a & a & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\Gamma_2\to\Gamma_2-\Gamma_3}\begin{vmatrix} 1-a & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & a & \cdots & a & 1 & 2 \\ a & a & a & a & \cdots & a & a & a \end{vmatrix} = \cdots$$

$$\xlongequal{\Gamma_{n-1}\to\Gamma_{n-1}-\Gamma_n}\begin{vmatrix} 1-a & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-a & 1 \\ a & a & a & a & \cdots & a & a & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\Sigma_n\to\Sigma_n-\Sigma_{n-1}}\begin{vmatrix} 1-a & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-a & a \\ a & a & a & a & \cdots & a & a & 1-a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\Sigma_{n-1}\to\Sigma_{n-1}-\Sigma_{n-2}}\begin{vmatrix} 1-a & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-a & a \\ a & a & a & a & \cdots & a & 0 & 1-a \end{vmatrix} = \cdots$$

$$\xlongequal{\Sigma_2\to\Sigma_2-\Sigma_1}\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-a & a \\ a & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$= (1-a)\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1-a \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}a\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-a & a \end{vmatrix}$$

$$= (1-a)(1-a)^{n-1} + (-1)^{n+1}aa^{n-1} = (1-a)^n + (-1)^{n+1}a^n \,. \qquad \square$$

Άσκηση 5. *Να δείξετε ότι για τον $n \times n$ πίνακα:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

ισχύει:

$$|A| = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$$

Λύση. *Έχουμε*

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{\Gamma_n \to \Gamma_n - \Gamma_{n-1}}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\Gamma_{n-1} \to \Gamma_{n-1} - \Gamma_{n-2}}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix} = \cdots \overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{\Sigma_1 \to \Sigma_1 + \Sigma_n \\ \Sigma_2 \to \Sigma_2 + \Sigma_n \\ \vdots \\ \Sigma_{n-1} \to \Sigma_{n-1} + \Sigma_n}}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} n-1 & n & n+1 & \cdots & 2n-3 & n-1 \\ 0 & -2 & -2 & \cdots & -2 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}2^{n-2}(n-1) \qquad \square$$

Άσκηση 6. *Θεωρούμε τον $n \times n$ πίνακα A ο οποίος είναι της μορφής:*

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ \mathbb{O} & D \end{pmatrix}$$

όπου: $B \in \mathsf{M}_{r\times r}(\mathbb{K})$, $C \in \mathsf{M}_{r\times(n-r)}(\mathbb{K})$, $\mathbb{O} \in \mathsf{M}_{(n-r)\times r}(\mathbb{K})$, *και* $D \in \mathsf{M}_{(n-r)\times(n-r)}(\mathbb{K})$.
Να δείξετε ότι:

$$|A| = |B| \cdot |D|$$

Λύση.

- *Η Βασική Ιδέα της Απόδειξης είναι η ακόλουθη:*

Γενικά εκτελώντας σε έναν πίνακα Ω, ορισμένες εναλλαγές γραμμών ή/και προσθέτοντας πολλαπλάσια γραμμών σε άλλες μπορούμε να σχηματίσουμε έναν άνω τριγωνικό πίνακα Ω' με $\det \Omega = (-1)^{\epsilon} \det \Omega'$, όπου το $\epsilon = 1$, όταν το πλήθος από τις εναλλαγές των γραμμών είναι άρτιο και $\epsilon = -1$, όταν το πλήθος από τις εναλλαγές είναι περιττό.

Αυτό γίνεται με παρόμοιο τρόπο όπως κατά τη μετατροπή ενός πίνακα σε γ-κλιμακωτή μορφή, χωρίς όμως την απαίτηση το πρώτο στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής να ισούται με 1. Έτσι δεν χρειάζεται να πολλαπλασιάζουμε κάποια γραμμή με ένα μη μηδενικό στοιχείο, αφού τότε θα δεν θα ήταν εύκολο να παρακολουθούμε τις αλλαγές στην τιμή της ορίζουσας. Σε σχέση με την παρατήρηση αυτή σκεφτείτε ότι ένας γ-κλιμακωτός $n \times n$ πίνακας είναι ένας ειδικού τύπου άνω τριγωνικός πίνακας και αντίστροφα ένας άνω τριγωνικός πίνακας μπορεί να μετατραπεί εύκολα σε έναν γ-κλιμακωτό.

Ας προχωρήσουμε τώρα στην απόδειξη τής συγκεκριμένης άσκησης.

Επί των πρώτων r γραμών τού πίνακα A εκτελούμε εναλλαγές γραμμών ή/και προσθέτουμε πολλαπλάσια γραμμών σε άλλες, κατά τέτοιον τρόπο ώστε στη θέση τού B να προκύψει ένας άνω τριγωνικός πίνακας B'. Έτσι από τον A έχει προκύψει ο

$$A' = \begin{pmatrix} B' & C' \\ \mathbb{O} & D \end{pmatrix}.$$

Λόγω των εναλλαγών στις r γραμμές τού A έχουμε: $\det A' = (-1)^{\epsilon_1} \det A$ καθώς επίσης και $\det B' = (-1)^{\epsilon_1} \det B$, $\epsilon_1 = \pm 1$.

Επί των τελευταίων $n-r$ γραμών τού πίνακα A' εκτελούμε εναλλαγές γραμμών ή/και προσθέτουμε πολλαπλάσια γραμμών σε άλλες, κατά τέτοιον τρόπο ώστε στη θέση τού D να προκύψει ένας άνω τριγωνικός πίνακας D'. Έτσι από τον A' έχει προκύψει ο

$$A'' = \begin{pmatrix} B' & C' \\ \mathbb{O} & D' \end{pmatrix}.$$

Λόγω των εναλλαγών στις $n-r$ γραμμές τού A' έχουμε: $\det A'' = (-1)^{\epsilon_2} \det A'$ καθώς επίσης και $\det D' = (-1)^{\epsilon_2} \det D$, $\epsilon_2 = \pm 1$.

Έχουμε $\det A = (-1)^{\epsilon_1}(-1)^{\epsilon_2} \det A''$, $\det B = (-1)^{\epsilon_1} \det B'$, $\det D = (-1)^{\epsilon_2} \det D'$.

Αλλά ο A'' είναι άνω τριγωνικός, αφού οι B' και D' είναι άνω τριγωνικοί. Επομένως, $\det A'' = \det B' \det C'$ (ως γινόμενο των στοιχείων τής κύριας διαγωνίου). Συνεπώς,

$$\det A = (-1)^{\epsilon_1}(-1)^{\epsilon_2} \det A'' = (-1)^{\epsilon_1}(-1)^{\epsilon_2} \det B' \det C' = \det B \det C. \qquad \square$$

Άσκηση 7. *Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός των μηδενικών συνιστωσών που μπορεί να έχει ένας 4×4 πίνακας, χωρίς όμως η ορίζουσά του να είναι ίση με μηδέν;*

Λύση. *Ο ελάχιστος αριθμός των μη μηδενικών συνιστωσών του, ώστε η ορίζουσα να μην ισούται με μηδέν, είναι τέσσερα και υλοποιείται από έναν διαγώνιο πίνακα όπου και τα τέσσερα στοιχεία τής κυρίας διαγωνίου είναι $\neq 0$. Μόνο τρία μη μηδενικά στοιχεία αναγκάζουν μία από τις τέσσερεις γραμμές τού πίνακα να αποτελείται πάντοτε μόνο από μηδενικά με συνέπεια η ορίζουσα να είναι ίση με μηδέν.*

Συνεπώς ο μέγιστος αριθμός των μηδενικών συνιστωσών του είναι $16 - 4 = 12$. $\square$

Άσκηση 8. *Πόσες διαφορετικές τιμές μπορεί να έχει η ορίζουσα ενός πίνακα τής μορφής*

$$A = \begin{pmatrix} \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star & \star \end{pmatrix} \in M_{5\times 5}(\mathbb{K}),$$

όπου τα «$\star$» παίρνουν τις τιμές τους από το $\mathbb{K}$;

Λύση. *Θεωρουμε το πέμπτο στοιχείο τής τέταρτης γραμμής.*

Πρωτη Περιπτωση: *Αν το πέμπτο στοιχείο τής τέταρτης γραμμής είναι μηδέν, τότε ο πίνακας έχει την μορφή*

$$A = \begin{pmatrix} \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star \end{pmatrix}.$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα κατά τα στοιχεία τής πρώτης γραμμής βλέπουμε ότι οφείλουμε να υπολογίσουμε δύο ορίζουσες 4×4 *πινάκων που και οι δυό τους έχουν τη μορφή*

$$\begin{pmatrix} \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & 0 \\ \star & \star & \star & \star \end{pmatrix}.$$

Οι τελευταίοι πίνακες είναι κάτω τριγωνικοί με μηδενικό στοιχείο στην κύρια διαγώνιό τους και συνεπώς η ορίζουσά τους ισούται με μηδέν. Ώστε, $\det(A) = 0$.

Δευτερη Περιπτωση: *Αν το πέμπτο στοιχείο τής τέταρτης γραμμής δεν είναι μηδέν, τότε αφαιρώντας ένα κατάλληλο πολλαπλάσιο τής τέταρτης γραμμής από την πέμπτη, μπορούμε να μηδενίσουμε το πέμπτο στοιχείο τής πέμπτης γραμμής.*

Έτσι προκύπτει ο πίνακας

$$B = \begin{pmatrix} \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star & 0 \end{pmatrix}$$

με $\det(B) = \det(A)$.

Στον B *εναλλάσσουμε την πέμπτη με την τέταρτη γραμμή. Έτσι προκύπτει ένας πίνακας τής μορφής*

$$C = \begin{pmatrix} \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star \end{pmatrix}.$$

Η $\det(C) = 0$, *αφού η μορφή τού* C *είναι ίδια με τη μορφή τού* A *τής Πρώτης Περίπτωσης. Επιπλέον* $\det(C) = -\det B$. *Άρα* $0 = \det(B) = \det(A)$. $\square$

Άσκηση 9. *Ας είναι* $A = (a_{ij})$ *ένας* $n \times n$ *πίνακας και* A_{ij} *το αλγεβρικό συμπλήρωμα τού στοιχείου* a_{ij}. *Να δειχθεί ότι, αν* $i \neq r$, *τότε*

$$a_{i1}A_{r1} + a_{i2}A_{r2} + \cdots + a_{in}A_{rn} = 0$$

και, αν $j \neq s$, *τότε*

$$a_{1j}A_{1s} + a_{2j}A_{2s} + \cdots + a_{nj}A_{ns} = 0.$$

Λύση. *Ας ονομάσουμε* A' *τον πίνακα που προκύπτει από τον* A *αντικαθιστώντας την* r*-οστή γραμμή τού* A *από την* i*-οστή* ($i \neq r$) *γραμμή του. Η* $\det A'$ *ισούται με* 0, *αφού ο* A' *έχει δύο ίσες γραμμές (την* i*-οστή και την* r*-οστή). Αναπτύσσοντας την* $\det A'$ *κατά τα στοιχεία τής* r*-οστής γραμμής, τα οποία είναι τα* $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ *παίρνουμε:*

$$a_{i1}A_{r1} + a_{i2}A_{r2} + \cdots + a_{in}A_{rn} = \det A' = 0.$$

η απόδειξη τού άλλου τύπου είναι ανάλογη και εκτελείται με αντικαθιστώντας την s*-οστή στήλη τού* A *με την* j*-οστή.* $\square$

Άσκηση 10. *Να δειχθεί ότι η* $\det A_n$*, όπου* A_n *είναι ο* $n \times n$ *Fibonacci πίνακας:*

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ισούται με τον n*-οστό όρο* a_n *τής ακολουθίας Fibonacci*

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, \cdots = \{a_n\}_{n=1}^{\infty},$$

ο οποίος ορίζεται μέσω του αναγωγικού τύπου: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad \forall n \geq 3.$

Λύση. *Ο* 1×1 *πίνακας Fibonacci είναι ο* (1) *και η ορίζουσά του είναι η* $d_1 = 1$.
Ο 2×2 *πίνακας Fibonacci είναι ο* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ *και η ορίζουσά του είναι η* $d_2 = 1 + 1 = 2$.
Ας είναι d_n *η ορίζουσα τού* $n \times n$ *πίνακα Fibonacci. Θα δείξουμε ότι για* $n \geq 3$*, είναι* $d_n = d_{n-1} + d_{n-2}$.
Ο 3×3 *πίνακας Fibonacci είναι ο* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *και η ορίζουσά του (αναπτύσσοντας ως προς τα στοιχεία τής πρώτης στήλης) είναι η:*

$$d_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - (-1) = 3 = d_1 + d_2.$$

Θεωρούμε τώρα τον $n \times n$ *Fibonacci πίνακα* A *και υπολογίζουμε την ορίζουσά του αναπτύσσοντας κατά τα στοιχεία τής* ***πρώτης στήλης****: Προφανώς,* $\det A = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21}$*, αφού τα υπόλοιπα στοιχεία τής πρώτης στήλης είναι ίσα με μηδέν. Το* $a_{11} = 1$ *και το συμπλήρωμά του* A_{11} *ισούται με* $(-1)^{1+1}d_{n-1}$ *(διαγράφοντας την πρώτη γραμμή και την πρώτη στήλη τού* A *προκύπτει και πάλι πίνακας Fibonacci με μέγεθος* $(n-1) \times (n-1)$*). Το* $a_{21} = -1$ *και το συμπλήρωμά του* A_{21} *ισούται με* $(-1)^{2+1}D$*, όπου* D *είναι η ορίζουσα τού* $(n-1) \times (n-1)$ *πίνακα* A' *που προκύπτει διαγράφοντας την πρώτη στήλη και δεύτερη γραμμή τού* A*, δηλαδή τού πίνακα*

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Αλλά υπολογίζοντας την ορίζουσα D *τού* A' *αναπτύσσοντας τώρα κατά τα στοιχεία τής* ***πρώτης γραμμής*** *βλέπουμε ότι αυτή η* D *συμπίπτει με την ορίζουσα τού* $(n-2) \times (n-2)$ *Fibonacci πίνακα, δηλαδή με την ορίζουσα* d_{n-2}*. Έτσι τελικά έχουμε:*

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} = (-1)^{1+1}d_{n-1} + (-1)(-1)^{2+1}d_{n-2} = d_{n-1} + d_{n-2}.$$

Άρα:

$$|A_n| = a_n, \ \forall n \geq 1 \qquad \square$$

Ενότητα 4

Άσκηση 1. *Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ πάνω από το $\mathbb{R}$ και τα παρακάτω υποσύνολά του:*

$$\mathcal{V} = \Big\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & b \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R} \Big\}$$

και

$$\mathcal{W} = \{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & c+d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid c, d \in \mathbb{R} \}$$

(1) *Να δείξετε ότι οι $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.*
(2) *Να βρεθεί η μορφή των στοιχείων του υποχώρου $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$.*

Λύση. (1) *Έχουμε*

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \Big\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & b \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R} \Big\} \\ &= \Big\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R} \Big\} \\ &= \Big\{ a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R} \Big\} \\ &= \Big\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Big\rangle \end{aligned}$$

δηλαδή ο $\mathcal{V}$ παράγεται από τους πίνακες

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Παρόμοια:

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \Big\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & c+d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid c, d \in \mathbb{R} \Big\} \\ &= \Big\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid c, d \in \mathbb{R} \Big\} \\ &= \Big\{ c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid c, d \in \mathbb{R} \Big\} \\ &= \Big\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Big\rangle \end{aligned}$$

δηλαδή ο $\mathcal{W}$ παράγεται από τους πίνακες

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς οι $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(2) *Έστω* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$, *δηλαδή* $A \in \mathcal{V}$ *και* $A \in \mathcal{W}$. *Τότε έχουμε*

$$\begin{cases} A \in \mathcal{V} & \Rightarrow a = 0 \ \text{ και } \ b = c \\ A \in \mathcal{W} & \Rightarrow a = 0 \ \text{ και } \ d = c + b \Rightarrow d = 2b \end{cases}$$

και άρα $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 2b \end{pmatrix}$. *Επομένως η περιγραφή του υποχώρου* $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ *είναι η ακόλουθη:*

$$\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \Big\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 2b \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,|\, b \in \mathbb{R} \Big\} = \Big\{ b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,|\, b \in \mathbb{R} \Big\} = \Big\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Big\rangle \qquad \square$$

Παρατήρηση 1. *Η Άσκηση* **1.** *θα μπορούσε να λυθεί και με χρήση του Ορισμού. Η παραπάνω λύση δείχνει επιπρόσθετα ότι τα σύνολα* $\mathcal{V}$ *και* $\mathcal{W}$ *είναι υπόχωροι οι οποίοι παράγονται από συγκεκριμένα διανύσμαστα.*

Άσκηση 2. *Στο σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών* $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ *ορίζουμε τις πράξεις:*

$$\oplus : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \ (x, y) \mapsto x \oplus y = xy$$

και

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \ (r, x) \mapsto r \odot x = x^r$$

(1) *Να δείξετε ότι η τριάδα* $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ *αποτελεί διανυσματικό χώρο υπεράνω του* $\mathbb{R}$.
(2) *Να βρεθούν όλοι οι υπόχωροι του διανυσματικού χώρου* $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$.

Λύση. (1) *Έστω* $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ *και* $r, s \in \mathbb{R}$. *Τότε:*

(α') $(x \oplus y) \oplus z = (xy) \oplus z = (xy)z = x(yz) = x(y \oplus z) = x \oplus (y \oplus z)$.

(β') $x \oplus y = xy = yx = y \oplus x$.

(γ') *Θέλουμε να εξετάσουμε αν υπάρχει ένα στοιχείο* $\mathfrak{o} \in \mathbb{R}^+$ *έτσι ώστε* $x \oplus \mathfrak{o} = x = \mathfrak{o} \oplus x$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}^+$. *Άρα*

$$x \oplus \mathfrak{o} = x \iff x\mathfrak{o} = x \iff \mathfrak{o} = 1$$

διότι το $x \neq 0$. *Συνεπώς, το μηδενικό διάνυσμα είναι το στοιχείο* $\mathfrak{o} = 1$.

(δ') *Θεωρούμε στοιχείο* $x \in \mathbb{R}^+$. *Θέλουμε να εξετάσουμε αν υπάρχει ένα στοιχείο* $y \in \mathbb{R}^+$ *έτσι ώστε:* $x \oplus y = \mathfrak{o} = y \oplus x$. *Επειδή από το προηγούμενο αξίωμα,* $\mathfrak{o} = 1$, *θα έχουμε:* $x \oplus y = 1 \Leftrightarrow xy = 1$ *και αφού* $x \in \mathbb{R}^+$ *έπεται ότι* $y = \frac{1}{x} \in \mathbb{R}^+$. *Πράγματι, έχουμε*

$$x \oplus \frac{1}{x} = x\frac{1}{x} = 1 = \frac{1}{x}x = \frac{1}{x} \oplus x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^+$. *Άρα, το αντίθετο του διανύσματος* $x \in \mathbb{R}^+$ *ως προς την πρόσθεση* $\oplus$ *είναι το διάνυσμα* $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}^+$.

(ε') $r \odot (x \oplus y) = r \odot (xy) = (xy)^r = x^r y^r = x^r \oplus y^r = (r \odot x) \oplus (r \odot y)$.

(ϝ') $(r + s) \odot x = x^{r+s} = x^r x^s = x^r \oplus x^s = (r \odot x) \oplus (s \odot x)$.

(ζ) $r \odot (s \odot x) = r \odot (x^s) = (x^s)^r = x^{sr} = (sr) \odot x$.

(η) $1 \odot x = x^1 = x$.

Επομένως, η τριάδα $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ *αποτελεί διανυσματικό χώρο υπεράνω του* $\mathbb{R}$.

(2) *Γνωρίζουμε ότι το σύνολο* $\{1\}$ *και όλος ο χώρος* $\mathbb{R}^+$ *είναι υπόχωροι του* $\mathbb{R}^+$. *Έστω* $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^+$ *ένας υπόχωρος του* $\mathbb{R}^+$ *έτσι ώστε* $\mathcal{V} \neq \{1\}$, *δηλαδή ο* $\mathcal{V}$ *δεν είναι ο μηδενικός υπόχωρος του* $\mathbb{R}^+$. *Άρα υπάρχει ένα* $x \in \mathcal{V}$ *με* $x \neq 1$. *Έστω* $k \in \mathbb{R}^+$. *Τότε έχουμε*

$$k = x^{\log_x k} = \log_x k \odot x \in \mathcal{V}$$

αφού $\log_x k \in \mathbb{R}$ *και* $x \in \mathcal{V}$. *Συνεπώς έχουμε ότι* $\mathbb{R}^+ \subseteq \mathcal{V}$ *και άρα* $\mathcal{V} = \mathbb{R}^+$. *Επομένως οι μόνοι υπόχωροι του διανυσματικού χώρου* $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ *είναι το* $\{1\}$ *και όλος ο χώρος* $\mathbb{R}^+$.
□

Παρατήρηση 2. *Οι διανυσματικοί χώροι* $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ *και* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *έχουν την ιδιότητα ότι οι μόνοι υπόχωροι τους είναι ο μηδενικός υπόχωρος και ο εαυτός τους. Αυτό δεν είναι τυχαίο. Όπως θα δείξουμε αργότερα, οι* $\mathbb{R}$*-διανυσματικοί χώροι* $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ *και* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *είναι "ισόμορφοι" (αυτό έχει σαν συνέπεια ότι έχουν τις ίδιες δομικές ιδιότητες, και μια τέτοια δομική ιδιότητα είναι παράδειγμα η δομή των υποχώρων τους). Δηλαδή υπάρχει μια 1-1 και επί απεικόνιση* $f\colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, *η οποία "διατηρεί τις πράξεις", με την έννοια ότι:*

$$f(x \oplus y) = f(x) + f(y), \qquad \textit{και} \qquad f(r \odot x) = r \cdot f(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+, \ \ \forall r \in \mathbb{R}$$

Μπορείτε να βρείτε μια τέτοια απεικόνιση;

Άσκηση 3. *Να λύσετε το σύστημα:*

$$(\Sigma) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & - & x_5 & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & & & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & \lambda \\ -4x_1 & + & 4x_2 & - & 4x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & -\lambda \end{array} \right.$$

Λύση. *Έχουμε*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & | & \lambda \\ -4 & 4 & -4 & -1 & 1 & | & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & \lambda \\ -4 & 4 & -4 & -1 & 1 & | & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_4 \to \Gamma_4 + 4\Gamma_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & | & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \to \Gamma_4 + \Gamma_2]{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & | & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & | & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_4 \to \Gamma_4 + 2\Gamma_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & | & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \to \frac{1}{2}\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{\lambda}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & \lambda \end{pmatrix}$$

και άρα καταλήγουμε στο παρακάτω σύστημα:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 0 \\ x_4 - x_5 = 0 \\ x_5 = \frac{\lambda}{2} \\ 0 = \lambda \end{cases}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(1) *Αν* $\lambda \neq 0$ *τότε έπεται ότι το σύστημα* (Σ) *είναι αδύνατο.*

(2) *Αν* $\lambda = 0$ *τότε έχουμε* $x_5 = 0$ *και άρα* $x_4 = 0$. *Ακόμα, από την πρώτη εξίσωση έχουμε* $x_1 = x_2 - x_3$. *Θέτουμε* $x_2 = \kappa$ *και* $x_3 = \nu$ *με* $\kappa, \nu \in \mathbb{R}$. *Τότε έχουμε τη γενική λύση:*

$$\begin{cases} x_1 = \kappa - \nu \\ x_2 = \kappa \\ x_3 = \nu \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases} \qquad \kappa, \nu \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

Άσκηση 4. *Να λύσετε το σύστημα:*

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 1 - 2\lambda \\ x_2 + x_3 = -2\lambda \\ x_4 - x_5 = 1 - \lambda \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2 - 2\lambda \end{cases}$$

Λύση. *Έχουμε*

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & -2 & 1-2\lambda \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1-\lambda \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 2-2\lambda \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & -2 & 1-2\lambda \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & -2 & 1-2\lambda \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\lambda \end{array}\right)$$

και άρα καταλήγουμε στο παρακάτω σύστημα:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 1 - 2\lambda \\ x_2 + x_3 = -2\lambda \\ x_4 - x_5 = 1 - \lambda \\ 0 = 1 + \lambda \end{cases}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(1) *Αν* $\lambda \neq -1$ *τότε το σύστημα* (Σ) *είναι αδύνατο.*

(2) *Για* $\lambda = -1$ *έχουμε το σύστημα:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 3 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ x_4 - x_5 = 2 \end{cases}$$

Συνεπώς έχουμε ότι $x_2 = 2 - x_3$, $x_4 = 2 + x_5$ *και αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση βρίσκουμε* $x_1 = -1 - x_3 + x_5$. *Θέτουμε* $x_3 = \nu$ *και* $x_5 = \kappa$ *με* $\kappa, \nu \in \mathbb{R}$. *Τότε έχουμε τη γενική λύση:*

$$\begin{cases} x_1 = -1 - \nu + \kappa \\ x_2 = 2 - \nu \\ x_3 = \nu & \qquad \kappa, \nu \in \mathbb{R}. \qquad \square \\ x_4 = 2 + \kappa \\ x_5 = \nu \end{cases}$$

Άσκηση 5. *Έστω* $\mathcal{E}$ *ένας* $\mathbb{K}$*-διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος* $\mathbb{K}$ *και* $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ *δύο υπόχωροί του. Να δείξετε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Η ένωση* $\mathcal{V} \cup \mathcal{W}$ *των συνόλων* $\mathcal{V}$ *και* $\mathcal{W}$ *είναι υπόχωρος του* $\mathcal{E}$.
(2) *Είτε* $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$ *ή* $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$.

Λύση. $(2) \Longrightarrow (1)$ *Αν* $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$, *τότε προφανώς* $\mathcal{V} \cup \mathcal{W} = \mathcal{W}$, *και άρα η ένωση* $\mathcal{V} \cup \mathcal{W}$ *είναι υπόχωρος διότι ο* $\mathcal{W}$ *είναι υπόχωρος. Παρόμοια αν* $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$, *τότε προφανώς* $\mathcal{V} \cup \mathcal{W} = \mathcal{V}$, *και άρα η ένωση* $\mathcal{V} \cup \mathcal{W}$ *είναι υπόχωρος διότι ο* $\mathcal{V}$ *είναι υπόχωρος.*

$(1) \Longrightarrow (2)$ *Έστω ότι η ένωση* $\mathcal{V} \cup \mathcal{W}$ *των συνόλων* $\mathcal{V}$ *και* $\mathcal{W}$ *είναι υπόχωρος του* $\mathcal{E}$.

(I) *Υποθέτουμε ότι* $\mathcal{V} \nsubseteq \mathcal{W}$. *Τότε υπάρχει ένα διάνυσμα* $\vec{x} \in \mathcal{V}$ *το οποίο δεν ανήκει στον* $\mathcal{W}$: $\vec{x} \notin \mathcal{W}$. *Θα δείξουμε ότι* $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$.

- *Θεωρούμε τυχόν διάνυσμα* $\vec{y} \in \mathcal{W}$. *Θα δείξουμε ότι* $\vec{y} \in \mathcal{V}$.

Πραγματικά τότε τα διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}$ *ανήκουν προφανώς στην ένωση* $\mathcal{V} \cup \mathcal{W}$. *Επειδή το σύνολο* $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ *είναι υπόχωρος του* $\mathcal{E}$, *έπεται ότι το διάνυσμα* $\vec{x} + \vec{y}$ *ανήκει στην ένωση* $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$. *Επομένως*

$$\text{είτε} \quad (\text{a}) \;\; \vec{x} + \vec{y} \in \mathcal{W} \quad \text{ή} \quad (\text{b}) \;\; \vec{x} + \vec{y} \in \mathcal{V}$$

(a) *Αν* $\vec{x} + \vec{y} \in \mathcal{W}$, *τότε επειδή* $\vec{y} \in \mathcal{W}$ *και το* $\mathcal{W}$ *είναι υπόχωρος, το διάνυσμα* $(\vec{x} + \vec{y}) - \vec{y} = \vec{x}$ *θα ανήκει στον* $\mathcal{W}$. *Αυτό όμως είναι άτοπο διότι* $\vec{x} \notin \mathcal{W}$.
(b) *Άρα* $\vec{x} + \vec{y} \in \mathcal{V}$. *Τότε επειδή* $\vec{x} \in \mathcal{V}$ *και το* $\mathcal{V}$ *είναι υπόχωρος, το διάνυσμα* $(\vec{x} + \vec{y}) - \vec{x} = \vec{y}$ *θα ανήκει στον* $\mathcal{V}$. *Άρα δείξαμε ότι το διάνυσμα* $\vec{y}$ *του* $\mathcal{W}$ *είναι και διάνυσμα του* $\mathcal{V}$.

Επομένως δείξαμε ότι αν $\mathcal{V} \nsubseteq \mathcal{W}$, *τότε αναγκαστικά θα έχουμε* $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$.

(II) *Αν* $\mathcal{W} \nsubseteq \mathcal{V}$, *τότε εργαζόμενοι παρόμοια δείχνουμε ότι τότε αναγκαστικά θα έχουμε* $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$. *Άρα δείξαμε ότι είτε* $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$ *ή* $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$. $\square$

Άσκηση 6. *Να εξεταστεί ποια από τα ακόλουθα υποσύνολα τού* $\mathbb{R}$*-διανυσματικού χώρου* $\mathbb{R}^4$ *είναι* $\mathbb{R}$*-διανυσματικοί υπόχωροί του:*

(1) $W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y, z = t\}$,
(2) $W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$,
(3) $W_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 1\}$,
(4) $W_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid xt = yz\}$.

Λύση. *Υπενθυμίζουμε ότι για να αποτελεί το υποσύνολο* W *ενός* $\mathbb{K}$*-διανυσματικού χώρου* V, *έναν υπόχωρο τού* V *πρέπει να πληροί τα ακόλουθα:*

(1) $W \neq \emptyset$,
(2) $\forall \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W \Rightarrow \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in W$,
(3) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vec{w} \in W \Rightarrow \lambda \cdot \vec{w} \in W$.

(α') Το W_1 αποτελείται από τα στοιχεία τού $\mathbb{R}^4$ τής μορφής $(a, a, b, b), a, b \in \mathbb{R}$ και επειδή το $(0, 0, 0, 0)$ ανήκει στο W_1, αφού είναι αυτής τής μορφής, έπεται ότι $W_1 \neq \emptyset$.

Αν $\vec{w}_1 \in W_1$ και $\vec{w}_2 \in W_1$, τότε το $\vec{w}_1 = (a, a, b, b)$ και το $\vec{w}_2 = (c, c, d, d)$, όπου $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Έχουμε:

$$\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = (a, a, b, b) + (c, c, d, d) = (a + c, a + c, b + d, b + d),$$

το οποίο έχει την κατάλληλη μορφή ώστε να ανήκει στο W_1.

Ανάλογα, αν $\lambda \in \mathbb{K}$ και $\vec{w} \in W_1$, τότε το $\vec{w} = (a, a, b, b), a, b \in \mathbb{R}$ και έχουμε:

$$\lambda \cdot \vec{w} = \lambda \cdot (a, a, b, b) = (\lambda a, \lambda a, \lambda b, \lambda b),$$

το οποίο έχει την κατάλληλη μορφή ώστε να ανήκει στο W_1.

(β') Το W_2 είναι $\neq \emptyset$, αφού οι συνιστώσες τού $\vec{0} = (0, 0, 0, 0)$ ικανοποιούν την $x + y + z + t = 0$, που έχει ως συνέπεια να ανήκει το $\vec{0}$ στο W_2.

Αν $\vec{w}_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1) \in W_2$ και $\vec{w}_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2) \in W_2$, τότε $a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 0$ και $a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 0$. Συνεπώς, $(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) + (c_1 + c_2) + (d_1 + d_2) = 0$ και γι' αυτό το $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2)$ ανήκει επίσης στο W_2.

Αν $\lambda \in \mathbb{K}$ και $\vec{w} = (a, b, c, d) \in W_2$, τότε $a + b + c + d = 0$. Συνεπώς, $\lambda a + \lambda b + \lambda c + \lambda d = \lambda 0 = 0$ και γι' αυτό το $\lambda\vec{w} = (\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d)$ ανήκει επίσης στο W_2.

(γ') Το W_3 ***δεν είναι*** διανυσματικός υπόχωρος τού $\mathbb{R}^4$, μολονότι $W_3 \neq \emptyset$, αφού το $(1, 1, 1, 1)$ είναι στοιχείο του. Πράγματι, αν ήταν διανυσματικός χώρος, τότε το μηδενικό στοιχείο τού $\mathbb{R}^4$, δηλαδή το $\vec{0} = (0, 0, 0, 0)$ θα ανήκε στο W_3. Το τελευταίο δεν μπορεί να συμβαίνει, αφού για να ανήκει το $\vec{0}$ στο W_3, θα πρέπει, σύμφωνα με τον ορισμό τού W_3, η πρώτη συνιστώσα του, το 0, να ισούται με 1.

(δ') Το W_4 ***δεν είναι*** διανυσματικός υπόχωρος τού $\mathbb{R}^4$, μολονότι $W_4 \neq \emptyset$, αφού οι συνιστώσες τού $\vec{0} = (0, 0, 0, 0)$ ικανοποιούν την $xt = yz$ και συνεπώς $\vec{0} \in W_4$. Παρατηρούμε ότι το $\vec{w}_1 = (0, 0, 2, 4)$ ανήκει στο W_4, αφού $0 \cdot 4 = 0 \cdot 2$ και το $\vec{w}_2 = (4, 1, 8, 2)$, αφού $4 \cdot 2 = 1 \cdot 8$. Ωστόσο, το $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = (4, 1, 10, 6)$ δεν ανήκει στο W_4, αφού $4 \cdot 6 \neq 1 \cdot 10$. □

Άσκηση 7. *Έστω $\mathfrak{Seq}(\mathbb{R})$ το σύνολο των πραγματικών ακολουθιών. Στο $\mathfrak{Seq}(\mathbb{R})$ ορίζουμε πρόσθεση*

$$\begin{aligned} + \ : \mathfrak{Seq}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{Seq}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathfrak{Seq}(\mathbb{R}), \\ ((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) &\longmapsto (a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

και βαθμωτό πολλαπλασιασμό

$$\cdot \ : \mathbb{R} \times \mathfrak{Seq}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{Seq}(\mathbb{R}), (\lambda, (a_n)_{n\in\mathbb{N}}) \longmapsto \lambda \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

(1) *Να δειχθεί ότι η τριάδα $(\mathfrak{Seq}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ αποτελεί $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο.*

(2) *Ας είναι $\mathfrak{FinSeq}(\mathbb{R})$ το υποσύνολο τού $\mathfrak{Seq}(\mathbb{R})$ που απαρτίζεται από τις ακολουθίες που συγκλίνουν σε κάποιον πραγματικό αριθμό. Ποιες γνωστές προτάσεις τού Απειροστικού Λογισμού εξασφαλίζουν ότι το $\mathfrak{FinSeq}(\mathbb{R})$ είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος τού $\mathfrak{Seq}(\mathbb{R})$;*

Λύση. *(α') Το πρώτο μέρος τής άσκησης μπορεί να προκύψει αμέσως από την:*

Πρόταση. *Έστω ότι S είναι ένα μη κενό σύνολο και ότι $(V, +, \cdot)$ είναι ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος. Το σύνολο $\mathrm{Map}(S, V) := \{f : S \to V\}$ των απεικονίσεων από το S στο V αποτελεί έναν $\mathbb{K}$-διανυσματικό χώρο με πράξεις την πρόσθεση:*

$$+ : \mathrm{Map}(S, V) \times \mathrm{Map}(S, V) \to \mathrm{Map}(S, V), (f, g) \mapsto f + g,$$

όπου $f + g$ είναι η απεικόνιση που ορίζεται ως

$$f + g : S \to V, s \mapsto (f + g)(s) := f(s) + g(s), \forall s \in S.$$

και βαθμωτό πολλαπλασιασμό

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathrm{Map}(S, V) \to \mathrm{Map}(S, V), (\lambda, f) \mapsto \lambda \cdot f,$$

όπου $\lambda \cdot f$ *είναι η απεικόνιση που ορίζεται ως*

$$\lambda \cdot f : S \to V, s \mapsto (\lambda \cdot f)(s) := \lambda f(s), \forall s \in S. \qquad \square$$

Επιλέγοντας ως S *το σύνολο των φυσικών αριθμών* $\mathbb{N}$ *και ως* V *τον* $\mathbb{R}$*-διανυσματικό χώρο* $\mathbb{R}$*, παίρνουμε* $\mathrm{Map}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \mathfrak{Seq}(\mathbb{R})$.
(β') Για να δείξουμε ότι $\mathfrak{FinSeq}(\mathbb{R})$ *είναι* $\mathbb{R}$*-διανυσματικός υπόχωρος πρέπει να εξασφαλίσουμε:*

(1) *'Οτι το* $\mathfrak{FinSeq}(\mathbb{R})$ *είναι μη κενό. Πράγματι το όριο κάθε σταθερής ακολουθίας πραγματικών αριθμών, δηλαδή κάθε ακολουθίας τής μορφής* $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}, a_i = c \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N}$*, είναι ο αριθμός* c*. Συνεπώς, οι σταθερές ακολουθίες ανήκουν στο* $\mathfrak{FinSeq}(\mathbb{R})$ *και γι' αυτό δεν είναι το κενό σύνολο.*
(2) *'Οτι, αν* $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{FinSeq}(\mathbb{R})$ *και* $(b_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{FinSeq}(\mathbb{R})$*, τότε και η ακολουθία* $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} + (b_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{FinSeq}(\mathbb{R})$*, δηλαδή ότι αν η ακολουθία* $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *συγκλίνει στον* $r_1 \in \mathbb{R}$ *και η ακολουθία* $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *συγκλίνει στον* $r_2 \in \mathbb{R}$*, τότε το άθροισμά τους* $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} + (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *συγκλίνει στον* $r_1 + r_2 \in \mathbb{R}$*. Συνεπώς το* $\mathfrak{FinSeq}(\mathbb{R})$ *είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση τού* $(\mathfrak{Seq}(\mathbb{R})$*.*
(3) *'Οτι, αν* $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{FinSeq}(\mathbb{R})$ *και* $\lambda \in \mathbb{R}$*, τότε και η ακολουθία* $\lambda \cdot (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{FinSeq}(\mathbb{R})$*, δηλαδή ότι αν η ακολουθία* $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *συγκλίνει στον* $r \in \mathbb{R}$ *και* λ *είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε το βαθμωτό γινόμενο* $\lambda \cdot (a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (\lambda a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *συγκλίνει στον* $\lambda r \in \mathbb{R}$*. Συνεπώς το* $\mathfrak{FinSeq}(\mathbb{R})$ *είναι κλειστό ως προς τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό που ορίζεται στο* $\mathfrak{Seq}(\mathbb{R})$*.* $\square$

Άσκηση 8. *Να εξεταστεί ποιο από τα επόμενα υποσύνολα τού* $\mathbb{R}$*-διανυσματικού χώρου* $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *των* $n \times n$ *πινάκων με συνιστώσες από το* $\mathbb{R}$ *αποτελεί* $\mathbb{R}$*-υποχώρο τού* $M_{n\times n}(\mathbb{R})$*:*

(1) *Το σύνολο των συμμετρικών των* $n \times n$ *πινάκων.*
(2) *Το σύνολο των αντιστρέψιμων των* $n \times n$ *πινάκων.*
(3) *Το σύνολο των μη αντιστρέψιμων* $n \times n$ *πινάκων.*

Λύση. *(α') 'Εστω* S *το σύνολο των συμμετρικών* $n\times n$ *πινάκων, δηλαδή των πινάκων* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *με* $A = {}^tA$*. Για να είναι το* S *ένας* $\mathbb{R}$*-υπόχωρος τού* $M_{n\times n}(\mathbb{R})$*, θα πρέπει:*

Το S *να μην είναι κενό. Πράγματι, ο ταυτοτικός* $n \times n$ *πίνακας* I_n *είναι συμμετρικός και γι' αυτό ανήκει στο* S*. 'Αρα,* $S \neq \emptyset$*.*

Αν $A, B \in S$*, τότε και* $A + B \in S$*. Πράγματι,* ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB = A + B$*. Συνεπώς,* $A + B \in S$*.*

Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ *και* $A \in S$*, τότε και* $\lambda \cdot A \in S$*. Πράγματι,* ${}^t(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot {}^tA = \lambda \cdot A$*. Συνεπώς* $\lambda \cdot A \in S$*. Επομένως το* S ***είναι*** *ένας* $\mathbb{R}$*-υπόχωρος τού* $M_{n\times n}(\mathbb{R})$*.*

(β') 'Εστω T *το σύνολο των αντιστρέψιμων* $n \times n$ *πινάκων. Για να είναι το* T *ένας* $\mathbb{R}$*-υπόχωρος τού* $M_{n\times n}(\mathbb{R})$*, θα πρέπει:*

Το T *να μην είναι κενό. Πράγματι, ο ταυτοτικός* $n \times n$ *πίνακας* I_n *είναι αντιστρέψιμος και γι' αυτό ανήκει στο* T*. 'Αρα,* $T \neq \emptyset$*.*

Αν $A, B \in T$*, τότε και* $A+B \in T$*. Αυτό όμως οφείλει να συμβαίνει για όλους τους αντιστρέψιμους πίνακες* A, B*. Επιλέγοντας ως* A *τον* I_n *και ως* B *τον* $-\mathrm{I}_n$*, ο οποίος προφανώς είναι αντιστρέψιμος, έχουμε:* $\mathrm{I}_n + (-\mathrm{I}_n) = \mathbb{O}_n$*. Αλλά ο μηδενικός* $n \times n$ *πίνακας* $\mathbb{O}_n$ *δεν ανήκει στο* T*, αφού δεν είναι αντιστρέψιμος. Συνεπώς ο* T ***δεν είναι*** $\mathbb{R}$*-υπόχωρος τού* $M_{n\times n}(\mathbb{R})$*.*

(γ') 'Εστω Q *το σύνολο των μη αντιστρέψιμων* $n\times n$ *πινάκων. Για να είναι το* Q *ένας* $\mathbb{R}$ *υπόχωρος τού* $M_{n\times n}(\mathbb{R})$*, θα πρέπει:*

Το Q να μην είναι κενό. Πράγματι, ο μηδενικός $n \times n$ πίνακας $\mathbb{O}_n$ δεν είναι αντιστρέψιμος και γι' αυτό ανήκει στο Q. Άρα, $Q \neq \emptyset$.

Τώρα θα διακρίνουμε περιπτώσεις.

*Για $n = 1$, ο χώρος $M_{1\times 1}(\mathbb{R})$ ισούται με $\mathbb{R}$ και το $Q = \{0\}$ (κάθε μη μηδενικό στοιχείο τού $\mathbb{R}$ είναι αντιστρέψιμο). Προφανώς το $Q = \{0\}$ **είναι** $\mathbb{R}$-υπόχωρος τού $\mathbb{R}$.*

*Για $n \geq 2$, αν $A, B \in Q$, τότε θα πρέπει και $A + B \in Q$. Αυτό όμως οφείλει να συμβαίνει για όλους τους μη αντιστρέψιμους πίνακες A, B. Επιλέγοντας ως $A = (a_{ij})$ τον πίνακα με $a_{11} = 1$ και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του ίσα με 0 έχουμε ότι $A \in Q$. Επιλέγοντας ως $B = (b_{ij})$ τον πίνακα με $b_{22} = \cdots = b_{nn} = 1$ και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του ίσα με 0 έχουμε ότι $B \in Q$. (Οι A, B δεν είναι αντιστρέψιμοι επιδή έχουν μηδενικές ορίζουσες.) Το άθροισμα $A + B$ ισούται με τον ταυτοτικό πίνακα ο οποίος προφανώς είναι αντιστρέψιμος και συνεπώς $A + B = \mathrm{I}_n \notin Q$. Συνεπώς ο Q **δεν είναι** $\mathbb{R}$-υπόχωρος τού $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.* $\square$

Άσκηση 9. *Ας είναι*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ένας $n \times n$ πίνακας με συνιστώσες από ένα σώμα $\mathbb{K}$ και ας είναι

$$\vec{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, 1 \leq j \leq n$$

η j-οστή στήλη τού πίνακα A.

Να δειχθεί ότι το $\mathbb{K}$-γραμμικό ομογενές σύστημα

$$A \cdot X = \mathbb{O}_n, \text{ όπου } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ και } \mathbb{O}_n = \begin{pmatrix} 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} \end{pmatrix},$$

έχει μόνο τη μηδενική λύση, αν και μόνο αν, οι στήλες $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ τού A είναι $\mathbb{K}$-γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα το χώρου των στηλών $\mathbb{K}_n$.

Λύση. *Παρατηρούμε ότι η* n*-άδα* $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_j, \ldots, \lambda_n)$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$ *είναι λύση τού συστήματος:*

$$\begin{array}{ccccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1j}x_j & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2j}x_j & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{ij}x_j & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nj}x_j & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & 0 \end{array}$$

αν και μόνο αν,

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2, + \cdots + \lambda_j\vec{a}_j + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n = \mathbb{O}_n.$$

Επομένως το σύστημα έχει ως μοναδική λύση τη μηδενική λύση $(0, 0, \ldots, 0)$, *αν και μόνο αν, τα* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ *είναι* $\mathbb{K}$*-γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του* $\mathbb{K}_n$. □

Άσκηση 10. *Ας είναι* A *ένας* $n \times n$ *πίνακας με συνιστώσες από ένα σώμα* $\mathbb{K}$. *Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Ο πίνακας* A *είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας.*
(2) *Οι στήλες τού πίνακα* A *είναι* $\mathbb{K}$*-γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα τού χώρου* $\mathbb{K}_n$.
(3) *Οι γραμμές τού πίνακα* A *είναι* $\mathbb{K}$*-γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα τού χώρου* $\mathbb{K}^n$.

Λύση. *Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι ένας* $n \times n$ *πίνακας* A *είναι αντιστρέψιμος, αν και μόνο αν, το ομογενές σύστημα* $A \cdot X = \mathbb{O}_n$ *έχει ως μοναδική λύση τη μηδενική. Λαμβάνοντας υπόψη την αμέσως προηγουμενη άσκηση, διαπιστώνουμε την ισοδυναμία των (α΄) και (β΄).*

Επιπλέον είναι γνωστό αλλά και προφανές ότι ένας $n \times n$ *πίνακας* A *είναι αντιστρέψιμος , αν και μόνο αν, ο ανάστροφός του* ${}^tA$ *είναι αντιστρέψιμος. Σύμφωνα με την ισοδυναμία των (α΄) και (β΄), που μόλις αποδείξαμε, ο* ${}^tA$ *είναι αντιστρέψιμος, αν και μόνο αν, οι στήλες του είναι* $\mathbb{K}$*-γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα τού χώρου* $\mathbb{K}^n$. *Αλλά οι στήλες τού* ${}^tA$ *είναι οι γραμμές τού* A *και γι΄ αυτό οι στήλες τού* ${}^tA$ *είναι* $\mathbb{K}$*-γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα τού* $\mathbb{K}^n$, *αν και μόνο αν, οι γραμμές τού* A *είναι* $\mathbb{K}$*-γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα τού* $\mathbb{K}^n$. *Αυτό αποδεικνύει την ισοδυναμία των (α΄) και (γ΄).* □

Άσκηση 11. *Να εξεταστεί αν τα διανύσματα* $(3, 5, -4)$, $(-3, -2, 4)$, $(6, 1, -8)$ *τού* $\mathbb{R}^3$ *είναι* $\mathbb{R}$*-γραμμικώς ανεξάρτητα ή όχι.*

Λύση. *Σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση είναι αρκετό να εξετάσουμε το, αν ο* 3×3 *πίνακας* A, *που έχει ως γραμμές (ή στήλες), τα τρία αυτά διανύσματα είναι αντιστρέψιμος ή όχι. ΄Εστω λοιπόν ότι*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

Επειδή η ορίζουσα $\det A = 0$, *ο πίνακας* A *δεν είναι αντιστρέψιμος και τα* $(3, 5, -4)$, $(-3, -2, 4)$, $(6, 1, -8)$ *είναι* $\mathbb{R}$*-γραμμικώς εξαρτημένα.* □

Ενότητα 5

Άσκηση 1. *Να προσδιοριστεί μια βάση και η διάσταση του $\mathbb{R}$-υποχώρου*

$$\mathcal{V} = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid c = a-b,\ d = a+b\} \subseteq \mathbb{R}^4 .$$

Λύση. *Έχουμε*

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid c = a-b,\ d = a+b\} \\
&= \{(a,b,a-b,a+b) \in \mathbb{R}^4 \mid a,b \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(a,0,a,a) + (0,b,-b,b) \in \mathbb{R}^4 \mid a,b \in \mathbb{R}\} \\
&= \{a(1,0,1,1) + b(0,1,-1,1) \in \mathbb{R}^4 \mid a,b \in \mathbb{R}\} \\
&= \langle (1,0,1,1), (0,1,-1,1) \rangle
\end{aligned}$$

και άρα τα διανύσματα $\overrightarrow{\varepsilon_1} = (1,0,1,1)$ *και* $\overrightarrow{\varepsilon_2} = (0,1,-1,1)$ *παράγουν τον υπόχωρο* $\mathcal{V}$. *Έστω*

$$\begin{aligned}
\lambda_1(1,0,1,1) + \lambda_2(0,1,-1,1) = (0,0,0,0) \quad &\Rightarrow \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2) = (0,0,0,0) \\
&\Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0
\end{aligned}$$

Άρα τα διανύσματα $\{\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα και αφού δείξαμε ότι παράγουν τον χώρο* $\mathcal{V}$ *έπεται ότι αποτελούν μια βάση του* $\mathcal{V}$. *Συνεπώς έχουμε* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = 2$. □

Άσκηση 2. *Να προσδιοριστούν όλες οι τιμές του* $a \in \mathbb{R}$, *για τις οποίες το σύνολο των διανυσμάτων*

$$\{\overrightarrow{x} = (a^2,0,1), \overrightarrow{y} = (0,a,2), \overrightarrow{z} = (1,0,1)\}$$

αποτελεί βάση του $\mathbb{R}^3$.

Λύση. *Έχουμε*

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και εύκολα υπολογίζουμε ότι $\det A = a(a^2-1)$. *Τότε για* $a \neq 0,-1,1$ *η ορίζουσα* $\det A \neq 0$ *και άρα τα διανύσματα* $\overrightarrow{x} = (a^2,0,1)$, $\overrightarrow{y} = (0,a,2)$ *και* $\overrightarrow{z} = (1,0,1)$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

Υπενθύμιση: Έστω $\mathcal{E}$ *ένας* $\mathbb{K}$-*διανυσματικός χώρος με* $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$. *Τότε κάθε υποσύνολο* $\mathcal{B}$ *του* $\mathcal{E}$ *το οποίο είναι γραμμικά ανεξάρτητο με* $|\mathcal{B}| = n$ *αποτελεί βάση του* $\mathcal{E}$.

Επόμένως για $a \neq 0,-1,1$ *το σύνολο των διανυσμάτων* $\{\overrightarrow{x} = (a^2,0,1), \overrightarrow{y} = (0,a,2), \overrightarrow{z} = (1,0,1)\}$ *αποτελεί βάση του* $\mathbb{R}^3$. □

Άσκηση 3. *Έστω P ένας σταθερός αντιστρέψιμος 3×3 πίνακας πραγματικών αριθμών. Θεωρούμε το ακόλουθο σύνολο:*

$$\mathcal{V}(P) = \{A \in \mathsf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \mid \text{ο πίνακας } \ P^{-1}AP \ \text{ είναι διαγώνιος}\}$$

Να δείξετε ότι το σύνολο $\mathcal{V}(P)$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathsf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ και ακολούθως να βρείτε μια βάση του.

Λύση. *Έστω $A \in \mathcal{V}(P)$, δηλαδή*

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} A &= P \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P(\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix})P^{-1} \\ &= \alpha(P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}) + \beta(P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}) + \gamma(P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}) \end{aligned}$$

και άρα έπεται ότι

$$\mathcal{V}(P) = \langle P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \rangle$$

Συνεπώς, το σύνολο $\mathcal{V}(P)$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathsf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Επίσης, τα διανύσματα

$$\overrightarrow{\Gamma} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, \ \overrightarrow{\Delta} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, \ \overrightarrow{\Sigma} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

παράγουν τον υπόχωρο $\mathcal{V}(P)$. Έστω $\lambda_1\overrightarrow{\Gamma} + \lambda_2\overrightarrow{\Delta} + \lambda_3\overrightarrow{\Sigma} = \overrightarrow{0}$ όπου $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Τότε

$$P(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix})P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και αν πολλάπλασιάσουμε την παραπάνω σχέση από αριστερά με P^{-1} και δεξιά με P έχουμε

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Άρα, τα διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma}, \overrightarrow{\Delta}, \overrightarrow{\Sigma}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και αφού παράγουν τον $\mathcal{V}(P)$ συνεπάγεται ότι το σύνολο $\{\overrightarrow{\Gamma}, \overrightarrow{\Delta}, \overrightarrow{\Sigma}\}$ αποτελεί βάση του υπόχωρου $\mathcal{V}(P)$. $\square$

Άσκηση 4. *Έστω M ένας σταθερός 2×2 πίνακας πραγματικών αριθμών. Να δείξετε ότι το σύνολο*

$$\mathcal{V}(M) = \{A \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$$

όλων των 2×2 πινάκων οι οποίοι μετατίθενται με τον M είναι ένας υπόχωρος του $\mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Αν

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

να βρείτε μια βάση του $\mathcal{V}(M)$.

Λύση. *Θα δείξουμε με τον ορισμό ότι το σύνολο*

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(M) &= \{A \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid AM = MA\} \\ &= \{A \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid AM - MA = 0\} \end{aligned}$$

είναι ένας υπόχωρος του $\mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Έχουμε:

(1) *Το σύνολο $\mathcal{V}(M) \neq \emptyset$ αφού ο μηδενικός πίνακας $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{V}(M)$.*

(2) *Έστω $A_1, A_2 \in \mathcal{V}(M)$. Τότε*

$$\begin{aligned} (A_1 + A_2)M - M(A_1 + A_2) &= A_1M + A_2M - MA_1 - MA_2 \\ &= (A_1M - MA_1) + (A_2M - MA_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

και άρα $A_1 + A_2 \in \mathcal{V}(M)$.

(3) *Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και $A \in \mathcal{V}(M)$. Τότε*

$$\begin{aligned} (\lambda A)M - M(\lambda A) &= \lambda AM - \lambda MA \\ &= \lambda(AM - MA) \\ &= \lambda 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

και άρα $\lambda A \in \mathcal{V}(M)$.

Συνεπώς, το σύνολο $\mathcal{V}(M)$ είναι $\mathbb{R}$-υπόχωρος του $\mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Στην συνέχεια θα βρούμε μια βάση του $\mathcal{V}(M)$ στην περίπτωση που $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Έστω $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ έτσι ώστε

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3b + 2c & -2a + 2d \\ 3d - 3a & -2c - 3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = d \\ b = -\frac{2}{3}c \end{cases}$$

Επομένως, έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(M) &= \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid a = d, b = -\frac{2}{3}c\ \} \\ &= \{\begin{pmatrix} a & -\frac{2}{3}c \\ c & a \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid a, c \in \mathbb{R}\ \} \\ &= \{a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid a, c \in \mathbb{R}\ \} \\ &= \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle \end{aligned}$$

και άρα έχουμε ότι οι πίνακες $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ παράγουν τον υπόχωρο $\mathcal{V}(M)$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το σύνολο $\{\Gamma, \Delta\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα αποτελεί μια βάση του $\mathcal{V}(M)$. □

Ενότητα 6

Άσκηση 1. *Να βρεθεί μια βάση του υπόχωρου* $\mathcal{V} = \langle \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \rangle$ *ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα*

$$\vec{x} = (1,1,1,a), \quad \vec{y} = (1,0,1,b), \quad \vec{z} = (-2,2,-2,c) \;\in\; \mathbb{R}^4$$

όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Λύση. *Έστω* $\lambda_1\vec{x} + \lambda_2\vec{y} + \lambda_3\vec{z} = \vec{0}$ *με* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. *Τότε*

$$\begin{aligned} \lambda_1(1,1,1,a) + \lambda_2(1,0,1,b) + \lambda_3(-2,2,-2,c) &= (0,0,0,0) \\ \Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3, \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c) &= (0,0,0,0) \end{aligned}$$

και λύνοντας βρίσκουμε ότι $\lambda_2 = -2\lambda_1$ *και* $\lambda_1 = -2\lambda_3$. *Άρα, θέτοντας* $\lambda_3 = k$ *με* $k \in \mathbb{R}$ *έχουμε τη γενική λύση* $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-2k, 4k, k)$. *Τότε έχουμε* $-2ka + 4kb + kc = 0 \Rightarrow k(-2a + 4b + c) = 0$. *Διακρίνουμε τις παρακάτω δυο περιπτώσεις:*

(1) *Έστω* $-2a + 4b + c \neq 0$. *Τότε* $k = 0$ *και άρα* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. *Συνεπώς, το σύνολο* $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα αποτελεί βάση του* $\mathcal{V}$. *Επομένως* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = 3$

(2) *Έστω* $-2a + 4b + c = 0$. *Τότε* $k \in \mathbb{R}$ *και τα διανύσματα* $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ *είναι γραμμικά εξαρτημένα. Για* $k = 1$ *έχουμε τη σχέση γραμμικής εξάρτησης:* $-2\vec{x} + 4\vec{y} + \vec{z} = \vec{0} \Rightarrow \vec{z} = -2\vec{x} + 4\vec{y}$. *Τότε*

$$\langle \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \Rightarrow \mathcal{V} = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

Εύκολα δείχνουμε ότι το σύνολο $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα αποτελεί βάση του* $\mathcal{V}$. *Συνεπώς, στην περίπτωση αυτή έχουμε* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = 2$. $\square$

Άσκηση 2. *Να βρεθεί μια βάση του υπόχωρου* $\mathcal{V} = \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ *ο οποίος παράγεται απο τα διανύσματα*

$$\vec{u} = (0,1,2), \quad \vec{v} = (0,-1,2), \quad \vec{w} = (0,3,4)$$

η οποία να επεκταθεί σε μια βάση του $\mathbb{R}^3$.

Λύση. *Έστω* $\lambda_1\vec{u} + \lambda_2\vec{v} + \lambda_3\vec{w} = \vec{0}$ *με* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. *Τότε*

$$\begin{aligned} \lambda_1(0,1,2) + \lambda_2(0,-1,2) + \lambda_3(0,3,4) &= (0,0,0) \\ \Rightarrow (0, \lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3, 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3) &= (0,0,0) \end{aligned}$$

και άρα καταλήγουμε στο σύστημα

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

όπου βρίσκουμε ότι $\lambda_1 = -\frac{5}{2}\lambda_3$ *και* $\lambda_2 = \frac{1}{2}\lambda_3$. *Συνεπώς, θέτοντας* $\lambda_3 = k$ *με* $k \in \mathbb{R}$ *έχουμε τη γενική λύση* $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-\frac{5}{2}k, \frac{1}{2}k, k)$ *και άρα τα διανύσματα* $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ *είναι γραμμικά εξαρτημένα. Για* $k = 2$ *έχουμε* $\lambda_1 = -5, \lambda_2 = 1$ *και* $\lambda_3 = 2$. *Άρα μια σχέση γραμμικής εξάρτησης είναι* $-5\vec{u} + \vec{v} + 2\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = 5\vec{u} - 2\vec{w}$. *Τότε*

$$\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \Rightarrow \mathcal{V} = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$$

Εύκολα δείχνουμε ότι το σύνολο $\{\vec{u}, \vec{w}\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο και αφού παράγει τον* $\mathcal{V}$ *έπεται ότι αποτελεί βάση του* $\mathcal{V}$. *Επομένως* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = 2$. *Στην συνέχεια θέλουμε να επεκτείνουμε τη βάση του* $\mathcal{V}$ *που βρήκαμε σε μια βάση του* $\mathbb{R}^3$. *Αφού* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = 2$ *ψάχνουμε ένα διάνυσμα* $\vec{x} = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ *έτσι ώστε το σύνολο* $\{\vec{u}, \vec{w}, \vec{x}\}$ *να είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Θέτουμε* $\vec{x} = (1, 0, 0)$. *Τότε*

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

και άρα το σύνολο $\{\vec{u}, \vec{w}, \vec{x}\}$ *αποτελεί βάση του* $\mathbb{R}^3$. $\square$

Άσκηση 3. *Έστω* $\mathcal{E}$ *ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος* $\mathbb{K}$. *Υποθέτουμε ότι το σύνολο*

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_i, \cdots, \vec{e}_n\}$$

είναι βάση του $\mathcal{E}$.

(1) *Να δείξετε ότι τότε το σύνολο*

$$\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_i + \lambda \vec{e}_j, \cdots, \vec{e}_n\}$$

είναι βάση του $\mathcal{E}$, *για κάθε* $\lambda \in \mathbb{K}$ *και* $i \neq j$.

(2) *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α′) *Το σύνολο*

$$\mathcal{D} = \{\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \cdots, \vec{e}_{n-1} + \vec{e}_n, \vec{e}_n + \vec{e}_1\}$$

είναι βάση του $\mathcal{E}$.

(β′) *Το* n *είναι περιττός.*

Λύση. (1) *Το σύνολο* $\mathcal{C}$ *είναι βάση του* $\mathcal{E}$ *αν το* $\mathcal{C}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο διότι* $|\mathcal{B}| = |\mathcal{C}|$. *Έστω*

$$\begin{aligned} \lambda_1 \vec{e}_1 + \cdots + \lambda_{i-1} \vec{e}_{i-1} + \lambda_i (\vec{e}_i + \lambda \vec{e}_j) + \lambda_{i+1} \vec{e}_{i+1} + \cdots + \lambda_n \vec{e}_n &= \vec{0} \\ \Rightarrow \lambda_1 \vec{e}_1 + \cdots + \lambda_{i-1} \vec{e}_{i-1} + \lambda_i \vec{e}_i + \lambda_{i+1} \vec{e}_{i+1} + \cdots + (\lambda_j + \lambda_i \lambda) \vec{e}_j + \cdots + \lambda_n \vec{e}_n &= \vec{0} \end{aligned}$$

και αφού το σύνολο $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο έχουμε*

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{i-1} = \lambda_i = \lambda_{i+1} = \cdots = \lambda_j + \lambda_i \lambda = \cdots = \lambda_n = 0$$

και άρα έπεται ότι $\lambda_i = 0$ *για κάθε* $i = 1, \cdots, n$. *Συνεπώς, το σύνολο* $\mathcal{C}$ *είναι βάση του* $\mathcal{E}$.

(2) *Εξετάζουμε πότε το σύνολο* $\mathcal{D}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Έστω*

$$\begin{aligned} \lambda_1(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + \lambda_2(\vec{e}_2 + \vec{e}_3) + \cdots + \lambda_{n-1}(\vec{e}_{n-1} + \vec{e}_n) + \lambda_n(\vec{e}_n + \vec{e}_1) &= \vec{0} \\ \Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_n)\vec{e}_1 + (\lambda_1 + \lambda_2)\vec{e}_2 + \cdots + (\lambda_{n-2} + \lambda_{n-1})\vec{e}_{n-1} + (\lambda_{n-1} + \lambda_n)\vec{e}_n &= \vec{0} \end{aligned}$$

και άρα καταλήγουμε στο παρακάτω σύστημα:

$$(\Sigma): \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_n = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \qquad \vdots \\ \lambda_{n-2} + \lambda_{n-1} = 0 \\ \lambda_{n-1} + \lambda_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_n = -\lambda_1 = (-1)^2 \lambda_2 = \cdots = (-1)^{n-1} \lambda_{n-1} = (-1)^n \lambda_n$$

Επομένως έχουμε $\lambda_n = (-1)^n \lambda_n$.

$(\beta') \Rightarrow (\alpha')$: *Αν το* n *είναι περιττός, τότε* $\lambda_n = -\lambda_n \Rightarrow \lambda_n = 0$ *και άρα* $\lambda_i = 0$ *για κάθε* $i = 1, \cdots, n$. *Συνεπώς, το σύνολο* $\mathcal{D}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα βάση του* $\mathcal{E}$.

$(\alpha') \Rightarrow (\beta')$: *Υποθέτουμε ότι το n είναι άρτιος. Τότε $\lambda_n = \lambda_n$ και άρα για $\lambda_1 = k \in \mathbb{R}$ έχουμε τη γενική λύση του (Σ):*

$$\lambda_1 = k, \lambda_2 = -k, \lambda_3 = k, \cdots, \lambda_{n-1} = k, \lambda_n = -k$$

και άρα για $k = 1$ έχουμε την ακόλουθη σχέση γραμμικής εξάρτησης:

$$1(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + (-1)(\vec{e}_2 + \vec{e}_3) + \cdots + 1(\vec{e}_{n-1} + \vec{e}_n) + (-1)(\vec{e}_n + \vec{e}_1) = \vec{0}$$

Επομένως, αποδείξαμε ότι αν το n είναι άρτιος τότε το σύνολο $\mathcal{D}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο και άρα έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Άσκηση 4. *Έστω τα ακόλουθα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$:*

$$\vec{x}_1 = (1,1,0,\cdots,0), \quad \vec{x}_2 = (0,1,1,0\cdots,0), \quad \cdots, \quad \vec{x}_n = (1,0\cdots,0,1)$$

Να βρεθεί η διάσταση $\dim_{\mathbb{R}}\langle\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_n\rangle$ του υπόχωρου ο οποίος παράγεται απο τα διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$.

Λύση. *Έστω*

$$\begin{aligned} \lambda_1(1,1,0,\cdots,0) + \lambda_2(0,1,1,0,\cdots,0) + \cdots + \lambda_{n-1}(0,0,\cdots,1,1) + \lambda_n(1,0,\cdots,0,1) &= (0,\cdots,0) \\ \Rightarrow (\lambda_1+\lambda_n, \lambda_2+\lambda_3, \cdots, \lambda_{n-2}+\lambda_{n-1}, \lambda_{n-1}+\lambda_n) &= (0,\cdots,0) \end{aligned}$$

και άρα έχουμε το σύστημα:

$$(\Sigma): \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_n = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \qquad \vdots \\ \lambda_{n-2} + \lambda_{n-1} = 0 \\ \lambda_{n-1} + \lambda_n = 0 \end{cases}$$

Από την Άσκηση 3 έχουμε ότι το σύστημα (Σ) έχει μόνο τη μηδενική λύση αν και μόνο αν το n είναι περιττός. Άρα, αν το n είναι περιττός, τότε το σύνολο $\{\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα αποτελεί βάση του $\langle\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_n\rangle$. Συνεπώς στην περίπτωση που το n είναι περιττός έχουμε $\dim_{\mathbb{R}}\langle\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_n\rangle = n$ και άρα $\langle\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_n\rangle = \mathbb{R}^n$, δηλαδή το σύνολο $\{\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_n\}$ αποτελεί βάση του $\mathbb{R}^n$.

Αν το n είναι άρτιος, τότε η γενική λύση του (Σ) είναι:

$$\lambda_1 = k, \lambda_2 = -k, \cdots, \lambda_{n-1} = k, \lambda_n = -k$$

και άρα για $k = 1$ έχουμε τη παρακάτω σχέση γραμμικής εξάρτησης:

$$\vec{x}_1 - \vec{x}_2 + \vec{x}_3 - \cdots + \vec{x}_{n-1} - \vec{x}_n = \vec{0} \Rightarrow \vec{x}_n = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 + \vec{x}_3 - \cdots + \vec{x}_{n-1}$$

Συνεπώς έχουμε

$$\langle\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_{n-1},\vec{x}_n\rangle = \langle\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_{n-1}\rangle$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι τα διανύσματα $\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_{n-1}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επομένως, το σύνολο $\{\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_{n-1}\}$ αποτελεί βάση του $\langle\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_n\rangle$ και άρα $\dim_{\mathbb{R}}\langle\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_n\rangle = n-1$. $\square$

Ενότητα 7

Άσκηση 1. *Έστω* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ *και*

$$\mathcal{V} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0\}$$

Να βρεθεί η διάσταση $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}$.

Λύση. *Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:*

(1) *Αν τα* $\alpha_i = 0$ *για κάθε* $i = 1, 2, \cdots, n$ *τότε προφανώς* $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ *και άρα* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = n$.

(2) *Έστω ότι* $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \neq (0, 0, \cdots, 0)$. *Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι* $\alpha_1 \neq 0$ *και τότε* $x_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}x_2 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}x_n$. *Έχουμε:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \Big\{(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}x_2 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}x_n, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i \in \mathbb{R}\Big\} \\
&= \Big\{x_2(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, 1, 0, \cdots, 0) + x_3(-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}, 0, 1, \cdots, 0) + \cdots + x_n(-\frac{\alpha_n}{\alpha_1}, 0, \cdots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i \in \mathbb{R}\Big\} \\
&= \Big\langle(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, 1, 0, \cdots, 0),\ (-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}, 0, 1, \cdots, 0),\ \cdots,\ (-\frac{\alpha_n}{\alpha_1}, 0, \cdots, 0, 1)\Big\rangle
\end{aligned}$$

Θέτουμε $\vec{\epsilon}_1 = (-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, 1, 0, \cdots, 0)$, $\vec{\epsilon}_2 = (-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}, 0, 1, \cdots, 0)$,$\cdots$, $\vec{\epsilon}_{n-1} = (-\frac{\alpha_n}{\alpha_1}, 0, \cdots, 0, 1)$. *Άρα από την παραπάνω περιγραφή του* $\mathcal{V}$ *έχουμε ότι τα διανύσματα* $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \cdots, \vec{\epsilon}_{n-1}$ *παράγουν τον* $\mathcal{V}$. *Έστω* $\lambda_1\vec{\epsilon}_1 + \lambda_2\vec{\epsilon}_2 + \cdots + \lambda_{n-1}\vec{\epsilon}_{n-1} = \vec{0}$ *με* $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$. *Τότε έπεται εύκολα ότι* $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$ *και άρα τα διανύσματα* $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \cdots, \vec{\epsilon}_{n-1}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επομένως, το σύνολο* $\{\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \cdots, \vec{\epsilon}_{n-1}\}$ *αποτελεί βάση του* $\mathcal{V}$ *και άρα* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = n - 1$. □

Άσκηση 2. *Έστω* $\vec{x} = (2, 1, 4, 3), \vec{y} = (2, 1, 2, 0) \in \mathbb{R}^4$. *Να δειχθεί ότι το σύνολο διανυσμάτων* $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο και να βρεθούν δυο διανύσματα* $\vec{z}, \vec{w} \in \mathbb{R}^4$ *έτσι ώστε το σύνολο* $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{w}\}$ *να αποτελεί βάση του* $\mathbb{R}^4$.

Λύση. *Έστω* $\lambda_1\vec{x} + \lambda_2\vec{y} = \vec{0}$ *με* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. *Τότε*

$$\begin{aligned}
\lambda_1(2, 1, 4, 3) + \lambda_2(2, 1, 1, 0) &= (0, 0, 0, 0) \\
\Rightarrow (2\lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2, 4\lambda_1 + \lambda_2, 3\lambda_1) &= (0, 0, 0, 0)
\end{aligned}$$

και άρα άμεσα θα έχουμε ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. *Επομένως, το σύνολο διανυσμάτων* $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Επειδή $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4 = 4$, *ψάχνουμε δυο διανύσματα* $\vec{z}, \vec{w} \in \mathbb{R}^4$ *έτσι ώστε το σύνολο* $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{w}\}$ *να είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα βάση του* $\mathbb{R}^4$. *Αν* $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ *και* $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ *τότε θα πρέπει*

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix} \neq 0$$

Θέτουμε $\vec{z} = (1,0,0,0)$ *και* $\vec{w} = (0,1,0,0)$. *Τότε*

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

Συνεπώς το σύνολο $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{w}\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα βάση του* $\mathbb{R}^4$. □

Άσκηση 3. *Να βρεθεί μια βάση του υπόχωρου* $\langle A, B, \Gamma, \Delta\rangle$ *ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

του $\mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, *και ακολούθως η βάση αυτή να συμπληρωθεί σε μια βάση του* $\mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Λύση. *Έστω* $\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 \Gamma + \lambda_4 \Delta = 0$ *με* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. *Τότε*

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 & 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + 3\lambda_4 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 + 3\lambda_4 & 4\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και άρα έχουμε το σύστημα:

$$(\Sigma): \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \\ 4\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

Έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 3\Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_4 \to \Gamma_4 - 4\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_4 \to \Gamma_4 - 3\Gamma_2]{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_4 \to \Gamma_4 - 3\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \to \frac{1}{2}\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και άρα καταλήγουμε στο σύστημα:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 - 3\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \end{cases} \implies \lambda_3 = \lambda_4, \ \lambda_2 = 2\lambda_3, \ \lambda_1 = -2\lambda_3.$$

Θέτουμε $\lambda_3 = k \in \mathbb{R}$. *Τότε η γενική λύση του* (Σ) *είναι* $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (-2k, 2k, k, k)$. *Επομένως, για* $k = 1$ *έχουμε τη παρακάτω σχέση γραμμικής εξάρτησης:*

$$-2A + 2B + \Gamma + \Delta = 0 \Rightarrow A = B + \frac{1}{2}\Gamma + \frac{1}{2}\Delta$$

και άρα επειδή το A *είναι γραμμικός συνδυασμός των* B, Γ, Δ, *έπεται ότι τα* B, Γ, Δ *παράγουν τον ίδιο υπόχωρο με τα* A, B, Γ, Δ:

$$\langle A, B, \Gamma, \Delta \rangle = \langle B, \Gamma, \Delta \rangle$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι τα διανύσματα B, Γ, Δ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα το σύνολο $\{B, \Gamma, \Delta\}$ αποτελεί βάση του υπόχωρου $\langle A, B, \Gamma, \Delta\rangle$. Συνεπώς έχουμε

$$\dim_{\mathbb{R}}\langle A, B, \Gamma, \Delta\rangle = \dim_{\mathbb{R}}\langle B, \Gamma, \Delta\rangle = 3$$

Στη συνέχεια θέλουμε να συμπληρώσουμε τη παραπάνω βάση του υπόχωρου $\langle B, \Gamma, \Delta\rangle$ σε μια βάση του $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Επομένως, χρειάζομαστε άλλον ένα πίνακα X έτσι ώστε το σύνολο $\{X, B, \Gamma, \Delta\}$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Θεωρούμε το πίνακα $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ και έστω $\lambda_1 X + \lambda_2 B + \lambda_3 \Gamma + \lambda_4 \Delta = 0$ με $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Τότε

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και άρα

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_2 - \lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \\ 3\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

Από τη δεύτερη και τρίτη εξίσωση βρίσκουμε ότι $\lambda_2 = 0$. Αντικαθιστώντας στην τελευταία έχουμε $\lambda_3 + \lambda_4 = 0$ και άρα από την πρώτη έπεται ότι $\lambda_1 = 0$. Συνεπώς έχουμε ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ και άρα το σύνολο $\{X, B, \Gamma, \Delta\}$ αποτελεί βάση του $\mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. □

Άσκηση 4. *Έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5\}$ μια βάση του διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$. Να βρεθεί η διάσταση $\dim_{\mathbb{K}}\langle \vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3, \vec{A}_4\rangle$ του υπόχωρου ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα*

$$\vec{A}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3 + 3\vec{e}_4 + \vec{e}_5\ ,$$
$$\vec{A}_2 = 2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 + 4\vec{e}_4 + 8\vec{e}_5\ ,$$
$$\vec{A}_3 = 6\vec{e}_1 + 17\vec{e}_2 - 7\vec{e}_3 + 10\vec{e}_4 + 22\vec{e}_5\ ,$$
$$\vec{A}_4 = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4\ .$$

Λύση. *Έχουμε*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -3 & 4 & 8 \\ 6 & 17 & -7 & 10 & 22 \\ 1 & 3 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 6\Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 17 & -8 & 16 \\ 1 & 3 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 17 & -8 & 16 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_2]{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 5\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \frac{1}{2}\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ο τελευταίος πίνακας περιγράφει τις συνιστώσες των διανυσμάτων $\vec{A}_1, \vec{A}'_2, \vec{A}''_3$ τα οποία προέκυψαν από τα $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3, \vec{A}_4$ με χρήση πράξεων επί των συνιστωσών τους στη βάση $\mathcal{B}$:

(1) *Οι δύο πρώτες γραμμοπράξεις μας ορίζουν τα διανύσματα:*

$$\vec{A}'_2 = \vec{A}_2 - 2\vec{A}_1 = \vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 - 2\vec{e}_4 + 6\vec{e}_5 \quad \text{και} \quad \vec{A}'_3 = \vec{A}_3 - 6\vec{A}_1 = 5\vec{e}_2 + 17\vec{e}_3 - 8\vec{e}_4 + 16\vec{e}_5$$

(2) *Η τρίτη γραμμοπράξη μας ορίζει το διάνυσμα*

$$\vec{A}'_4 = \vec{A}_4 - \vec{A}_1 = \vec{e}_2 + 1\vec{e}_3 - \vec{e}_4 - \vec{e}_5$$

(3) *Η τέταρτη και η πέμπτη γραμμοπράξη μας ορίζουν τα διανύσματα*

$$\vec{A}''_3 = \vec{A}'_3 - 5\vec{A}'_2 = -8\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4 - 14\vec{e}_5 \quad \text{και} \quad \vec{A}''_4 = \vec{A}'_4 - \vec{A}'_2 = -4\vec{e}_3 + \vec{e}_4 - 7\vec{e}_5$$

(4) *Η έκτη γραμμοπράξη μας ορίζει το διάνυσμα*

$$\vec{A}_4''' = \vec{A}_4'' - \frac{1}{2}\vec{A}_3'' = \vec{0}$$

Επομένως επειδή τα διανύσματα $\vec{A}_1, \vec{A}_2', \vec{A}_3''$ προέκυψαν ως γραμμικοί συνδυασμοί των διανυσμάτων $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3, \vec{A}_4$, έπεται άμεσα ότι θα παράγουν τον ίδιο υπόχωρο:

$$\langle \vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3, \vec{A}_4 \rangle = \langle \vec{A}_1, \vec{A}_2', \vec{A}_3'' \rangle$$

όπου:

$$\vec{A}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3 + 3\vec{e}_4 + \vec{e}_5, \qquad \vec{A}_2' = \vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 - 2\vec{e}_4 + 6\vec{e}_5, \qquad \vec{A}_3'' = -8\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4 - 14\vec{e}_5$$

Έστω $\lambda_1\vec{A}_1 + \lambda_2\vec{A}_2' + \lambda_3\vec{A}_3'' = \vec{0}$ με $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \lambda_1(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3 + 3\vec{e}_4 + \vec{e}_5) + \lambda_2(\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 - 2\vec{e}_4 + 6\vec{e}_5) + \lambda_3(-8\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4 - 14\vec{e}_5) &= \vec{0} \\ \Rightarrow \lambda_1\vec{e}_1 + (2\lambda_1 + \lambda_2)\vec{e}_2 + (-4\lambda_1 + 5\lambda_2 - 8\lambda_3)\vec{e}_3 + (3\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3)\vec{e}_4 + (\lambda_1 + 6\lambda_2 - 14\lambda_3)\vec{e}_5 &= \vec{0} \end{aligned}$$

και αφού το σύνολο $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5\}$ είναι βάση του $\mathcal{E}$ έπεται ότι

$$\lambda_1 = 0, \;\; 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \;\; -4\lambda_1 + 5\lambda_2 - 8\lambda_3 = 0, \;\; 3\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0, \;\; \lambda_1 + 6\lambda_2 - 14\lambda_3 = 0.$$

Από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ και επομένως τα διανύσματα $\vec{A}_1, \vec{A}_2', \vec{A}_3''$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Συνεπώς, το σύνολο $\{\vec{A}_1, \vec{A}_2', \vec{A}_3''\}$ είναι βάση του υπόχωρου $\langle \vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3, \vec{A}_4 \rangle$ και άρα

$$\dim_{\mathbb{R}}\langle \vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3, \vec{A}_4 \rangle = \dim_{\mathbb{R}}\langle \vec{A}_1, \vec{A}_2', \vec{A}_3'' \rangle = 3 \qquad \square$$

Ενότητα 8

Άσκηση 1. *Έστω η γραμμική απεικόνιση* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *η οποία ορίζεται από τη σχέση:*

$$f(x,y,z) = (x+2y, y-z, 2x+4y)$$

Να υπολογιστεί μια βάση του πυρήνα $\mathrm{Ker}(f)$ *και μια βάση της εικόνας* $\mathrm{Im}(f)$ *της* f.

Λύση. *Έστω* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. *Τότε:* $(x,y,z) \in \mathrm{Ker}\, f$ *αν και μόνον αν:*

$$f(x,y,z) = (0,0,0) \iff (x+2y, y-z, 2x+4y) = (0,0,0) \iff x = -2y \;\text{ και }\; y = z$$

Συνεπώς ο πυρήνας της f *είναι*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}\, f &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = (0,0,0)\}\\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -2y \;\text{ και }\; y = z\}\\
&= \{(-2y,y,y) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R}\}\\
&= \{y(-2,1,1) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R}\}\\
&= \langle(-2,1,1)\rangle
\end{aligned}$$

και αφού $(-2,1,1) \neq (0,0,0)$ *έπεται ότι το διάνυσμα* $(-2,1,1)$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Επομένως το σύνολο* $\{(-2,1,1)\}$ *αποτελεί βάση του* $\mathrm{Ker}\, f$.

Επειδή το σύνολο $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1,0,0),\ \vec{e}_2 = (0,1,0),\ \vec{e}_3 = (0,0,1)\}$, *ως βάση του* $\mathbb{R}^3$, *παράγει τον* $\mathbb{R}^3$, *έπεται ότι το σύνολο* $f(\mathcal{B}) = \{f(\vec{e}_1),\ f(\vec{e}_2),\ f(\vec{e}_3)\}$ *παράγει την εικόνα* $\mathrm{Im}\, f$ *της* f. *Έτσι:*

$$\mathrm{Im}\, f = \langle f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\rangle = \langle(1,0,2),(2,1,4),(0,-1,0)\rangle$$

και

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 4\\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς

$$\mathrm{Im}\, f = \langle(1,0,2),\ (2,1,4),\ (0,-1,0)\rangle = \langle(1,0,2),\ (0,1,0)\rangle$$

Διαφορετικά: εξετάζουμε αν τα παραπάνω διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Έστω

$$\kappa(1,0,2) + \lambda(2,1,4) + \mu(0,-1,0) = (0,0,0) \;\Rightarrow\; \kappa + 2\lambda = 0 \;\text{ και }\; \lambda - \mu = 0$$

Το σύστημα αυτό έχει ως γενική λύση: $(-2\lambda, \lambda, \lambda)$ *και επομένως, για* $\lambda = 1$, *θα έχουμε μια σχέση γραμμικής εξάρτησης:*

$$-2(1,0,2) + (2,1,4) + (0,-1,0) = (0,0,0)$$

από την οποία βλέπουμε ότι $(2,1,4) \in \langle(1,0,2),\ (0,1,0)\rangle$ *και άρα όπως και παραπάνω έχουμε:* $\mathrm{Im}\, f = \langle(1,0,2),\ (2,1,4),\ (0,-1,0)\rangle = \langle(1,0,2),\ (0,1,0)\rangle$.

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι τα διανύσματα $(1,0,2),(0,1,0)$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Άρα το σύνολο* $\{(1,0,2),(0,1,0)\}$ *αποτελεί βάση της εικόνας* $\mathrm{Im}\, f$ *της* f. □

Άσκηση 2. *Να εξεταστεί αν η γραμμική απεικόνιση*

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad f(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, x_1 + x_2, \cdots, x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

είναι ισομορφισμός.

Λύση. *Για να είναι η γραμμική απεικόνιση f ισομορφισμός πρέπει να είναι μονομορφισμός και επιμορφισμός. Δηλαδή πρέπει $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$ και $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^n$. Έχουμε:*

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker} f &= \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \cdots, x_n) = (0, \cdots, 0)\} \\
&= \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1, x_1 + x_2, \cdots, x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = (0, 0, \cdots, 0)\} \\
&= \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0,\ x_1 + x_2 = 0, \cdots, x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\} \\
&= \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0\} \\
&= \{(0, \cdots, 0)\}
\end{aligned}$$

και άρα η γραμμική απεικόνιση f είναι μονομορφισμός. Έστω $(y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Τότε υπάρχει το διάνυσμα $(y_1, y_2 - y_1, y_3 - y_2, \cdots, y_n - y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ έτσι ώστε

$$\begin{aligned}
f(y_1, y_2 - y_1, y_3 - y_2, \cdots, y_n - y_{n-1}) &= (y_1, y_1 + y_2 - y_1, \cdots, y_1 + y_2 - y_1 + y_3 - y_2 + \cdots y_n - y_{n-1}) \\
&= (y_1, y_2, \cdots, y_n)
\end{aligned}$$

και άρα η f είναι επιμορφισμός. Συνεπώς, η γραμμική απεικόνιση f είναι ισομορφισμός. □

Παρατήρηση 1. *Έστω $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ δυο $\mathbb{K}$-διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης και έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση. Τότε έχουμε την Θεμελιώδη Εξίσωση των Διαστάσεων:*

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f$$

Ας υποθέσουμε ότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$. Τότε έχουμε τα ακόλουθα:

(1) *Αν η f είναι μονομορφισμός, τότε η f είναι ισομορφισμός.*
 Αφού η f είναι μονομορφισμός έχουμε $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$ και άρα $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f = 0$. Επομένως από την εξίσωση των διαστάσεων έχουμε ότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f$. Άρα έχουμε

$$\left\{\begin{array}{l} \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f \\ \operatorname{Im} f\ :\ \textit{υπόχωρος του } \mathcal{F} \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{Im} f = \mathcal{F} \quad \Longrightarrow \quad f\ :\ \textit{επιμορφισμός}$$

 Συνεπώς η γραμμική απεικόνιση f είναι ισομορφισμός.

(2) *Αν η f είναι επιμορφισμός, τότε η f είναι ισομορφισμός.*
 Αφού η f είναι επιμορφισμός έχουμε $\operatorname{Im} f = \mathcal{F}$ και άρα $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$. Άρα από την εξίσωση των διαστάσεων έχουμε ότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$ και $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$. Επομένως $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f = 0$, δηλαδή $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$. Άρα η f είναι μονομορφισμός και άρα ισομορφισμός.

Επομένως στην προηγούμενη άσκηση αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι είτε μονομορφισμός ή επιμορφισμός. Τότε έπεται ότι η f είναι ισομορφισμός.

Άσκηση 3. *Έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου ο $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος $\mathcal{E}$ έχει πεπερασμένη διάσταση.*

(1) *Να δείξετε ότι η f είναι μονομορφισμός αν και μόνον αν η f στέλνει γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα διανυσμάτων σε γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα διανυσμάτων:*

$$\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \cdots \vec{e}_k\}\ :\ \textit{γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο} \implies$$

$$f(\mathcal{C}) = \{f(\vec{e}_1), \cdots f(\vec{e}_k)\}\ :\ \textit{γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο}$$

(2) *Να δείξετε ότι η f είναι ισομορφισμός αν και μόνον αν η f στέλνει τυχούσα βάση του $\mathcal{E}$ σε βάση του $\mathcal{E}$:*

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \cdots \vec{e}_n\}\ :\ \ \textit{βάση του } \mathcal{E} \quad \Longrightarrow \quad f(\mathcal{B}) = \{f(\vec{e}_1), \cdots f(\vec{e}_n)\}\ :\ \ \textit{βάση του } \mathcal{E}$$

Λύση. (1) $(\Rightarrow)$ *Υποθέτουμε ότι η γραμμική απεικόνιση f είναι μονομορφισμός και έστω $\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \cdots \vec{e}_k\}$ ένα σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $f(\mathcal{C}) = \{f(\vec{e}_1), \cdots f(\vec{e}_k)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Έστω*

$$
\begin{aligned}
& \lambda_1 f(\vec{e}_1) + \cdots + \lambda_k f(\vec{e}_k) = \vec{0} & & \\
\Rightarrow\ & f(\lambda_1 \vec{e}_1 + \cdots + \lambda_k \vec{e}_k) = \vec{0} & & f\colon \text{γραμμική} \\
\Rightarrow\ & \lambda_1 \vec{e}_1 + \cdots + \lambda_k \vec{e}_k \in \operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\} & & f\colon \text{μονομορφισμός} \\
\Rightarrow\ & \lambda_1 \vec{e}_1 + \cdots + \lambda_k \vec{e}_k = 0 & & \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_k\}\colon \text{γραμμικά ανεξάρτητο} \\
\Rightarrow\ & \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0 & &
\end{aligned}
$$

Άρα το σύνολο $f(\mathcal{C}) = \{f(\vec{e}_1), \cdots f(\vec{e}_k)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

$(\Leftarrow)$ *Υποθέτουμε ότι η f στέλνει γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα διανυσμάτων σε γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα διανυσμάτων, δηλαδή αν $\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \cdots \vec{e}_k\}$ είναι ένα σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων τότε το σύνολο $f(\mathcal{C}) = \{f(\vec{e}_1), \cdots f(\vec{e}_k)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Θα δείξουμε ότι η f είναι μονομορφισμός. Έστω $\vec{x} \in \operatorname{Ker} f$, δηλαδή $f(\vec{x}) = \vec{0}$. Αν το διάνυσμα $\vec{x} \neq \vec{0}$ τότε το σύνολο $\{\vec{x}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα από την υπόθεση έπεται ότι το σύνολο $\{f(\vec{x})\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα $f(\vec{x}) \neq 0$. Αυτό όμως είναι άτοπο διότι το διάνυσμα $\vec{x} \in \operatorname{Ker} f$. Άρα δείξαμε ότι αν $\vec{x} \in \operatorname{Ker} f$ τότε $\vec{x} = \vec{0}$. Συνεπώς $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$, δηλαδή η f είναι μονομορφισμός.*

(2) $(\Rightarrow)$ *Υποθέτουμε ότι η γραμμική απεικόνιση f είναι ισομορφισμός, δηλαδή η f είναι μονομορφισμός και επιμορφισμός. Έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ μια βάση του $\mathcal{E}$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $f(\mathcal{B}) = \{f(\vec{e}_1), \cdots, f(\vec{e}_n)\}$ είναι βάση του $\mathcal{E}$. Αφού η f είναι μονομορφισμός, έπεται από το (1) παραπάνω ότι το σύνολο $f(\mathcal{B})$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Έστω $y \in \mathcal{E}$. Τότε αφού η f είναι επιμορφισμός υπάρχει ένα $\vec{x} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε $f(\vec{x}) = \vec{y}$. Το σύνολο $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ είναι βάση του $\mathcal{E}$, άρα το $\vec{x}$ γράφεται $\vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{e}_n$. Τότε*

$$
\begin{aligned}
& \vec{y} = f(\lambda_1 \vec{e}_1 + \cdots + \lambda_k \vec{e}_k) = \lambda_1 f(\vec{e}_1) + \cdots + \lambda_n f(\vec{e}_n) \\
\Rightarrow\ & \vec{y} \in \langle f(\vec{e}_1), \cdots, f(\vec{e}_n) \rangle \\
\Rightarrow\ & \mathcal{E} = \langle f(\vec{e}_1), \cdots, f(\vec{e}_n) \rangle = \langle f(\mathcal{B}) \rangle
\end{aligned}
$$

και άρα δείξαμε ότι το σύνολο $f(\mathcal{B})$ παράγει τον $\mathcal{E}$. Επομένως το σύνολο $f(\mathcal{B})$ είναι βάση του $\mathcal{E}$.

<u>Διαφορετικά</u>: έχοντας δείξει ότι το σύνολο $f(\mathcal{B})$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι το σύνολο $f(\mathcal{B})$ είναι βάση του $\mathcal{E}$ ως εξής: Επειδή f είναι ισομορφισμός, έπεται ότι: $n = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$. Από την άλλη πλευρά $|f(\mathcal{B})| = n$ (διότι διαφορετικά υπάρχουν $1 \leq i \neq j \leq n$ έτις ώστε: $f(\vec{e}_i) = f(\vec{e}_j)$. Τότε όμως $\vec{e}_i = \vec{e}_j$ επειδή η f είναι μονομορφισμός, κάτι το οποίο είναι άτοπο διότι το $\mathcal{B}$ είναι βάση του $\mathcal{E}$). Από γνωστό Θεώρημα: $f(\mathcal{B})$ γραμμικά ανεξάρτητο και $|f(\mathcal{B})| = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$ $\Rightarrow$ $f(\mathcal{B})$ είναι βάση του $\mathcal{F}$.

$(\Leftarrow)$ *Υποθέτουμε ότι αν $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \cdots \vec{e}_n\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{E}$ τότε το σύνολο $f(\mathcal{B}) = \{f(\vec{e}_1), \cdots f(\vec{e}_n)\}$ είναι βάση του $\mathcal{E}$. Θα δείξουμε ότι η f είναι ισομορφισμός.*
f <u>μονομορφισμός</u>: Έστω $\vec{x} \in \operatorname{Ker} f$ και $\vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{e}_n$. Τότε:

$$
\begin{aligned}
& f(\vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow f(\lambda_1 \vec{e}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{e}_n) = \vec{0} & & \\
\Rightarrow\ & \lambda_1 f(\vec{e}_1) + \cdots + \lambda_n f(\vec{e}_n) = \vec{0} & & f\colon \text{γραμμική} \\
\Rightarrow\ & \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0 & & \{f(\vec{e}_1), \cdots, f(\vec{e}_n)\}\colon \text{γραμμικά ανεξάρτητο} \\
\Rightarrow\ & \vec{x} = \vec{0} & & \\
\Rightarrow\ & \operatorname{Ker} f = \vec{0} & & \\
\Rightarrow\ & f\ :\ \text{μονομορφισμός} & &
\end{aligned}
$$

f <u>επιμορφισμός</u>: Έστω $\vec{y} \in \mathcal{E}$. Αφού το σύνολο $f(\mathcal{B}) = \{f(\vec{e}_1), \cdots f(\vec{e}_n)\}$ είναι βάση του $\mathcal{E}$, τότε

$$\vec{y} = \lambda_1 f(\vec{e}_1) + \cdots + \lambda_n f(\vec{e}_n) = f(\lambda_1 \vec{e}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{e}_n) = f(\vec{x})$$

όπου $\vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{e}_n \in \mathcal{E}$. Συνεπώς η f είναι επιμορφισμός.

Επομένως έχουμε ότι η f είναι ισομορφισμός.

Διαφορετικά: έχοντας δείξει ότι η f είναι μονομορφισμός, θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι η f είναι επιμορφισμός ως εξής: Επειδή το σύνολο $f(\mathcal{B})$ είναι βάση του $\mathcal{F}$ έπεται ότι: $n = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$. Από την άλλη πλευρά η Θεμελιώδης Εξίσωση Διαστάσεων δίνει ότι: $n = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f$. Επειδή $\operatorname{Im} f$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{F}$ και $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$, από γνωστό Θεώρημα έπεται ότι $\operatorname{Im} f = \mathcal{F}$, δηλαδή η f είναι επιμορφισμός. □

Άσκηση 4. *Να βρεθούν βάσεις για τον πυρήνα $\operatorname{Ker} f$ και την εικόνα $\operatorname{Im} f$ της γραμμικής απεικόνισης:*

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (x+2y, y-x, x+2z)$$

Λύση. *Έστω $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Τότε: $(x,y,z) \in \operatorname{Ker} f$ αν και μόνον αν:*

$$f(x,y,z) = (0,0,0) \iff (x+2y, y-x, x+2z) = (0,0,0) \iff x = y = z = 0$$

Συνεπώς $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$ και άρα η f είναι μονομορφισμός και άρα το κενό σύνολο $\{\emptyset\}$ είναι βάση του πυρήνα $\operatorname{Ker} f$ της f.

Επειδή το σύνολο $\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1 = (1,0,0),\ \vec{e}_2 = (0,1,0),\ \vec{e}_3 = (0,0,1)\big\}$, ως βάση του $\mathbb{R}^3$, παράγει τον $\mathbb{R}^3$, έπεται ότι το σύνολο $f(\mathcal{B}) = \big\{f(\vec{e}_1),\ f(\vec{e}_2),\ f(\vec{e}_3)\big\}$ παράγει την εικόνα $\operatorname{Im} f$ της f. Έτσι:

$$\operatorname{Im} f = \langle f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\rangle = \langle (1,-1,1), (2,1,0), (0,0,2)\rangle$$

και

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

και άρα τα διαμύσματα $(1,-1,1), (2,1,0), (0,0,2)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επομένως, το σύνολο των διανυσμάτων $\{(1,-1,1), (2,1,0), (0,0,2)\}$ αποτελεί βάση της εικόνας $\operatorname{Im} f$ της f. Να σημειώσουμε ότι από την Παρατήρηση 1 έπεται ότι η f είναι ισομορφισμός. □

Άσκηση 5. *Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση:*

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y,z,w) = (x - z + 2w, -2x + y + 2z, y + 4w)$$

(1) *Να βρεθούν βάσεις για τον πυρήνα $\operatorname{Ker} f$ και την εικόνα $\operatorname{Im} f$ της f.*
(2) *Να δειχθεί ότι το διάνυσμα $(1,3,\kappa) \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \kappa = 5$.*
(3) *Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν τα $a, b \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $(1,a,1,b) \in \operatorname{Ker} f$;*

Λύση. (1) *Έστω $(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$. Τότε: $(x,y,z,w) \in \operatorname{Ker} f$ αν και μόνον αν:*

$$f(x,y,z,w) = (0,0,0) \iff (x - z + 2w, -2x + y + 2z, y + 4w) = (0,0,0) \iff \begin{cases} x - z + 2w = 0 \\ -2x + y + 2z = 0 \\ y + 4w = 0 \end{cases}$$

και

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και άρα καταλήγουμε στο σύστημα:

$$\begin{cases} x - z + 2w = 0 \\ y + 4w = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = z - 2w \\ y = -4w \end{cases}$$

Συνεπώς ο πυρήνας της f είναι

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker} f &= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid f(x,y,z,w) = (0,0,0)\} \\
&= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x = z - 2w \ \text{ και } \ y = -4w\} \\
&= \{(z-2w, -4w, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid z, w \in \mathbb{R}\} \\
&= \{z(1,0,1,0) + w(-2,-4,0,1) \in \mathbb{R}^4 \mid z, w \in \mathbb{R}\} \\
&= \langle (1,0,1,0), (-2,-4,0,1) \rangle
\end{aligned}$$

Έστω $\lambda_1(1,0,1,0) + \lambda_2(-2,-4,0,1) = (0,0,0,0)$. *Τότε*

$$(\lambda_1 - 2\lambda_2, -4\lambda_2, \lambda_1, \lambda_2) = (0,0,0,0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

και άρα τα διανύσματα $(1,0,1,0), (-2,-4,0,1)$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επομένως το σύνολο* $\{(1,0,1,0), (-2,-4,0,1)\}$ *αποτελεί βάση του* $\operatorname{Ker} f$.

Επειδή το σύνολο $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1,0,0,0),\ \vec{e}_2 = (0,1,0,0),\ \vec{e}_3 = (0,0,1,0),\ \vec{e}_4 = (0,0,0,1)\}$, *ως βάση του* $\mathbb{R}^4$, *παράγει τον* $\mathbb{R}^4$, *έπεται ότι το σύνολο* $f(\mathcal{B}) = \{f(\vec{e}_1),\ f(\vec{e}_2),\ f(\vec{e}_3),\ f(\vec{e}_4)\}$ *παράγει την εικόνα* $\operatorname{Im} f$ *της* f. *Έτσι:*

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} f &= \langle f(1,0,0,0), f(0,1,0,0), f(0,0,1,0), f(0,0,0,1) \rangle \\
&= \langle (1,-2,0), (0,1,1), (-1,2,0), (2,0,4) \rangle \\
&= \langle (1,-2,0), (0,1,1), (2,0,4) \rangle
\end{aligned}$$

Έστω $\kappa(1,-2,0) + \lambda(0,1,1) + \mu(2,0,4) = (0,0,0)$. *Τότε*

$$(\kappa + 2\mu, -2\kappa + \lambda, \lambda + 4\mu) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} \kappa + 2\mu = 0 \\ -2\kappa + \lambda = 0 \\ \lambda + 4\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \kappa = -2\mu \ \text{ και } \ \lambda = -4\mu$$

Το σύστημα αυτό έχει ως γενική λύση: $(-2\mu, -4\mu, \mu)$ *όπου* $\mu \in \mathbb{R}$ *και επομένως, για* $\mu = 1$, *θα έχουμε μια σχέση γραμμικής εξάρτησης:*

$$-2(1,-2,0) - 4(0,1,1) + (2,0,4) = (0,0,0) \Rightarrow (2,0,4) \in \langle (1,-2,0),\ (0,1,1) \rangle$$

Συνεπώς

$$\operatorname{Im} f = \langle (1,-2,0),\ (0,1,1) \rangle$$

και εύκολα διαπιστώνουμε ότι τα διανύσματα $(1,-2,0), (0,1,1)$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Άρα το σύνολο* $\{(1,-2,0), (0,1,1)\}$ *αποτελεί βάση της εικόνας* $\operatorname{Im} f$ *της* f.

(2) *Από το προηγούμενο ερώτημα γνωρίζουμε ότι το σύνολο* $\{(1,-2,0), (0,1,1)\}$ *αποτελεί βάση της εικόνας* $\operatorname{Im} f$ *της* f. *Συνεπώς το διάνυσμα* $(1,3,\kappa) \in \operatorname{Im} f$ *αν και μόνο αν υπάρχουν* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *έτσι ώστε*

$$\lambda_1(1,-2,0) + \lambda_2(0,1,1) = (1,3,\kappa) \Rightarrow (\lambda_1, -2\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2) = (1,3,\kappa)$$

Άρα έχουμε $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \kappa$ *και*

$$-2\lambda_1 + \lambda_2 = 3 \Rightarrow \lambda_2 = 3 + 2\lambda_1 = 5 \Rightarrow \kappa = 5$$

Επομένως δείξαμε ότι $(1,3,\kappa) \in \operatorname{Im} f$ *αν και μόνο αν* $\kappa = 5$.

(3) *Από το ερώτημα* (1) *γνωρίζουμε ότι το σύνολο* $\{(1,0,1,0), (-2,-4,0,1)\}$ *αποτελεί βάση του* $\operatorname{Ker} f$. *Επομένως το διάνυσμα* $(1,a,1,b) \in \operatorname{Ker} f$ *αν και μόνο αν υπάρχουν* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *έτσι ώστε*

$$\begin{aligned}
\lambda_1(1,0,1,0) + \lambda_2(-2,-4,0,1) = (1,a,1,b) \quad &\Rightarrow \quad (\lambda_1 - 2\lambda_2, -4\lambda_2, \lambda_1, \lambda_2) = (1,a,1,b) \\
&\Rightarrow \quad a = b = 0
\end{aligned}$$

Άρα για $a = b = 0$ *το διάνυσμα* $(1,a,1,b) \in \operatorname{Ker} f$. $\square$

Άσκηση 6. *Έστω* $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *μια γραμμική απεικόνιση, όπου* $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$. *Έστω ότι* $f^n = \vec{0}$ *και* $f^{n-1} \neq 0$. *Αν* $\vec{x} \in \mathcal{E}$, *να δείξετε ότι* $f^{n-1}(\vec{x}) \neq \vec{0}$ *αν και μόνο αν το σύνολο*

$$\{\vec{x},\ f(\vec{x}),\ \cdots,\ f^{n-1}(\vec{x})\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Λύση. *Αν το σύνολο* $\{\vec{x},\ f(\vec{x}),\ \cdots,\ f^{n-1}(\vec{x})\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο τότε έχουμε ότι* $f^{n-1}(\vec{x}) \neq \vec{0}$.

Έστω $\vec{x} \in \mathcal{E}$ *έτσι ώστε* $f^{n-1}(\vec{x}) \neq \vec{0}$. *Θα δείξουμε ότι το σύνολο* $\{\vec{x},\ f(\vec{x}),\ \cdots,\ f^{n-1}(\vec{x})\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Έστω* $\lambda_0\vec{x} + \lambda_1 f(\vec{x}) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(\vec{x}) = \vec{0}$. *Εφαρμόζοντας διαδοχικά την* f *στην παραπάνω σχέση και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι* $f^n = 0$ *και* $f^{n-1}(\vec{x}) \neq \vec{0}$, *θα έχουμε:*

$$\begin{aligned}
& \lambda_0\vec{x} + \lambda_1 f(\vec{x}) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(\vec{x}) = \vec{0} \qquad (*) \\
\Rightarrow\ & \lambda_0 f(\vec{x}) + \lambda_1 f^2(\vec{x}) + \cdots + \lambda_{n-2} f^{n-1}(\vec{x}) + \lambda_{n-1} f^n(\vec{x}) = \vec{0} \\
\Rightarrow\ & \lambda_0 f(\vec{x}) + \lambda_1 f^2(\vec{x}) + \cdots + \lambda_{n-2} f^{n-1}(\vec{x}) + \vec{0} = \vec{0} \\
\Rightarrow\ & \lambda_0 f^2(\vec{x}) + \lambda_1 f^3(\vec{x}) + \cdots + \lambda_{n-3} f^{n-1}(\vec{x}) + \lambda_{n-2} f^n(\vec{x}) = \vec{0} \\
\Rightarrow\ & \lambda_0 f^2(\vec{x}) + \lambda_1 f^3(\vec{x}) + \cdots + \lambda_{n-3} f^{n-1}(\vec{x}) + \vec{0} = \vec{0} \\
\Rightarrow\ & \lambda_0 f^3(\vec{x}) + \lambda_1 f^4(\vec{x}) + \cdots + \lambda_{n-4} f^{n-1}(\vec{x}) + \lambda_{n-3} f^n(\vec{x}) = \vec{0} \\
\Rightarrow\ & \lambda_0 f^3(\vec{x}) + \lambda_1 f^4(\vec{x}) + \cdots + \lambda_{n-4} f^{n-1}(\vec{x}) + \vec{0} = \vec{0} \\
\vdots\ & \\
\Rightarrow\ & \lambda_0 f^{n-2}(\vec{x}) + \lambda_1 f^{n-1}(\vec{x}) + \lambda_2 f^n(\vec{x}) = \vec{0} \\
\Rightarrow\ & \lambda_0 f^{n-2}(\vec{x}) + \lambda_1 f^{n-1}(\vec{x}) + \vec{0} = \vec{0} \\
\Rightarrow\ & \lambda_0 f^{n-1}(\vec{x}) + \lambda_1 f^n(\vec{x}) = \vec{0} \\
\Rightarrow\ & \lambda_0 f^{n-1}(\vec{x}) + \vec{0} = \vec{0} \\
\Rightarrow\ & \lambda_0 f^{n-1}(\vec{x}) = \vec{0} \\
\Rightarrow\ & \lambda_0 = 0 \quad \textit{αφού} \quad f^{n-1}(\vec{x}) \neq \vec{0}
\end{aligned}$$

Άρα από τη σχέση $(*)$ *έχουμε*

$$\lambda_1 f(\vec{x}) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(\vec{x}) = \vec{0}$$

και αν επαναλάβουμε ξανά την παραπάνω διαδικασία τότε

$$\begin{cases} \lambda_1 f^{n-1}(\vec{x}) = \vec{0} \\ f^{n-1}(\vec{x}) \neq \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = 0$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο έπεται ότι $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$ *και άρα το σύνολο* $\{\vec{x},\ f(\vec{x}),\ \cdots,\ f^{n-1}(\vec{x})\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο.* □

Άσκηση 7. *Θεωρούμε τον* 2×2 *πίνακα πραγματικών αριθμών*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

και έστω η γραμμική απεικόνιση

$$f \colon \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \quad f(M) = AM - MA$$

Να βρεθούν βάσεις για τον πυρήνα $\operatorname{Ker} f$ *και την εικόνα* $\operatorname{Im} f$ *της* f.

Λύση. *Έστω* $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. *Τότε*

$$\begin{aligned} f(M) = AM - MA \Rightarrow f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ -a+c & -b+d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a-b & b \\ c-d & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b & 0 \\ -a+d & -b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Τότε: $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} f$ *αν και μόνον αν:*

$$f(M) = 0 \iff \begin{pmatrix} b & 0 \\ -a+d & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} b = 0 \\ a = d \end{cases}$$

και άρα ο πυρήνας της f είναι

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &= \Big\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Big\} \\ &= \Big\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid b = 0 \ \ \textit{και} \ \ a = d \Big\} \\ &= \Big\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid a, c \in \mathbb{R} \Big\} \\ &= \Big\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid a, c \in \mathbb{R} \Big\} \\ &= \Big\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Big\rangle \end{aligned}$$

Θέτουμε $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *και* $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Εύκολα διαπιστώνουμε ότι τα διανύσματα A, B είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα το σύνολο $\{A, B\}$ είναι βάση του πυρήνα $\operatorname{Ker} f$ της f. Για την εικόνα της f έχουμε:*

$$f(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ f(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ f(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ f(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

και άρα

$$\operatorname{Im} f = \Big\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Big\rangle = \Big\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Big\rangle$$

Θέτουμε $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *και* $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Τότε αφού τα διανύσματα Γ, Δ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, έπεται ότι το σύνολο $\{\Gamma, \Delta\}$ είναι βάση της εικόνας $\operatorname{Im} f$ της f.* $\square$

Άσκηση 8. *Θεωρούμε τη βάση*

$$\mathcal{B} := \{\vec{e}_1 = 1,\ \vec{e}_2 = t,\ \vec{e}_3 = t^2\}$$

του $\mathbb{R}_2[t]$ και τα διανύσματα

$$\vec{w}_1 = 1 + t,\ \ \vec{w}_2 = 3 - t^2,\ \ \vec{w}_3 = 4 + 2t - 3t^2$$

του $\mathbb{R}_2[t]$. Να προσδιορισθεί η μοναδική γραμμική απεικόνιση $f\colon \mathbb{R}_2[t] \longrightarrow \mathbb{R}_2[t]$ έτσι ώστε: $f(\vec{e}_i) = \vec{w}_i$, $1 \leq i \leq 3$. Ακολούθως να εξετασθεί αν η f είναι ισομορφισμός. Αν η f δεν είναι ισομορφισμός να βρεθούν βάσεις για τον πυρήνα $\operatorname{Ker} f$ και την εικόνα $\operatorname{Im} f$ της f.

Λύση. *Έστω* $P(t) = a + bt + ct^2 \in \mathbb{R}_2[t]$. *Τότε έχουμε*

$$\begin{aligned} f(a+bt+ct^2) &= af(1) + bf(t) + cf(t^2) \\ &= a(1+t) + b(3-t^2) + c(4+2t-3t^2) \\ &= a + at + 3b - bt^2 + 4c + 2ct - 3ct^2 \\ &= (a+3b+4c) + (a+2c)t + (-b-3c)t^2 \end{aligned}$$

Επομένως η f *ορίζεται ως ακολούθως:*

$$f\colon\ \mathbb{R}_2[t] \longrightarrow \mathbb{R}_2[t], \quad a+bt+ct^2 \longmapsto f(a+bt+ct^2) = (a+3b+4c) + (a+2c)t + (-b-3c)t^2$$

Έστω $P(t) = a + bt + ct^2 \in \mathbb{R}_2[t]$. *Τότε:* $P(t) \in \operatorname{Ker} f$ *αν και μόνον αν:*

$$f(P(t)) = 0 \iff (a+3b+4c) + (a+2c)t + (-b-3c)t^2 = 0 + 0t + 0t^2 \iff \begin{cases} a+3b+4c = 0 \\ a+2c = 0 \\ -b-3c = 0 \end{cases}$$

Τότε $b = -3c$, $a = -2c$ *και άρα* $-2c + 3(-3c) + 4c = 0 \Rightarrow c = 0$. *Επομένως έχουμε* $a = b = c = 0$. *Συνεπώς ο πυρήνας της* f *είναι* $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$ *και άρα η γραμμική απεικόνιση* f *είναι μονομορφισμός. Από την εξίσωση των διαστάσεων έχουμε:*

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_2[t] = \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} f + \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} f \quad &\Rightarrow \quad 3 = 0 + \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} f \Rightarrow \begin{cases} \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} f = 3 \\ \operatorname{Im} f\ :\ \text{υπόχωρος του } \mathbb{R}_2[t] \end{cases} \\ &\Rightarrow \quad \operatorname{Im} f = \mathbb{R}_2[t] \\ &\Rightarrow \quad f\ :\ \text{επιμορφισμός} \end{aligned}$$

Επομένως η γραμμική απεικόνιση f *είναι ισομορφισμός.* □

Ενότητα 9

Άσκηση 1. *Έστω $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ ένας $n \times n$ πίνακας και $\mathsf{adj}(A)$ ο συμπληρωματικός του A.*

(1) $\mathsf{adj}(A) = \mathbb{O} \iff \mathbf{r}(A) < n-1$.
(2) $\mathbf{r}(A) = n \implies \mathbf{r}(\mathsf{adj}(A)) = n$.
(3) $\mathbf{r}(A) < n-1 \implies \mathbf{r}(\mathsf{adj}(A)) = 0$.
(4) $\mathbf{r}(A) = n-1 \implies \mathbf{r}(\mathsf{adj}(A)) = 1$.

Λύση. (1) *Από τον ορισμό του συμπληρωματικού πίνακα $\mathsf{adj}(A)$ του A έχουμε ότι $\mathsf{adj}(A) = \mathbb{O}$ αν και μόνο αν όλες οι ελάσσονες ορίζουσες τάξης $n-1$ είναι ίσες με 0. Επομένως έχουμε ισοδύναμα ότι $\mathbf{r}(A) < n-1$ αφού από βασικό Θεώρημα γνωρίζουμε ότι $\mathbf{r}(A) < k$ αν και μόνο αν υπάρχει ελάσσονα ορίζουσα τάξης $k \neq 0$ και όλες οι ελάσσονες ορίζουσες τάξης μεγαλύτερης του k είναι ίσες με 0.*

(2) *Έστω $\mathbf{r}(A) = n$. Τότε $|A| \neq 0$, δηλαδή ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Όμως από την ακόλουθη σχέση:*
$$A \cdot \mathsf{adj}(A) = |A| \cdot I_n = \mathsf{adj}(A) \cdot A$$
έπεται ότι $|\mathsf{adj}(A)| \neq 0$ και άρα ο $\mathsf{adj}(A)$ έχει μέγιστη βαθμίδα, δηλαδή: $\mathbf{r}(\mathsf{adj}(A)) = n$.

(3) *Αν $\mathbf{r}(A) < n-1$ τότε από το (1) έχουμε ότι $\mathsf{adj}(A) = \mathbb{O}$ και άρα $\mathbf{r}(\mathsf{adj}(A)) = 0$.*

(4) *Έστω $\mathbf{r}(A) = n-1$. Τότε $|A| = 0$ αφού $\mathbf{r}(A) < n$. Συνεπώς από τη σχέση $A\cdot\mathsf{adj}(A) = |A|\cdot I_n = \mathsf{adj}(A)\cdot A$ έχουμε*
$$A \cdot \mathsf{adj}(A) = 0 = \mathsf{adj}(A) \cdot A \tag{$*$}$$
Θέτουμε $B = \mathsf{adj}(A)$ και ορίζουμε τις παρακάτω απεικονίσεις:
$$\mathbb{K}_n \xrightarrow{\ f_A\ } \mathbb{K}_n \xrightarrow{\ f_B\ } \mathbb{K}_n\ , \quad f_A(X) = A \cdot X \quad \text{και} \quad f_B(X) = B \cdot X$$
Τότε
$$\begin{aligned} f_{B\cdot A}(X) = B\cdot A\cdot X = B\cdot(A\cdot X) = B\cdot(f_A(X)) &= f_B(f_A(X)) = (f_B\circ f_A)(X) \\ &\implies f_{B\cdot A} = f_B \circ f_A \end{aligned}$$
και άρα από τη σχέση $(*)$ έχουμε
$$f_B \circ f_A = 0$$
Έστω $Y \in \operatorname{Im} f_A$. Τότε $Y = f_A(X)$ και από την παραπάνω σχέση έχουμε $f_B(f_A(X)) = 0$. Άρα $Y = f_A(X) \in \operatorname{Ker} f_B$ και επομένως
$$\operatorname{Im} f_A \subseteq \operatorname{Ker} f_B$$
Τότε από την παραπάνω σχέση έχουμε
$$\begin{aligned} & \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f_A \leq \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f_B = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n - \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f_B \\ \implies\ & \mathbf{r}(A) \leq n - \mathbf{r}(B) \\ \implies\ & \mathbf{r}(A) + \mathbf{r}(B) \leq n \\ \implies\ & n-1+\mathbf{r}(B) \leq n \\ \implies\ & \mathbf{r}(B) \leq 1 \end{aligned}$$
Έστω ότι $\mathbf{r}(B) = 0$. Τότε $B = \mathsf{adj}(A) = \mathbb{O}$ και άρα από το (1) έχουμε $\mathbf{r}(A) < n-1$, που είναι άτοπο. Επομένως $\mathbf{r}(B) = \mathbf{r}(\mathsf{adj}(A)) = 1$. □

Η ιδέα στην απόδειξη του (4) στην Άσκηση 1 είναι η χρήση του εξής γενικότερου αποτελέσματος που αναλύεται στην επόμενη Άσκηση:

Άσκηση 2. *Έστω οι γραμμικές απεικονίσεις*

$$\mathcal{E} \xrightarrow{\quad g \quad} \mathcal{F} \xrightarrow{\quad f \quad} \mathcal{G}\ ,$$

μεταξύ $\mathbb{K}$*-διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης. Αν* $f \circ g = 0$*, τότε:*

(1) $\operatorname{Im} g \subseteq \operatorname{Ker} f$.
(2) $\mathbf{r}(f) + \mathbf{r}(g) \leq \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{F}$.
(3) $\mathbf{r}(f) + \mathbf{r}(g) = \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{F}$ *αν και μόνον αν* $\operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} f$.

Λύση. (1) *Έστω* $\vec{y} \in \operatorname{Im} g$*. Τότε* $\vec{y} = g(\vec{x})$ *και άρα χρησιμοποιώντας ότι* $f \circ g = 0$*, θα έχουμε* $f(\vec{y}) = f(g(\vec{x})) = \vec{0}$*. Άρα* $\vec{y} \in \operatorname{Ker} f$ *και επομένως*

$$\operatorname{Im} g \subseteq \operatorname{Ker} f$$

(2) *Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση έχουμε*

$$\begin{aligned} & \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} g \leq \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f = \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{F} - \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f \\ \Longrightarrow\ & \mathbf{r}(g) \leq \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{F} - \mathbf{r}(f) \\ \Longrightarrow\ & \mathbf{r}(f) + \mathbf{r}(g) \leq \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{F} \end{aligned}$$

(3) *Παρατηρούμε ότι η ανισότητα στο* (2) *είναι ισότητα αν και μόνον αν* $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} g = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f$*. Επειδή από το* (1) *ισχύει* $\operatorname{Im} g \subseteq \operatorname{Ker} f$*, αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι:* $\operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} f$.

Άσκηση 3. *Έστω* $f, g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ *και* $h : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ *γραμμικές απεικόνισεις μεταξύ* $\mathbb{K}$*-διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης, και* $0 \neq k \in \mathbb{K}$*. Να δείξετε ότι:*

(1) $\mathbf{r}(\kappa f) = \mathbf{r}(f)$.
(2) $|\mathbf{r}(f) - \mathbf{r}(g)| \ \leq\ \mathbf{r}(f+g) \ \leq\ \mathbf{r}(f) + \mathbf{r}(g)$.
(3) $\mathbf{r}(h \circ f) \ \leq\ \min\big\{\mathbf{r}(f), \mathbf{r}(h)\big\}$.

Λύση. (1) *Έστω* $\vec{y} \in \operatorname{Im} f$*. Τότε* $\vec{y} = f(\vec{x})$ *για κάποιο* $\vec{x} \in \mathcal{E}$*. Αφού* $k \neq 0$ *και* f *γραμμική έχουμε:*

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = f(1\vec{x}) = f(k\frac{1}{k}\vec{x}) = kf(\frac{1}{k}\vec{x}) \implies \vec{y} \in \operatorname{Im}(kf)$$

Άρα $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Im}(kf)$*. Αντίστροφα, αν* $\vec{y} \in \operatorname{Im} kf$ *τότε*

$$\vec{y} = (kf)(\vec{x}) = kf(\vec{x}) = f(k\vec{x}) \implies \vec{y} \in \operatorname{Im} f$$

Επομένως έχουμε $\operatorname{Im}(kf) \subseteq \operatorname{Im}(f)$ *και άρα* $\operatorname{Im}(kf) = \operatorname{Im} f$*. Τότε συνεπάγεται ότι*

$$\mathbf{r}(\kappa f) = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(kf) = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f = \mathbf{r}(f)$$

και άρα έχουμε το ζητούμενο.

(2) *Έστω* $\vec{y} \in \operatorname{Im}(f+g)$*. Τότε* $\vec{y} = (f+g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x})$ *για κάποιο* $\vec{x} \in \mathcal{E}$ *και άρα* $\vec{y} \in \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$*. Άρα* $\operatorname{Im}(f+g) \subseteq \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$*. Τότε έχουμε:*

$$\begin{aligned} & \mathbf{r}(f+g) \leq \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g) = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} g - \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g) \\ \Rightarrow\ & \mathbf{r}(f+g) \leq \mathbf{r}(f) + \mathbf{r}(g) - \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g) \\ \Rightarrow\ & \mathbf{r}(f+g) \leq \mathbf{r}(f) + \mathbf{r}(g) \end{aligned} \qquad (*)$$

Από τη σχέση $(*)$ *έχουμε*

$$\begin{cases} \mathbf{r}(f) = \mathbf{r}((f+g)+(-g)) \leq \mathbf{r}(f+g) + \mathbf{r}(-g) = \mathbf{r}(f+g) + \mathbf{r}(g) \implies \mathbf{r}(f) - \mathbf{r}(g) \leq \mathbf{r}(f+g) \\ \mathbf{r}(g) = \mathbf{r}((f+g)+(-f)) \leq \mathbf{r}(f+g) + \mathbf{r}(-f) = \mathbf{r}(f+g) + \mathbf{r}(f) \implies \mathbf{r}(g) - \mathbf{r}(f) \leq \mathbf{r}(f+g) \end{cases}$$

και άρα

$$|\mathbf{r}(f) - \mathbf{r}(g)| \leq \mathbf{r}(f+g) \qquad (**)$$

Από τις σχέσεις $(*)$ *και* $(**)$ *έπεται ότι* $|\mathbf{r}(f) - \mathbf{r}(g)| \ \leq\ \mathbf{r}(f+g) \ \leq\ \mathbf{r}(f) + \mathbf{r}(g)$.

(3) *Αρχικά έχουμε* $\operatorname{Im}(h \circ f) \subseteq \operatorname{Im} h$ *και άρα*

$$\mathbf{r}(h \circ f) \leq \mathbf{r}(h) \qquad (1)$$

Επίσης επειδή, όπως μπορούμε να δούμε εύκολα, ισχύει $\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Ker}(h \circ f)$*, έπεται ότι* $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f \leq \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(h \circ f)$*. Τότε από τις εξισώσεις των διαστάσεων για την* $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ *και την σύνθεση* $h \circ f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{G}$ *έχουμε:*

$$\begin{cases} \dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f + \mathbf{r}(f) \\ \dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(h \circ f) + \mathbf{r}(h \circ f) \end{cases} \implies \mathbf{r}(f) - \mathbf{r}(h \circ f) = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(h \circ f) - \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f \geq 0$$

$$\implies \mathbf{r}(f) \geq \mathbf{r}(h \circ f) \tag{2}$$

Επομένως από τις σχέσεις (1) *και* (2) *έχουμε:* $\mathbf{r}(h \circ f) \leq \min\{\mathbf{r}(f), \mathbf{r}(h)\}$. □

Άσκηση 4. *Να βρεθούν οι τιμές του* $\lambda \in \mathbb{R}$*, για τις οποίες το γραμμικό σύστημα*

$$\begin{cases} \lambda x + (3\lambda + 4)y + 2(\lambda + 1)z = 0 \\ \lambda x + (4\lambda + 2)y + (\lambda + 4)z = 0 \\ 2x + (3\lambda + 4)y + 3\lambda z = 0 \end{cases}$$

είναι συμβιβαστό, και ακολούθως να λυθεί.

Λύση. *Ο πίνακας του συστήματος είναι*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 3\lambda + 4 & 2(\lambda + 1) \\ \lambda & 4\lambda + 2 & \lambda + 4 \\ 2 & 3\lambda + 4 & 3\lambda \end{pmatrix}$$

Έχουμε:

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 3\lambda + 4 & 2(\lambda + 1) \\ \lambda & 4\lambda + 2 & \lambda + 4 \\ 2 & 3\lambda + 4 & 3\lambda \end{vmatrix} \xlongequal{\Sigma_1 \to \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3} \begin{vmatrix} 6\lambda + 6 & 3\lambda + 4 & 2(\lambda + 1) \\ 6\lambda + 6 & 4\lambda + 2 & \lambda + 4 \\ 6\lambda + 6 & 3\lambda + 4 & 3\lambda \end{vmatrix}$$

$$= 6(\lambda + 1) \begin{vmatrix} 1 & 3\lambda + 4 & 2(\lambda + 1) \\ 1 & 4\lambda + 2 & \lambda + 4 \\ 1 & 3\lambda + 4 & 3\lambda \end{vmatrix} \xlongequal[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} 6(\lambda + 1) \begin{vmatrix} 1 & 3\lambda + 4 & 2(\lambda + 1) \\ 0 & \lambda - 2 & -\lambda + 2 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 6(\lambda + 1)(\lambda - 2)^2$$

(1) *Για* $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq 2$ *έχουμε* $|A| \neq 0$ *και άρα το σύστημα είναι Cramer. Συνεπώς έχει μοναδική λύση τη μηδενική αφού είναι ομογενές.*

(2) *Έστω* $\lambda = -1$*. Τότε έχουμε το σύστημα:*

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} -x + y = 0 \\ -x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Η βαθμίδα του πίνακα A *είναι* $\mathbf{r}(A) = 2$ *αφού*

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Συνεπώς το (Σ) *είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο σύστημα:*

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ -x - 2y = -3z \end{cases} \implies x = y = z$$

Θέτουμε $z = t \in \mathbb{R}$*. Τότε έχουμε τη γενική λύση:*

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R}$$

(3) *Έστω* $\lambda = 2$*. Τότε έχουμε το σύστημα:*

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} 2x + 10y + 6z = 0 \\ 2x + 10y + 6z = 0 \\ 2x + 10y + 6z = 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 6 \\ 2 & 10 & 6 \\ 2 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

Προφανώς η βαθμίδα του πίνακα A *είναι* $\mathbf{r}(A) = 1$ *και λύνοντας έχουμε* $x = -5y - 3z$*. Θέτουμε* $y = \kappa$ *και* $z = \lambda$*. Τότε έχουμε τη γενική λύση:* $\{(-5\kappa - 3\lambda, \kappa, \lambda) \mid \kappa, \lambda \in \mathbb{R}\}$. □

Άσκηση 5. *Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, να λυθεί το ακόλουθο σύστημα:*

$$(\Sigma): \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 + x_5 - x_6 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 - 2x_6 + x_7 = 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 = -\lambda \end{cases}$$

Λύση. *Ο πίνακας του συστήματος (Σ) είναι*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -\lambda \end{pmatrix}$$

Από την πρώτη, δεύτερη και έβδομη στήλη του πίνακα A έχουμε

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

και

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Συνεπώς βρήκαμε μια ορίζουσα τάξης 3 διάφορη του 0 έτσι ώστε όλες οι ελάσσονες ορίζουσες ορίζουσες τάξης 4 που την περιβάλλουν είναι 0. Άρα η βαθμίδα του πίνακα A είναι $\mathbf{r}(A) = 3$. Στην συνέχεια θα βρούμε την βαθμίδα του επαυξημένου πίνακα $(A|B)$. Έχουμε:

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_1]{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_4 \to \Gamma_4 + \Gamma_2]{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

(1) *Αν $\lambda \neq 1$ τότε η βαθμίδα του επαυξημένου πίνακα $(A|B)$ είναι $\mathbf{r}(A|B) = 4$ διότι*

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda) \neq 0$$

Άρα στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$\mathbf{r}(A) = 3 \neq 4 = \mathbf{r}(A|B)$$

και επομένως το σύστημα (Σ) δεν είναι συμβιβαστό.

(2) *Έστω $\lambda = 1$. Τότε $\mathbf{r}(A|B) = 3$ αφού*

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

και όλες οι ελάσσονες ορίζουσες τάξης 4 που την περιβάλλουν είναι 0. Συνεπώς έχουμε $\mathbf{r}(A) = 3 = \mathbf{r}(A|B)$ και άρα το (Σ) είναι συμβιβαστό. Έστω $\Lambda(\Sigma_0)$ ο υπόχωρος των λύσεων του αντίστοιχου ομογενούς (Σ_0). Τότε θα έχουμε $\dim_{\mathbb{R}} \Lambda(\Sigma_0) = 7 - \mathbf{r}(A) = 7 - 3 = 4$ παραμέτρους στις λύσεις. Θέτουμε $x_3 = p$, $x_4 = q$, $x_5 = r$ και $x_6 = s$ όπου $p, q, r, s \in \mathbb{R}$. Τότε το (Σ) είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p - q - r + s \\ x_2 = 1 - r + s \\ x_1 + 2x_2 + x_7 = 1 - p - q - 2r + 2s \end{cases}$$

Τότε αντικαθιστώντας την $x_2 = 1 - r + s$ *στη πρώτη εξίσωση βρίσκουμε ότι* $x_1 = -1 - p - q$ *και από την τελευταία εξίσωση έπεται ότι* $x_7 = 0$*. Επομένως η γενική λύση του συστήματος* (Σ) *είναι*

$$\begin{cases} x_1 = -1 - p - q \\ x_2 = 1 - r + s \\ x_3 = p \\ x_4 = q \\ x_5 = r \\ x_6 = s \\ x_7 = 0 \end{cases} \qquad p, q, r, s \in \mathbb{R} \qquad \square$$

Άσκηση 6. *Αν* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$*, να λυθεί το σύστημα:*

$$(\Sigma): \quad \begin{cases} \alpha x + y + z = \alpha \\ x + \beta y + z = \beta \\ x + y + \gamma z = \gamma \end{cases}$$

Λύση. *Ο πίνακας του συστήματος* (Σ) *είναι*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \beta & 1 \\ 1 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$$

και εύκολα υπολογίζουμε ότι η ορίζουσα τού πίνακα A *είναι* $|A| = \alpha\beta\gamma - \alpha - \beta - \gamma + 2$*. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις αναφορικά με τις τιμές που μπορεί να λάβει η βαθμίδα του πίνακα* A*.*

(1) $\underline{\mathbf{r}(A) = 3}$*: Αν η βαθμίδα του πίνακα* A *είναι ίση με* 3 *τότε ισοδύναμα έχουμε* $|A| \neq 0$*. Συνεπώς το σύστημα είναι Cramer και άρα έχουμε μοναδική λύση:*

$$x = \frac{\alpha\beta\gamma - 2\beta\gamma + \beta + \gamma - \alpha}{|A|}, \quad y = \frac{\alpha\beta\gamma - 2\alpha\gamma + \alpha + \gamma - \beta}{|A|}, \quad z = \frac{\alpha\beta\gamma - 2\alpha\beta + \alpha + \beta - \gamma}{|A|}$$

(2) $\underline{\mathbf{r}(A) = 1}$*: Ο πίνακας* A *έχει βαθμίδα ίση με* 1 *αν και μόνο αν*

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff \alpha = \beta = \gamma = 1$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι αρκεί να ελέγξουμε μόνο τις παραπάνω ορίζουσες ώστε $\mathbf{r}(A) = 1$*. Τότε το σύστημα είναι ισοδύναμο με την εξίσωση* $x + y + z = 1$ *της οποίας η γενική λύση είναι:*

$$x = 1 - \kappa - \lambda, \;\; y = \kappa, \;\; z = \lambda, \; \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$$

(3) $\underline{\mathbf{r}(A) = 2}$*:*

(α') *Αν* $\alpha = \beta = \gamma = 1$ *τότε από το* (2) *η βαθμίδα του πίνακα* A *είναι* $\mathbf{r}(A) = 1$*, το οποίο είναι άτοπο.*

(β') *Έστω* $\alpha \neq 1, \; \beta \neq 1, \; \gamma \neq 1$ *και ας υποθέσουμε ότι το* (Σ) *είναι συμβιβαστό. Τότε* $\mathbf{r}(A|B) = 2 = \mathbf{r}(A)$ *όπου ο επαυξημένος πίνακας του* A *είναι*

$$(A|B) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \beta & 1 & \beta \\ 1 & 1 & \gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

Τότε η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

αφού το $\beta \neq 1$*, και άρα όλες οι ελάσσονες ορίζουσες που την περιβάλλουν θα πρέπει να είναι ίσες με* 0*, δηλαδή:*

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \beta & 1 \\ 1 & 1 & \gamma \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \beta & \beta \\ 1 & 1 & \gamma \end{vmatrix}$$

Υπολογίζοντας τις παραπάνω ορίζουσες έχουμε:

$$\begin{cases} \alpha\beta\gamma - \alpha - \beta - \gamma + 2 = 0 \\ \alpha\beta\gamma + \alpha + \beta - \gamma - 2\alpha\beta \end{cases}$$

Από την πρώτη εξίσωση έχουμε $\alpha\beta\gamma = \alpha+\beta+\gamma-2$ *και αντικαθιστώντας στην δεύτερη καταλήγουμε στην εξίσωση:*

$$\alpha+\beta-\alpha\beta = 1 \implies (\alpha-1)(1-\beta)=0 \implies \alpha=1 \quad \acute{\eta} \quad \beta=1$$

που είναι άτοπο από την υπόθεση μας. Άρα δεν γίνεται τα α, β *και* γ *να είναι διάφορα του* 1 *όταν η βαθμίδα είναι* $\mathbf{r}(A)=2$.

(γ') *Έστω* $\alpha=1,\ \beta\neq 1,\ \gamma\neq 1$. *Τότε*

$$|A| = \alpha\beta\gamma-\alpha-\beta-\gamma+2 \xRightarrow{\alpha=1} (\beta-1)(\gamma-1)=0$$

και άρα $\beta=1$ *ή* $\gamma=1$, *που είναι άτοπο από την υπόθεση που ξεκινήσαμε. Επομένως υποθέτωντας ότι μόνο ένα από τα* α,β *και* γ *είναι μηδέν τότε καταλήξαμε σε άτοπο. Παρόμοια καταλήγουμε σε άτοπο αν* $\alpha\neq 1,\ \beta=1,\ \gamma\neq 1$ *ή* $\alpha\neq 1,\ \beta\neq 1,\ \gamma=1$.

(δ') *Υποθέτουμε ότι μόνο δύο από τα* α,β *και* γ *είναι ίσα με* 1. *Έστω* $\alpha\neq 1,\ \beta=1,\ \gamma=1$. *Τότε έχουμε το σύστημα:*

$$\begin{cases} \alpha x+y+z=\alpha \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

και παρατηρούμε ότι

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha-1\neq 0$$

Άρα το παραπάνω σύστημα είναι ισοδύναμο με το εξής:

$$\begin{cases} \alpha x+y=\alpha-z \\ x+y=1-z \end{cases}$$

που είναι σύστημα Cramer ως προς τα x *και* y. *Τότε εύκολα βρίσκουμε ότι η γενική λύση του συστήματος είναι:* $x=1,\ y=-\kappa,\ z=\kappa,\ \kappa\in\mathbb{R}$. *Παρόμοια εργαζόμαστε αν* $\alpha=1,\ \beta\neq 1,\ \gamma=1$ *ή* $\alpha=1,\ \beta=1,\ \gamma\neq 1$. $\square$

Άσκηση 7. *Να λυθεί το σύστημα* $(\lambda\in\mathbb{R})$:

$$\begin{cases} x-y+z=3 \\ x+y+\lambda z=1 \\ x+\lambda y+z=\lambda \end{cases}$$

Λύση. *Ο πίνακας του συστήματος* (Σ) *είναι*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Έχουμε

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_1]{\Gamma_2\to\Gamma_2-\Gamma_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & \lambda-1 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \end{vmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda-1)$$

(1) *Για* $\lambda\neq 1$ *και* $\lambda\neq -1$ *έχουμε* $|A|\neq 0$ *και άρα το σύστημα είναι Cramer. Συνεπώς έχουμε μοναδική λύση:*

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 \end{vmatrix}}{-(\lambda+1)(\lambda-1)} = \cdots = 4$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \end{vmatrix}}{-(\lambda+1)(\lambda-1)} = \cdots = \frac{\lambda-3}{\lambda+1}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \end{vmatrix}}{-(\lambda+1)(\lambda-1)} = \cdots = -\frac{4}{(\lambda+1)}$$

(2) Έστω $\lambda = 1$. Τότε έχουμε το σύστημα

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Η βαθμίδα του πίνακα A είναι $\mathsf{r}(A) = 2$ δίοτι υπάρχει μια ορίζουσα τάξης δύο διαφορετική του μηδενός:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Επίσης, η βαθμίδα του επαυξημένου πίνακα $(A|B)$ είναι $\mathsf{r}(A|B) = 2$ διότι

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \quad \text{και} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Επομένως το σύστημα (Σ) είναι συμβιβαστό αφού $\mathsf{r}(A) = \mathsf{r}(A|B)$ και άρα το (Σ) είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{cases} x - y = 3 - z \\ x + y = 1 - z \end{cases} \implies 2x = 4 - 2z \implies x = 2 - z \implies y = -1$$

Θέτουμε $z = t \in \mathbb{R}$. Τότε η γενική λύση του (Σ) είναι

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 \\ z = t \end{cases}$$

(3) Έστω $\lambda = -1$. Τότε έχουμε το σύστημα

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + y - z = 1 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$$

όπου παρατηρούμε από την πρώτη και τρίτη εξίσωση ότι το σύστημα είναι αδύνατο. □

Άσκηση 8. Πότε το σύστημα

$$\begin{cases} x + 5y - 2z + 6w = \kappa \\ 4x - 3y + 7z + 12w = \lambda \\ 5x - 44y + 35z - 6w = \mu \end{cases}$$

είναι συμβιβαστό;

Λύση. Ο πίνακας και ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & 6 \\ 4 & -3 & 7 & 12 \\ 5 & -44 & 35 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad (A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & 6 & \kappa \\ 4 & -3 & 7 & 12 & \lambda \\ 5 & -44 & 35 & -6 & \mu \end{pmatrix}$$

Το σύστημα είναι συμβιβαστό αν και μόνο αν $\mathsf{r}(A) = \mathsf{r}(A|B)$. Η βαθμίδα του πίνακα A είναι $\mathsf{r}(A) = 2$ δίοτι υπάρχει μια ορίζουσα τάξης δύο διαφορετική του μηδενός:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -23 \neq 0$$

και οι ορίζουσες τρίτης τάξης που την περιβάλλουν είναι μηδέν, δηλαδή

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 7 \\ 5 & -44 & 35 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 4 & -3 & 12 \\ 5 & -44 & -6 \end{vmatrix}$$

Συνεπώς για να ισχύει $\mathsf{r}(A) = \mathsf{r}(A|B)$ *θα πρέπει*

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & \kappa \\ 4 & -3 & \lambda \\ 5 & -44 & \mu \end{vmatrix} = 0 \iff -\mu + 3\lambda - 7\kappa = 0$$

Άρα το σύστημα είναι συμβιβαστό αν και μόνο αν $-\mu + 3\lambda - 7\kappa = 0$. $\square$

Ενότητα 10

Άσκηση 1. *Έστω* $\mathfrak{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ *η κανονική βάση του* $\mathbb{R}^4$ *και* $\mathfrak{B}'$ *η βάση*

$$\mathfrak{B}' = \{\vec{\varepsilon}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_4,\ \ \vec{\varepsilon}_2 = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2,\ \ \vec{\varepsilon}_3 = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2,\ \ \vec{\varepsilon}_4 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4\}$$

Έστω $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ *η μοναδική γραμμική απεικόνιση έτσι ώστε:* $f(\vec{\varepsilon}_1) = 3\vec{\varepsilon}_2$, $f(\vec{\varepsilon}_2) = 7\vec{\varepsilon}_4$, $f(\vec{\varepsilon}_3) = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_3$ *και* $f(\vec{\varepsilon}_4) = \vec{\varepsilon}_1 - 5\vec{\varepsilon}_3$. *Να βρεθεί ο πίνακας* $M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f)$.

Λύση. *Έχουμε την κανονική βάση* $\mathfrak{B} = \{\vec{e_1} = (1,0,0,0), \vec{e_2} = (0,1,0,0), \vec{e_3} = (0,0,1,0), \vec{e_4} = (0,0,0,1)\}$ *του* $\mathbb{R}^4$. *Τότε από την περιγραφή της βάσης* $\mathfrak{B}'$ *έχουμε:*

$$\begin{cases} \vec{\varepsilon}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_4 \\ \vec{\varepsilon}_2 = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 \\ \vec{\varepsilon}_3 = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{\varepsilon}_4 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \vec{\varepsilon}_1 = (1,0,0,1) \\ \vec{\varepsilon}_2 = (1,3,0,0) \\ \vec{\varepsilon}_3 = (3,1,0,0) \\ \vec{\varepsilon}_4 = (1,1,1,1) \end{cases}$$

και άρα

$$\begin{cases} f(\vec{\varepsilon}_1) = 3\vec{\varepsilon}_2 \\ f(\vec{\varepsilon}_2) = 7\vec{\varepsilon}_4 \\ f(\vec{\varepsilon}_3) = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_3 \\ f(\vec{\varepsilon}_4) = \vec{\varepsilon}_1 - 5\vec{\varepsilon}_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(1,0,0,1) = (3,9,0,0) \\ f(1,3,0,0) = (7,7,7,7) \\ f(3,1,0,0) = (4,1,0,1) \\ f(1,1,1,1) = (-14,-5,0,1) \end{cases}$$

Έστω $(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$. *Τότε*

$$(x,y,z,w) = a(1,0,0,1) + b(1,3,0,0) + c(3,1,0,0) + d(1,1,1,1) = (a+b+3c+d, 3b+c+d, d, a+d)$$

και άρα έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} a + b + 3c + d = x \\ \quad\ 3b + c + d = y \\ \quad\quad\quad\quad\ d = z \\ a \quad\quad\quad\ + d = w \end{cases}$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα με τις γνωστές διαδικασίες τότε βρίσκουμε

$$\begin{cases} a = w - z \\ b = -\frac{1}{8}x + \frac{3}{8}y - \frac{3}{8}z + \frac{1}{8}w \\ c = \frac{3}{8}x - \frac{1}{8}y + \frac{1}{8}z - \frac{3}{8}w \\ d = z \end{cases}$$

Επομένως το τυχαίο διάνυσμα $(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$ *γράφεται ως εξής:*

$$(x,y,z,w) = (w-z)(1,0,0,1) + (-\frac{1}{8}x + \frac{3}{8}y - \frac{3}{8}z + \frac{1}{8}w)(1,3,0,0) + (\frac{3}{8}x - \frac{1}{8}y + \frac{1}{8}z - \frac{3}{8}w)(3,1,0,0) + z(1,1,1,1)$$

Άρα αν εφαρμόσουμε τη γραμμική απεικόνιση f στη παραπάνω σχέση τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
f(x,y,z,w) &= (w-z)f(1,0,0,1) + (-\frac{1}{8}x + \frac{3}{8}y - \frac{3}{8}z + \frac{1}{8}w)f(1,3,0,0) \\
&+ (\frac{3}{8}x - \frac{1}{8}y + \frac{1}{8}z - \frac{3}{8}w)f(3,1,0,0) + zf(1,1,1,1) \\
&= (w-z)(3,9,0,0) + (-\frac{1}{8}x + \frac{3}{8}y - \frac{3}{8}z + \frac{1}{8}w)(7,7,7,7) \\
&+ (\frac{3}{8}x - \frac{1}{8}y + \frac{1}{8}z - \frac{3}{8}w)(4,1,0,1) + z(-14,-5,0,1) \\
&\vdots \\
&= (\frac{5}{8}x + \frac{17}{8}y - \frac{153}{8}z + \frac{19}{8}w, -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}y - \frac{33}{2}z + \frac{19}{2}w, \\
&\quad -\frac{7}{8}x + \frac{21}{8}y - \frac{21}{8}z + \frac{7}{8}w, -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}y - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}w)
\end{aligned}$$

Τότε υπολογίζοντας την f στην κανονική βάση του $\mathbb{R}^4$ έχουμε:

$$\begin{cases}
f(1,0,0,0) = (\frac{5}{8}, -\frac{1}{2}, -\frac{7}{8}, -\frac{1}{2}) = \frac{5}{8}\vec{e_1} - \frac{1}{2}\vec{e_2} - \frac{7}{8}\vec{e_3} - \frac{1}{2}\vec{e_4} \\
f(0,1,0,0) = (\frac{17}{8}, \frac{5}{2}, \frac{21}{8}, \frac{5}{2}) = \frac{17}{8}\vec{e_1} + \frac{5}{2}\vec{e_2} + \frac{21}{8}\vec{e_3} + \frac{5}{2}\vec{e_4} \\
f(0,0,1,0) = (-\frac{153}{8}, -\frac{33}{2}, -\frac{21}{8}, -\frac{3}{2}) = -\frac{153}{8}\vec{e_1} - \frac{33}{2}\vec{e_2} - \frac{21}{8}\vec{e_3} - \frac{3}{2}\vec{e_4} \\
f(0,0,0,1) = (\frac{19}{8}, \frac{19}{2}, \frac{7}{8}, \frac{1}{2}) = \frac{19}{8}\vec{e_1} + \frac{19}{2}\vec{e_2} + \frac{7}{8}\vec{e_3} + \frac{1}{2}\vec{e_4}
\end{cases}$$

Συνεπώς ο πίνακας $M^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}}(f)$ της f είναι

$$M^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{17}{8} & -\frac{153}{8} & \frac{19}{8} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{33}{2} & \frac{19}{2} \\ -\frac{7}{8} & \frac{21}{8} & -\frac{21}{8} & \frac{7}{8} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

• • •

Διαφορετικά: *Μπορούμε να υπολογίσουμε τον ζητούμενο πίνακα $A := M^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}}(f)$ χωρίς να γνωρίζουμε την f ως εξής:*

Από τις σχέσεις

$$f(\vec{\varepsilon_1}) = 3\vec{\varepsilon_2}, \quad f(\vec{\varepsilon_2}) = 7\vec{\varepsilon_4}, \quad f(\vec{\varepsilon_3}) = \vec{\varepsilon_1} + \vec{\varepsilon_3}, \quad f(\vec{\varepsilon_4}) = \vec{\varepsilon_1} - 5\vec{\varepsilon_3}$$

βλέπουμε άμεσα ότι ο πίνακας της f στην βάση $\mathfrak{B}'$ είναι ο:

$$B := M^{\mathfrak{B}'}_{\mathfrak{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Σύμφωνα με την θεωρία, οι πίνακες A και B είναι όμοιοι και θα συνδέονται με την ακόλουθη σχέση:

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = B$$

όπου $P = M^{\mathfrak{B}'}_{\mathfrak{B}}$ είναι ο πίνακας μετάβασης από την $\mathfrak{B}$ στην $\mathfrak{B}'$. Επομένως θα έχουμε:

$$A = P \cdot B \cdot P^{-1} \qquad (*)$$

και το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση των P και P^{-1}. Επειδή:

$$\mathfrak{B}' = \{\vec{\varepsilon_1} = \vec{e_1} + \vec{e_4}, \quad \vec{\varepsilon_2} = \vec{e_1} + 3\vec{e_2}, \quad \vec{\varepsilon_3} = 3\vec{e_1} + \vec{e_2}, \quad \vec{\varepsilon_4} = \vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3} + \vec{e_4}\}$$

βλέπουμε άμεσα ότι:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ο P^{-1} μπορεί να υπολογισθεί είτε με την εύρεση του συμπληρωματικού του P ή ως ο πίνακας μετάβασης από την $\mathfrak{B}'$ στην $\mathfrak{B}$. Τότε ο πίνακας A προκύπτει από την σχέση $(*)$. $\square$

Άσκηση 2. *Έστω $f, g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ δύο γραμμικές απεικονίσεις και έστω η βάση του $\mathbb{R}^3$:*

$$\mathfrak{B} = \big\{\vec{e}_1 = (1,1,1),\, \vec{e}_2 = (1,1,0),\, \vec{e}_3 = (1,0,0)\big\}$$

Αν

$$M^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad M^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}}(g) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

να βρεθούν οι γραμμικές απεικονίσεις $f+g$ και $-3f+2g$.

Λύση. *Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι $M^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}}(f+g) = M^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}}(f) + M^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}}(g)$ και άρα*

$$M^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}}(f+g) = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως έχουμε

$$\begin{cases} (f+g)(\vec{e}_1) = 7\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 = 7(1,1,1) + 0(1,1,0) + 3(1,0,0) = (10,7,7) \\ (f+g)(\vec{e}_2) = 1\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 = (1,1,1) + (1,1,0) + 3(1,0,0) = (5,2,1) \\ (f+g)(\vec{e}_3) = 1\vec{e}_1 - 1\vec{e}_2 + 1\vec{e}_3 = (1,1,1) - 1(1,1,0) + (1,0,0) = (1,0,1) \end{cases}$$

Έστω $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Τότε το τυχαίο διάνυσμα (x,y,z) γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης $\mathfrak{B}$. Έστω $\kappa\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2 + \mu\vec{e}_3 = (x,y,z)$. Τότε

$$(x,y,z) = (\kappa+\lambda+\mu, \kappa+\lambda, \kappa) \implies \begin{cases} x = \kappa+\lambda+\mu \\ y = \kappa+\lambda \\ z = \kappa \end{cases} \implies \begin{cases} \kappa = z \\ \lambda = y - z \\ \mu = x - y \end{cases}$$

και άρα $(x,y,z) = z\vec{e}_1 + (y-z)\vec{e}_2 + (x-y)\vec{e}_3$. Αν εφαρμόσουμε τη γραμμική απεικόνιση $f+g$ στο διάνυσμα (x,y,z) τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} (f+g)(x,y,z) &= (f+g)(z\vec{e}_1 + (y-z)\vec{e}_2 + (x-y)\vec{e}_3) \\ &= z(f+g)(\vec{e}_1) + (y-z)(f+g)(\vec{e}_2) + (x-y)(f+g)(\vec{e}_3) \\ &= z(10,7,7) + (y-z)(5,2,1) + (x-y)(1,0,1) \\ &= (x+4y+5z, 2y+5z, x+6z) \end{aligned}$$

Συνεπώς $(f+g)(x,y,z) = (x+4y+5z, 2y+5z, x+6z)$ για κάθε $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Στην συνέχεια θα βρούμε τη γραμμική απεικόνιση $-3f+2g$. Έχουμε:

$$M^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}}(-3f+2g) = M^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}}(-3f) + M^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}}(2g) = -3M^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}}(f) + 2M^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}}(g) = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Επομένως έχουμε

$$\begin{cases} (-3f+2g)(\vec{e}_1) = 9\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3 = 9(1,1,1) + 0(1,1,0) + 6(1,0,0) = (15,9,9) \\ (-3f+2g)(\vec{e}_2) = -3\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 1\vec{e}_3 = -3(1,1,1) - 3(1,1,0) + (1,0,0) = (-5,-6,-3) \\ (-3f+2g)(\vec{e}_3) = -3\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 = -3(1,1,1) + 3(1,1,0) + 2(1,0,0) = (2,0,-3) \end{cases}$$

Έστω $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Δείξαμε παραπάνω ότι το τυχαίο διάνυσμα (x,y,z) γράφεται γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης $\mathfrak{B}$ ως εξής: $(x,y,z) = z\vec{e}_1 + (y-z)\vec{e}_2 + (x-y)\vec{e}_3$. Τότε αν εφαρμόσουμε τη γραμμική *απεικόνιση* $-3f+2g$ *στο τυχαίο διάνυσμα* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ *έχουμε:*

$$\begin{aligned}(-3f+2g)(x,y,z) &= (-3f+2g)(z\vec{e}_1+(y-z)\vec{e}_2+(x-y)\vec{e}_3)\\ &= z(-3f+2g)(\vec{e}_1)+(y-z)(-3f+2g)(\vec{e}_2)+(x-y)(-3f+2g)(\vec{e}_3)\\ &= z(15,9,9)+(y-z)(-5,-6,-3)+(x-y)(2,0,-3)\\ &= (2x-7y+20z,-6y+15z,-3x+12z)\end{aligned}$$

Συνεπώς $(-3f+2g)(x,y,z)=(2x-7y+20z,-6y+15z,-3x+12z)$ *για κάθε* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

Β' Τρόπος: *Αφού ξέρουμε τον πίνακα της* f *στη βάση* $\mathfrak{B}$ *και τον πίνακα της* g *στη βάση* $\mathfrak{B}$ *τότε μπορούμε να βρούμε τον τύπο της* f *και τον τύπο της* g *αντίστοιχα. Έχουμε:*

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1)=f(1,1,1)=\vec{e}_1+0\vec{e}_2+0\vec{e}_3=(1,1,1)\\ f(\vec{e}_2)=f(1,1,0)=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3=(3,2,1)\\ f(\vec{e}_3)=f(1,0,0)=\vec{e}_1-\vec{e}_2+0\vec{e}_3=(0,0,1)\end{cases}$$

Συνεπώς αν εφαρμόσουμε την f *στο τυχαίο διάνυσμα* $(x,y,z)=z\vec{e}_1+(y-z)\vec{e}_2+(x-y)\vec{e}_3$ *του* $\mathbb{R}^3$ *τότε έχουμε:*

$$\begin{aligned}f(x,y,z) &= f(z\vec{e}_1+(y-z)\vec{e}_2+(x-y)\vec{e}_3)\\ &= zf(\vec{e}_1)+(y-z)f(\vec{e}_2)+(x-y)f(\vec{e}_3)\\ &= z(1,1,1)+(y-z)(3,2,1)+(x-y)(0,0,1)\\ &= (3y-2z,2y-z,x)\end{aligned}$$

Συνεπώς $f(x,y,z)=(3y-2z,2y-z,x)$ *για κάθε* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. *Δουλεύοντας παρόμοια βρίσκουμε ότι* $g(x,y,z)=(x+y+7z,6z,6z)$ *για κάθε* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. *Τότε γνωρίζοντας τους τύπους της* f *και της* g *εύκολα υπολογίζουμε τους τύπους της* $f+g$ *και* $-3f+2g$. □

Άσκηση 3. *Έστω* $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ *μια γραμμική απεικόνιση της οποίας ο πίνακας στην κανονική βάση του* $\mathbb{R}^3$ *είναι ο ακόλουθος*

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&0\\-2&0&4\end{pmatrix}$$

(1) *Να βρεθεί το διάνυσμα* $f(x,y,z)$, *για κάθε* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.
(2) *Να βρεθεί ο πίνακας* B *της* f *στη βάση* $\mathfrak{B}=\{\vec{\varepsilon}_1=(1,0,-2),\ \vec{\varepsilon}_2=(0,1,0),\ \vec{\varepsilon}_3=(2,0,1)\}$.
(3) *Να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας* P *έτσι ώστε* $B=P^{-1}\cdot A\cdot P$.
(4) *Να υπολογισθεί ο πίνακας* A^n, $\forall n\geq 1$.

Λύση. (1) *Έστω* $\{\vec{e_1}=(1,0,0),\vec{e_2}=(0,1,0),\vec{e_3}=(0,0,1)\}$ *η κανονική βάση του* $\mathbb{R}^3$. *Τότε από τον πίνακα* A *έχουμε:*

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1)=\vec{e}_1+0\vec{e}_2-2\vec{e}_3=(1,0,-2)\\ f(\vec{e}_2)=0\vec{e}_1+0\vec{e}_2+0\vec{e}_3=(0,0,0)\\ f(\vec{e}_3)=-2\vec{e}_1+0\vec{e}_2+4\vec{e}_3=(-2,0,4)\end{cases}$$

Επομένως ο τύπος της f *είναι*

$$\begin{aligned}f(x,y,z) &= f(x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3)\\ &= xf(\vec{e}_1)+yf(\vec{e}_2)+zf(\vec{e}_3)\\ &= x(1,0,-2)+y(0,0,0)+z(-2,0,4)\\ &= (x-2z,0,-2x+4z)\end{aligned}$$

δηλαδή $f(x,y,z)=(x-2z,0,-2x+4z),\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

(2) *Αφού θέλουμε να βρούμε τον πίνακα της* f *στη βάση* $\mathfrak{B}$ *θα υπολογίσουμε την* f *στα διανύσματα της* $\mathfrak{B}$ *και στην συνέχεια θα τα εκφράσουμε ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων της* $\mathfrak{B}$. *Έχουμε:*

$$\begin{cases} f(\vec{\varepsilon}_1)=f(1,0,-2)=(5,0,-10)=5\vec{\varepsilon}_1+0\vec{\varepsilon}_2+0\vec{\varepsilon}_3\\ f(\vec{\varepsilon}_2)=f(0,1,0)=(0,0,0)=0\vec{\varepsilon}_1+0\vec{\varepsilon}_2+0\vec{\varepsilon}_3\\ f(\vec{\varepsilon}_3)=f(2,0,1)=(0,0,0)=0\vec{\varepsilon}_1+0\vec{\varepsilon}_2+0\vec{\varepsilon}_3\end{cases}$$

Άρα ο πίνακας της f στη βάση $\mathfrak{B}$ είναι

$$B = M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) *Ο αντιστρέψιμος πίνακας P που ψάχνουμε είναι ο πίνακας μετάβασης από την κανονική βάση $\{\vec{e_1} = (1,0,0), \vec{e_2} = (0,1,0), \vec{e_3} = (0,0,1)\}$ στη βάση $\mathfrak{B} = \{\vec{\varepsilon}_1 = (1,0,-2),\ \vec{\varepsilon}_2 = (0,1,0),\ \vec{\varepsilon}_3 = (2,0,1)\}$. Αυτό σημαίνει ότι γράφουμε τα διανύσματα της $\mathfrak{B}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων της κανονικής βάσης. Άρα έχουμε:*

$$\begin{cases} \vec{\varepsilon}_1 = (1,0,-2) = \vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 \\ \vec{\varepsilon}_2 = (0,1,0) = 0\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 \\ \vec{\varepsilon}_3 = (2,0,1) = 2\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases} \Longrightarrow \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας P^{-1} είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\mathfrak{B}$ στην κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$, δηλαδή τώρα γράφουμε τα διανύσματα της κανονικής βάσης του $\mathbb{R}^3$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων της βάσης $\mathfrak{B}$. Διαφορετικά απλά υπολογίζουμε τον αντίστροφο πίνακα του P με το συνήθη τρόπο. Και στις δύο περιπτώσεις βρίσκουμε ότι

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Επίσης εύκολα επαληθεύουμε τη σχέση: $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

(4) *Από την τελευταία σχέση ο πίνακας A γράφεται ως εξής:* $A = P \cdot B \cdot P^{-1}$. *Επομένως έχουμε*

$$\begin{aligned} A^2 &= A \cdot A \\ &= (P \cdot B \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot B \cdot P^{-1}) \\ &= P \cdot B \cdot P^{-1} P \cdot B \cdot P^{-1} \\ &= P \cdot B \cdot I_3 \cdot B \cdot P^{-1} \\ &= P \cdot B^2 \cdot P^{-1} \end{aligned}$$

και άρα για κάθε $n \geq 1$ έχουμε:

$$A^n = P \cdot B^n \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 5^{n-1} & 0 & -2 \cdot 5^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 \cdot 5^{n-1} & 0 & 4 \cdot 5^{n-1} \end{pmatrix} \qquad \square$$

Άσκηση 4. *Έστω η απεικόνιση $f : \mathbb{R}_3[t] \longrightarrow \mathbb{R}_2[t]$, $f(P(t)) = P(t)' - P(t)''$.*

(1) *Να δείξετε ότι η f είναι γραμμική.*
(2) *Να βρείτε μια βάση του $\operatorname{Ker} f$ και μια βάση της $\operatorname{Im} f$.*
(3) *Να βρεθεί ο πίνακας $M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{C}}(f)$, όπου $\mathfrak{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}_3[t]$ και $\mathfrak{C} = \{1, t, t^2\}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}_2[t]$.*
(4) *Να βρεθεί ο πίνακας $M_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{C}'}(f)$ όπου $\mathfrak{B}' = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}_3[t]$ και $\mathfrak{C}' = \{1, 2t-1, -1-4t+3t^2\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}_2[t]$.*
(5) *Να προσδιοριστούν αντιστρέψιμοι πίνακες P, Q έτσι ώστε:* $B = Q^{-1} \cdot A \cdot P$.

Λύση. (1) *Έστω $P(t), Q(t) \in \mathbb{R}_3[t]$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε*

$$\begin{aligned} f(P(t)+Q(t)) &= (P(t)+Q(t))' - (P(t)+Q(t))'' \\ &= P(t)' + Q(t)' - P(t)'' - Q(t)'' \\ &= (P(t)' - P(t)'') + (Q(t)' - Q(t)'') \\ &= f(P(t)) + f(Q(t)) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} f(\lambda P(t)) &= (\lambda P(t))' - (\lambda P(t))'' \\ &= \lambda P(t)' - \lambda P(t)'' \\ &= \lambda (P(t)' - P(t)'') \\ &= \lambda f(P(t)) \end{aligned}$$

Άρα η απεικόνιση f είναι γραμμική.

(2) *Έστω $P(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \delta t^3 \in \mathbb{R}_3[t]$. Τότε: $P(t) \in \operatorname{Ker} f$ αν και μόνον αν:*

$$f(P(t)) = 0 \iff P(t)' - P(t)'' = 0 \qquad (*)$$

Έχουμε $P(t)' = \beta + 2\gamma t + 3\delta t^2$ και $P(t)'' = 2\gamma + 6\delta t$. Τότε:

$$\begin{aligned} P(t)' - P(t)'' = 0 &\implies (\beta + 2\gamma t + 3\delta t^2) - (2\gamma + 6\delta t) = 0 \\ &\implies (\beta - 2\gamma) + (2\gamma - 6\delta)t + 3\delta t^2 = 0 + 0t + 0t^2 \\ &\implies \beta = \gamma = \delta = 0 \end{aligned}$$

Συνεπώς ο πυρήνας της f είναι

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &= \{P(t) \in \mathbb{R}_3[t] \mid f(P(t)) = 0\} \\ &= \{P(t) \in \mathbb{R}_3[t] \mid \beta = \gamma = \delta = 0\} \\ &= \{P(t) = a \in \mathbb{R}_3[t] \mid a \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a \cdot 1 \mid a \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle 1 \rangle \end{aligned}$$

Άρα ο πυρήνας $\operatorname{Ker} f$ της f αποτελείται από όλα τα σταθερά πολυώνυμα και βάση του $\operatorname{Ker} f$ είναι το σταθερό πολυώνυμο 1. Στην συνέχεια θα βρούμε μια βάση της εικόνας $\operatorname{Im} f$ της f. Από την εξίσωση των διαστάσεων έχουμε:

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_3[t] = \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} f + \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} f \implies \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} f = 4 - 1 = 3$$

και $\operatorname{Im} f$ υπόχωρος του $\mathbb{R}_2[t]$. Τότε $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}_2[t]$ αφού $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_2[t] = 3$. Επομένως μια βάση της εικόνας $\operatorname{Im} f$ της f είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}_2[t]$, δηλαδή το σύνολο $\{1, t, t^2\}$. Διαφορετικά:

$$\mathbb{R}_3[t] = \langle 1, t, t^2, t^3 \rangle \implies \operatorname{Im} f = f(\mathbb{R}_3[t]) = \langle f(1), f(t), f(t^2), f(t^3) \rangle = \langle 1, 2t - 2, 3t^2 - 6t \rangle$$

Άρα τα παραπάνω διανύσματα αποτελούν βάση της $\operatorname{Im} f$ της f διότι είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επίσης αφού $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} f = 3$ και έχουμε βρεί τρία διανύσματα που παράγουν τον χώρο τότε από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι αποτελούν βάση.

(3) *Έχουμε:*

$$\begin{cases} f(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 \\ f(t) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 \\ f(t^2) = 2t - 2 = -2 \cdot 1 + 2 \cdot t + 0 \cdot t^2 \\ f(t^3) = 3t^2 - 6t = 0 \cdot 1 - 6 \cdot t + 3 \cdot t^2 \end{cases} \implies A = M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(4) *Έχουμε:*

$$\begin{cases} f(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot (2t - 1) + 0 \cdot (-1 - 4t + 3t^2) \\ f(1 + t) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (2t - 1) + 0 \cdot (-1 - 4t + 3t^2) \\ f(1 + t + t^2) = -1 + 2t = 0 \cdot 1 + 1 \cdot (2t - 1) + 0 \cdot (-1 - 4t + 3t^2) \\ f(1 + t + t^2 + t^3) = -1 - 4t + 3t^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot (2t - 1) + 1 \cdot (-1 - 4t + 3t^2) \end{cases}$$

και άρα ο πίνακας $M_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{C}'}(f)$ είναι

$$B = M_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{C}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(5) *Οι πίνακες A και B που βρήκαμε παραπάνω είναι όμοιοι διότι είναι οι πίνακες στην ίδια γραμμική απεικόνιση f σε διαφορετικά ζεύγη βάσεων. Επομένως από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες P, Q έτσι ώστε: $B = Q^{-1} \cdot A \cdot P$. Ο πίνακας P είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\mathfrak{B}$ στη βάση $\mathfrak{B}'$ ενώ ο πίνακας Q είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\mathfrak{C}$ στη βάση $\mathfrak{C}'$. Έχουμε:*

$$\begin{cases} 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3 \\ 1 + t = 1 \cdot 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3 \\ 1 + t + t^2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot t + 1 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3 \\ 1 + t^2 + t^3 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot t + 1 \cdot t^2 + 1 \cdot t^3 \end{cases} \implies P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και

$$\left\{\begin{array}{l} 1 = 1\cdot 1 + 0\cdot t + 0\cdot t^2 \\ 2t-1 = -1\cdot 1 + 2\cdot t + 0\cdot t^2 \\ -1-4t+3t^2 = -1\cdot 1 - 4\cdot t + 3\cdot t^2 \end{array}\right. \qquad \Longrightarrow \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας Q^{-1} είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\mathfrak{C}'$ στη βάση $\mathfrak{C}$. Μπορούμε όμως να υπολογίσουμε απλά τον αντίστροφο του πίνακα Q. Τότε

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Συνεπώς βρήκαμε αντιστρέψιμους πίνακες P, Q έτσι ώστε: $Q^{-1}\cdot A\cdot P = B$. □

Άσκηση 5. *Έστω*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί η βαθμίδα $\mathbf{r}(A) := r$ του A και ακολούθως να βρεθούν αντιστρέψιμοι πίνακες P, Q έτσι ώστε

$$Q^{-1}\cdot A\cdot P = \begin{pmatrix} I_r & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}$$

όπου I_r είναι ο μοναδιαίος $r\times r$ πίνακας.

Λύση. *Θεωρούμε ότι ο 3×4 πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

είναι ο πίνακας τής $\mathbb{K}$-γραμμικής απεικόνισης

$$\phi:\ M_{4\times 1}(\mathbb{K}) \longrightarrow M_{3\times 1}(\mathbb{K})$$

ως προς τις αντίστοιχες κανονικές βάσεις

$$\mathcal{B}_4 = \left\{ \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

του $M_{4\times 1}(\mathbb{K})$ και

$$\mathcal{B}_3 = \left\{ \vec{\epsilon}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\epsilon}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\epsilon}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

του $M_{3\times 1}(\mathbb{K})$. Δηλαδή, αν $\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \in M_{4\times 1}(\mathbb{K})$, τότε

$$\phi(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta + \gamma + 2\delta \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma + 2\delta \\ \alpha + 5\beta + 3\gamma - 2\delta \end{pmatrix}$$

Προσδιορίζουμε τον $\mathrm{Ker}\phi$: Ένα διάνυσμα $\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$ ανήκει στον πυρήνα τής ϕ, αν και μόνο αν,

$$\begin{pmatrix} \alpha - \beta + \gamma + 2\delta \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma + 2\delta \\ \alpha + 5\beta + 3\gamma - 2\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Επιλύοντας το αντίστοιχο ομογενές σύστημα:

$$\begin{aligned} \alpha - \beta + \gamma + 2\delta &= 0 \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma + 2\delta &= 0 \\ \alpha + 5\beta + 3\gamma - 2\delta &= 0 \end{aligned}$$

ως προς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, *διαπιστώνουμε ότι το διάνυσμα* $\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$ *ανήκει στον πυρήνα τής* ϕ, *αν και μόνο αν*

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\frac{\alpha}{2} - \beta \\ -\frac{\alpha}{4} + \beta \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Συνεπώς η διάσταση τού πυρήνα είναι 2 *και μια βάση του είναι η* $\mathcal{K} = \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. *Συμπληρώνουμε τη βάση αυτή σε μια βάση τού* $M_{4\times 1}(\mathbb{K})$. *Πράγματι, το σύνολο*

$$\mathcal{C}_4 = \left\{ \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{c}_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

είναι βάση τού $M_{4\times 1}(\mathbb{K})$. *Αυτό ελέγχεται εύκολα, διαπιστώνοντας ότι η ορίζουσα τού πίνακα*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι διάφορη τού μηδενός. Η εικόνα $\mathrm{Im}(\phi)$ *έχει διάσταση* $4 - \dim(\mathrm{Ker}\,\phi) = 2$. *Αυτή είναι ακριβώς και η βαθμίδα τού* A *επειδή γνωρίζουμε ότι* $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(\phi) = r(A)$. *Επιπλέον η εικόνα* $\mathrm{Im}(\phi)$ *παράγεται από τα διανύσματα* $\phi(\vec{c}_1), \phi(\vec{c}_2)$, *τα οποία μάλιστα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αφού από* $\lambda\phi(\vec{c}_1) + \mu\phi(\vec{c}_2) = \vec{0}$, *έπεται* $\phi(\lambda\vec{c}_1 + \mu\vec{c}_2) = \vec{0}$. *Τότε όμως το διάνυσμα* $\lambda\vec{c}_1 + \mu\vec{c}_2$ *ανήκει στον πυρήνα* $\mathrm{Ker}\phi$, *πράγμα αδύνατο, επειδή από* $\lambda\vec{c}_1 + \mu\vec{c}_2 = \rho\vec{c}_3 + \tau\vec{c}_4$, *έπεται* $\lambda = \mu = \rho = \tau = 0$. *Ώστε μια βάση τής εικόνας είναι το σύνολο*

$$\mathcal{L} = \left\{ \phi(\vec{c}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \phi(\vec{c}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

Συμπληρώνουμε την $\mathcal{L}$ *σε μια βάση τού* $M_{3\times 1}(\mathbb{K})$. *Πράγματι, το σύνολο*

$$C_3 = \left\{ \vec{\gamma}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{\gamma}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{\gamma}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

είναι βάση τού $M_{3\times 1}(\mathbb{K})$. *(Τα τρία διανύσματα τού* C_3 *είναι γραμμικά ανεξάρτητα σε έναν χώρο διάστασης* 3.*) Ας δούμε τη μορφή έχει ο πίνακας* $M(\phi)_{C_4}^{C_3}$ *τής* ϕ *ως προς τις βάσεις* C_4, C_3. *Έχουμε:*

$$\phi(\vec{c}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\vec{\gamma}_1 + 0\vec{\gamma}_2 + 0\vec{\gamma}_3,$$

$$\phi(\vec{c}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 0\vec{\gamma}_1 + 1\vec{\gamma}_2 + 0\vec{\gamma}_3,$$

$$\phi(\vec{c}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\vec{\gamma}_1 + 0\vec{\gamma}_2 + 0\vec{\gamma}_3,$$

$$\phi(\vec{c}_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\vec{\gamma}_1 + 0\vec{\gamma}_2 + 0\vec{\gamma}_3$$

Επομένως,

$$M(\phi)_{C_4}^{C_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι

$$M(\phi)_{C_4}^{C_3} = (M_{\mathcal{B}_3}^{C_3})^{-1} \cdot M(\phi)_{\mathcal{B}_4}^{\mathcal{B}_3} \cdot M_{\mathcal{B}_4}^{C_4},$$

όπου ο $M_{\mathcal{B}_4}^{C_4}$ *είναι ο πίνακας μετάβασης από την* $\mathcal{B}_4$ *στη* C_4 *και ο* $M_{\mathcal{B}_3}^{C_3}$ *είναι ο πίνακας μετάβασης από την* $\mathcal{B}_3$ *στη* C_3. *Δηλαδή,*

$$M(\phi)_{\mathcal{B}_4}^{C_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{και} \quad M(\phi)_{\mathcal{B}_3}^{C_3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Ώστε ο P *τής άσκησης είναι ο* $M_{\mathcal{B}_4}^{C_4}$ *και ο* Q *τής άσκησης είναι ο* $M_{\mathcal{B}_3}^{C_3}$. *Αυτό ελέγχεται αφού το αποτέλεσμα τού πολλαπλασιασμού:*

$$Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Για βοήθεια:* $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Αφού λοιπόν ο A *είναι ισοδύναμος με τον* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *έχει την ίδια βαθμίδα με αυτόν, δηλαδή* 2. $\square$