### *Κίνηση με σταθερή δύναμη*

Υλικό σημείο μάζας $m$ κινείται κατά τον άξονα $x΄x$. Τη στιγμή $t_0 = 0$, βρίσκεται στη θέση $x = x_0$, έχει ταχύτητα $\upsilon_0$, και αρχίζει να ενεργεί πάνω του σταθερή δύναμη $\vec{F}_0$ ομόρροπη της ταχύτητάς του. Να βρείτε για κάθε $t$: α) την ταχύτητα του και β) τη θέση του.

**Λύση**

α) Το υλικό σημείο, με την επίδραση της σταθερής δύναμης, θα εκτελέσει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με σταθερή επιτάχυνση $\alpha_x = \frac{F}{m}$. Ισχύει: $\alpha_x = \frac{d\upsilon}{dt}$ ή $d\upsilon = \alpha_x \cdot dt$ ή $\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} d\upsilon = \frac{F}{m}\int_0^t dt$ ή $\upsilon = \upsilon_0 + \frac{F}{m}\cdot t$.

iii) Από τον ορισμό της ταχύτητας $\upsilon = \frac{dx}{dt}$ έχουμε: $dx = \upsilon \cdot dt$ ή $\int_{x_0}^{x} dx = \upsilon_0 \int_0^t dt + \frac{F}{m}\int_0^t t \cdot dt$ ή $x = x_0 + \upsilon_0 \cdot t + \frac{F}{m}\cdot t^2$.

Υλικό σημείο μάζας $m$ κινείται ευθύγραμμα κατά τον άξονα $x΄x$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ βρίσκεται στη θέση $x = x_0$, έχει ταχύτητα $\upsilon_0$ και αρχίζει να ασκείται σε αυτό δύναμη μέτρου $F = \mathrm{k}\cdot t$ όπου k σταθερά αναλογίας, αντίρροπη της ταχύτητάς του. Να βρείτε σε συνάρτηση με το χρόνο:
α) την επιτάχυνση, β) την ταχύτητα και γ) τη θέση.

**Λύση**

α) Η επιτάχυνση του υλικού σημείου είναι $\vec{\alpha}_x = \frac{\vec{F}}{m}$ ή $\alpha_x = \frac{\mathrm{k}}{m}\cdot t$.

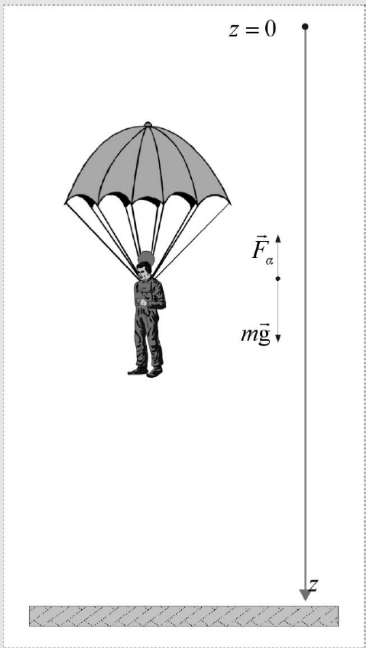
β) Είναι $\alpha_x = \frac{d\upsilon}{dt}$ ή $d\upsilon = \alpha_x \cdot dt$ ή $\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} d\upsilon = \frac{\mathrm{k}}{m}\int_0^t dt$ ή $\upsilon = \upsilon_0 + \frac{\mathrm{k}}{2m}\cdot t^2$.

γ) Από τον ορισμό της ταχύτητας $\upsilon = \frac{dx}{dt}$ έχουμε: $dx = \upsilon \cdot dt$ ή $\int_{x_0}^{x} dx = \upsilon_0 \int_0^t dt + \frac{\mathrm{k}}{2m}\int_0^t t^2 dt$ ή

$x = x_0 + \upsilon_0 \cdot t + \frac{\mathrm{k}}{6m}\cdot t^3$.

### *Δύναμη που μεταβάλλεται με την ταχύτητα*

Τη στιγμή $t_0 = 0$ ένας αλεξιπτωτιστής, σχήμα (3.8) μάζας $m$ βρίσκεται στη θέση $z = 0$ και έχει ταχύτητα $\upsilon_0$. Η αντίσταση του αέρα που ασκείται στο αλεξίπτωτο περιγράφεται από την εξίσωση $\vec{F}_\alpha = -\beta \cdot \vec{\upsilon}$ όπου β σταθερά αναλογίας και $\vec{\upsilon}$ η στιγμιαία ταχύτητα του αλεξιπτωτιστή.
Α. Να βρείτε σε συνάρτηση με το χρόνο: α) την ταχύτητα, β) τη θέση του αλεξιπτώτου, γ) την επιτάχυνση.
Β. Δείξτε ότι ο αλεξιπτωτιστής αποκτά μια οριακή ταχύτητα $\upsilon_T = \frac{m\cdot \mathrm{g}}{\beta}$.




*Σχήμα 3.8 Η συνολική δύναμη που α-σκείται στον αλεξιπτωτιστή είναι:* $\vec{F} = (m\cdot \mathrm{g} - \beta\cdot\upsilon)\cdot\vec{k}$.

**Λύση**

Α. α) Έστω ότι ο αλεξιπτωτιστής, τον οποίο θεωρούμε ως υλικό σημείο, βρίσκεται στη θέση $z$ τη χρονική στιγμή $t$. Η συνολική δύναμη που ενεργεί σε αυτόν είναι $\vec{F} = (m\cdot g - \beta\cdot\upsilon)\cdot\vec{\mathrm{k}}$. Σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε: $\alpha_z = \frac{F}{m}$ ή $\alpha_z = \frac{d\upsilon}{dt} = \mathrm{g} - \frac{\beta}{m}\upsilon$.

Συνεπώς $\frac{m\cdot d\upsilon}{m\cdot \mathrm{g} - \beta\cdot\upsilon} = dt$ ή $\int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{m\cdot \mathrm{g} - \beta\cdot\upsilon} = \frac{1}{m}\int_0^t dt$ ή

$-\frac{1}{\beta}\int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{d(m\cdot \mathrm{g} - \beta\cdot\upsilon)}{m\cdot \mathrm{g} - \beta\cdot\upsilon} = \frac{1}{m}\int_0^t dt$ ή $\ln[m\cdot \mathrm{g} - \beta\cdot\upsilon]_{\upsilon_0}^{\upsilon} = -\frac{\beta}{m}t$ ή

$m\cdot \mathrm{g} - \beta\cdot\upsilon = (m\cdot \mathrm{g} - \beta\cdot\upsilon_0)e^{-\frac{\beta}{m}t}$ ή $\beta\cdot\upsilon = m\cdot \mathrm{g} - (\beta\cdot\upsilon_0 - m\cdot \mathrm{g})e^{-\frac{\beta}{m}t}$ ή

$$\upsilon = \frac{m\cdot \mathrm{g}}{\beta} + \left(\upsilon_0 - \frac{m\cdot \mathrm{g}}{\beta}\right)e^{-\frac{\beta}{m}t} \qquad (1)$$

β) Έχουμε $\upsilon = \frac{dz}{dt}$ ή $dz = \upsilon\cdot dt$ ή $\int_0^z dz = \frac{m\cdot \mathrm{g}}{\beta}\int_0^t dt + \upsilon_0\int_0^t e^{-\frac{\beta}{m}t}dt - \frac{m\cdot \mathrm{g}}{\beta}\int_0^t e^{-\frac{\beta}{m}t}dt$ ή

$$z = \frac{m\cdot \mathrm{g}\cdot \mathrm{t}}{\beta} + \frac{m}{\beta}\left(\upsilon_0 - \frac{m\cdot \mathrm{g}}{\beta}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{m}t}\right)$$

γ) Για την επιτάχυνση έχουμε $\alpha = \frac{d\upsilon}{dt}$ και από την (1) προκύπτει: $\alpha = \left(\mathrm{g} - \frac{\beta\cdot\upsilon_0}{m}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{m}t}$

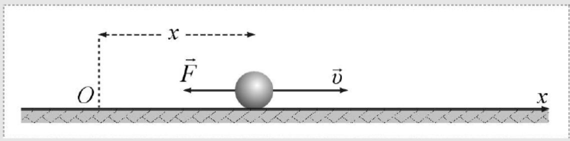
Β. Από την (1) για $t = \infty$ προκύπτει η οριακή ταχύτητα $\upsilon_T = \frac{m\cdot \mathrm{g}}{\beta}$.

Υλικό σημείο κινείται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα $x'x$. Τη στιγμή $t_0 = 0$ βρίσκεται στη θέση $x = x_0$ έχει ταχύτητα $\upsilon_0$ και αρχίζει να ενεργεί πάνω του δύναμη η οποία περιγράφεται από την εξίσωση $\vec{F} = -k\cdot\upsilon^2\cdot\vec{i}$ όπου k θετική σταθερά της αναλογίας. Να βρείτε: α) την ταχύτητά του ως συνάρτηση του χρόνου $t$ και ως συνάρτηση του διαστήματος $x$ που έχει διανύσει το υλικό σημείο από τη στιγμή $t_0 = 0$, β) την επιτάχυνσή του και γ) το διάστημα x σε συνάρτηση με το χρόνο.

**Λύση**

α) i) Έστω x η θέση του υλικού σημείου τη στιγμή t και $\vec{\upsilon}$ η ταχύτητα του (σχήμα 3.9). Η δύναμη κατά τη διεύθυνση της κίνησης είναι $\vec{F} = -k\cdot\upsilon^2\cdot\vec{i}$ .

ii) Σύμφωνα με τον 2[ο] νόμο του Νεύτωνα έχουμε:




*Σχήμα 3.9* Στο υλικό σημείο ασκείται δύναμη $\vec{F} = -k\cdot\upsilon^2\cdot\vec{i}$.

$$m\frac{d\upsilon}{dt}\vec{i} = -\mathrm{k}\cdot\upsilon^2\cdot\vec{i} \quad \text{ή} \quad \frac{d\upsilon}{\upsilon^2} = -\frac{\mathrm{k}}{m}dt \quad \text{ή}$$

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} d\left(-\frac{1}{\upsilon}\right) = \frac{k}{m}\int_0^t dt \quad \text{ή} \quad -\frac{1}{\upsilon} + \frac{1}{\upsilon_0} = -\frac{\mathrm{k}}{m}t \quad \text{ή}$$

$$\frac{1}{\upsilon} = \frac{1}{\upsilon_0} + \frac{k}{m}t \quad \text{ή} \qquad \upsilon(t) = \frac{m\cdot\upsilon_0}{m + k\cdot\upsilon_0\cdot t} \qquad (1)$$

Ισχύει: $\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha}$ ή $-\mathrm{k}\cdot\upsilon^2 = m\frac{d\upsilon}{dt}$ ή $-\mathrm{k}\cdot\upsilon^2 = m\frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt}$ ή $-\mathrm{k}\cdot\upsilon^2 = m\frac{d\upsilon}{dx}\upsilon$ ή $\int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\frac{k}{m}\int_0^x dx$ ή

$$\ln\upsilon\Big|_{\upsilon_0}^{\upsilon} = -\frac{k}{m}x \quad \text{ή} \quad \ln\upsilon - \ln\upsilon_0 = -\frac{k}{m}x \quad \text{ή} \quad \ln\frac{\upsilon}{\upsilon_0} = -\frac{k}{m}x \quad \text{ή} \quad \frac{\upsilon}{\upsilon_0} = \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}x} \quad \text{ή} \quad \upsilon(x) = \upsilon_0\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}x}.$$

β) Από την (1) έχουμε: $\alpha = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\cdot\upsilon_0}{m + k\cdot\upsilon_0\cdot t}\right)$ ή $\alpha = -\frac{-k\cdot m\cdot\upsilon_0^2}{(m + k\cdot\upsilon_0\cdot t)^2}$.

γ) Έχουμε $\upsilon = \frac{dx}{dt}$ ή $dx = \frac{m\cdot\upsilon_0}{m + k\cdot\upsilon_0\cdot t}dt$ ή $\int_0^x dx = m\cdot\upsilon_0\int_0^t\frac{dt}{m + k\cdot\upsilon_0\cdot t}$ ή $x = \frac{m}{\mathrm{k}}\int_0^t\frac{d(m + k\cdot\upsilon_0\cdot t)}{m + k\cdot\upsilon_0\cdot t}$ ή

$$x = \frac{m}{k}\ln(m + k\cdot\upsilon_0\cdot t)\Big|_0^t \quad \text{ή} \quad x = \frac{m}{k}[\ln(m + k\cdot\upsilon_0\cdot t) - \ln m] \quad \text{ή} \quad x = \frac{m}{k}\ln\left(1 + \frac{k\cdot\upsilon_0}{m}t\right).$$

Τρία σώματα μάζας 4kg το καθένα κρέμονται με αβαρή και μη έκτατα νήματα (σχήμα 3.12 α) και το σύστημα ισορροπεί. Να βρείτε το μέτρο της τάσης για κάθε νήμα.

**Λύση**

i) Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα είναι:

$$\vec{T}_1' = -\vec{T}_1, \; \vec{T}_2' = -\vec{T}_2$$

ii) Εφαρμόζουμε τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα για κάθε σώμα:

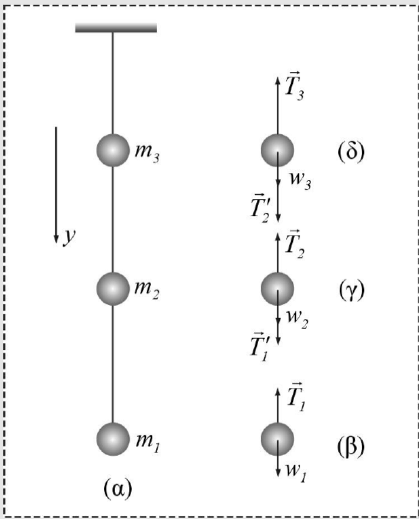
$m_1$: $\Sigma\vec{F}_y = \vec{0}$ ή $w_1 - T_1 = 0$ ή $T_1 = w_1$ ή $T_1 = 40\,\mathrm{N}$

$m_2$: $\Sigma\vec{F}_y = \vec{0}$ ή $w_2 + T_1' - T_2 = 0$ ή $T_2 = w_2 + T_1'$ ή

$T_2 = w_1 + w_2$ ή $T_2 = 80\,\mathrm{N}$

$m_3$: $\Sigma\vec{F}_y = \vec{0}$ ή $w_3 + \vec{T}_2' - T_3 = 0$ ή $T_3 = w_3 + \vec{T}_2'$ ή

$T_3 = w_1 + w_2 + w_3$ ή $T_3 = 120\,\mathrm{N}$




*Σχήμα 3.12* α) Τρία σώματα ισορροπούν κατακόρυφα κρεμασμένα από αβαρή και μη έκτατά νήματα. (β), (γ), (δ) διαγράμματα ελεύθερου σώματος για τα σώματα $m_1$, $m_2$, $m_3$ αντίστοιχα.

Δυο σώματα $Σ_1$, $Σ_2$ με μάζες αντίστοιχα $m_1$ και $m_2$, $(m_1 \neq m_2)$, συνδέονται με αβαρές και μη έκτατο νήμα το οποίο διέρχεται από το αυλάκι τροχαλίας αμελητέας μάζας. Το σώμα μάζας $m_1$ βρίσκεται πάνω σε λείο πλάγιο επίπεδο γωνίας κλίσης $φ$, ενώ το σώμα $Σ_2$ κρέμεται κατακόρυφα (Σχήμα 3.13). Το σύστημα αρχικά ηρεμεί με το νήμα τεντωμένο. Τη στιγμή $t_0 = 0$ αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο. Να βρείτε: α) την επιτάχυνση των σωμάτων και β) την τάση του νήματος.

**Λύση**

i) Εφόσον το μήκος του νήματος δε μεταβάλλεται όταν βρίσκεται υπό τάση τα σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ θα έχουν επιτάχυνση ίσου μέτρου $α$. Τα σχήματα 3.13b και 3.13c δείχνουν τα διαγράμματα ελεύθερου σώματος.

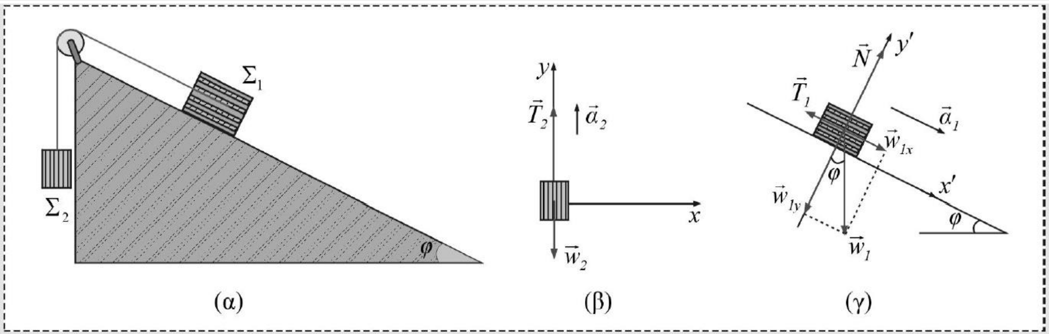
ii) Εφαρμόζουμε το 2ο νόμο του Νεύτωνα για το $Σ_2$ υποθέτοντας ότι κινείται προς τα πάνω: $Σ\vec{F}_y = m_2 \cdot \vec{α}_2$ ή

$$T_2 - m_2 \cdot g = m_2 \cdot α \qquad (1)$$

iii) Για το σώμα $Σ_1$ επιλέγουμε το βολικό σύστημα συντεταγμένων με κατευθύνσεις των αξόνων όπως φαίνεται στο σχήμα 3.13γ. Έχουμε: $Σ\vec{F}_{x'} = m_1 \cdot \vec{α}_1$ ή

$$m_1 \cdot g \cdot \sin φ - T_1 = m_1 \cdot α_1 \qquad (2)$$

$Σ\vec{F}_{y'} = \vec{0}$ ή $N - m_1 \cdot g \cdot \cos φ = 0$




*Σχήμα 3.13 (α) Δυο σώματα συνδεδεμένα με αβαρές και μη εκτατό νήμα το οποίο διέρχεται από τροχαλία. (β) Διάγραμμα ελεύθερου σώματος για το $Σ_1$. (γ) Διάγραμμα ελεύθερου σώματος για το $Σ_1$.*

iv) Επιλύουμε το σύστημα των (1), (2) και βρίσκουμε:

$$α)\ \ α = \frac{m_1 \cdot \sin φ - m_2}{m_1 + m_2} g, \qquad β)\ \ T = \frac{m_1 \cdot m_2 (1 + \sin φ)}{m_1 + m_2} g$$

**Παρατηρήσεις:**

1) Για να είναι $α > 0$ θα πρέπει $m_1 \cdot \sin φ > m_2$.

2) Αν $m_2 > m_1$ το $Σ_2$ κινείται κατακόρυφα προς τα κάτω και το $Σ_1$ ανέρχεται κατά μήκος του πλάγιου επιπέδου.

Η μηχανή του Atwood είναι μια διάταξη που αποτελείται από δυο άνισες μάζες οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με νήμα αβαρές και μη έκτατο το οποίο διέρχεται από το αυλάκι τροχαλίας αμελητέας μάζας (σχήμα 3.14). Η μηχανή του Atwood αποτελεί πολύ διαδεδομένη εργαστηριακή άσκηση για τη μέτρηση της επιτάχυνσης της βαρύτητας. Να υπολογίσετε: α) το μέτρο της επιτάχυνσης των μαζών $m_1$, $m_2$, β) το μέτρο της τάσης του νήματος και γ) το μέτρο της δύναμης που ασκείται από την οροφή στην τροχαλία.
Να θεωρήσετε αμελητέα την τριβή και ότι $m_2 > m_1$.

**Λύση**

i) Εφαρμόζουμε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για τις μάζες $m_1$ και $m_2$ και των πρώτο νόμο του Νεύτωνα για την τροχαλία.

$m_1$: $\quad \Sigma\vec{F}_y = m_1 \cdot \vec{\alpha}_1$ ή $m_1 \cdot g - T_1 = -m_1 \cdot \alpha \quad (1)$

$m_2$: $\quad \Sigma\vec{F}_y = m_2 \cdot \vec{\alpha}_2$ ή $m_2 \cdot g - T_2 = m_2 \cdot \alpha \quad (2)$

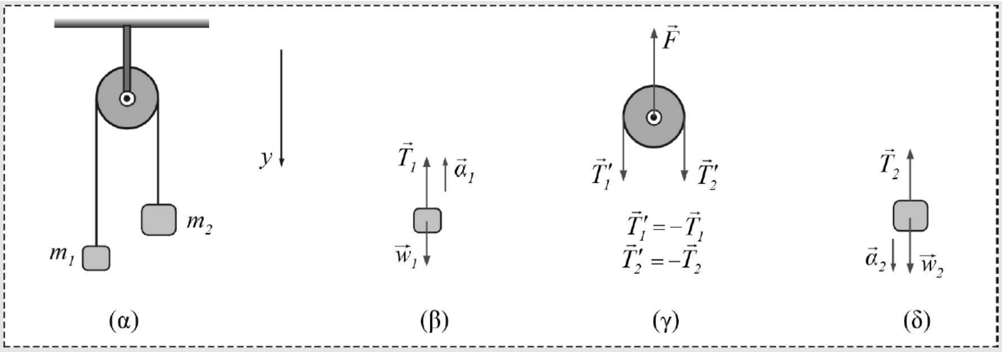
Τροχαλία: $\quad \Sigma\vec{F}_y = \vec{0}$ ή $F - T_1 - T_2 = 0 \quad (3)$

Το μέτρο της δύναμης που ασκεί το νήμα είναι το ίδιο σε όλο του το μήκος. Συνεπώς $T_1=T_2$
ii) Από τις δυο πρώτες εξισώσεις βρίσκουμε:

α) $$\alpha = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g \quad (4)$$

β) $$T_1 = \frac{2m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} g \quad (5)$$

γ) Από τις (1) και (5) προκύπτει: $$F = \frac{4m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} g$$




***Σχήμα 3.14*** *(α) Μηχανή του Atwood. (β), (γ), (δ) Διαγράμματα ελευθέρου σώματος για τη μάζα* $m_1$, *την τροχαλία και τη μάζα* $m_2$ *αντίστοιχα.*

**Σχόλια:**
1) αν $m_2 = m_1$ τοτε είναι $\alpha = 0$ και $T_1 = m_1 \cdot g = m_2 \cdot g$ και $F = 2T_1 = 2m_1 \cdot g = 2m_2 \cdot g$.
2) αν $m_2 >>> m_1$ εύκολα βρίσκουμε ότι: $\alpha \approx g$, $T_1 \approx 2m_1 \cdot g$ και $F \approx 4m_1 \cdot g$.

Ένα οριζόντιο δάπεδο κινείται προς τα πάνω με σταθερή επιτάχυνση μέτρου $a$. Σώμα μάζας $m$ εκτοξεύεται οριζόντια και κινείται πάνω στο δάπεδο . Αν η αρχική ταχύτητα του σώματος έχει μέτρο $\upsilon_0$ και μεταξύ σώματος και δαπέδου υπάρχει τριβή με συντελεστή $\mu$, να υπολογισθούν: α) το διάστημα που θα διανύσει το σώμα ώσπου να σταματήσει και β) ο χρόνος της σχετικής κίνησης του σώματος πάνω στο δάπεδο.

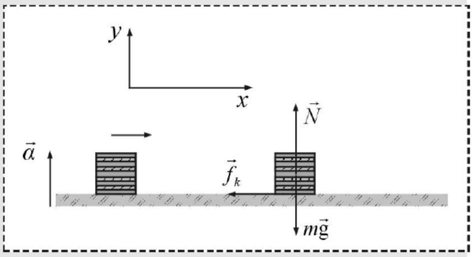
**Λύση**

α) Πάνω στο σώμα ασκούνται οι δυνάμεις: το βάρος $m\vec{g}$, η κάθετη αντίδραση $\vec{N}$ και η τριβή $\vec{f}_k$ (Σχήμα 3.16). Ένας ακίνητος παρατηρητής στο έδαφος παρατηρεί το δάπεδο και το σώμα να κινούνται κατακόρυφα προς τα πάνω (άξονας y) με σταθερή επιτάχυνση μέτρου $a$. Για τον παρατηρητή αυτόν ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα δίνει:

$\Sigma\vec{F}_y = m\vec{a}$ ή $\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$ ή $N - mg = ma$ ή

$N = m(a+g)$. Όμως $f_k = \mu N$ ή $f_k = \mu m(a+g)$.

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα στην οριζόντια διεύθυνση (άξονας x) δίνει:




***Σχήμα 3.16*** *Για τον ακίνητο παρατηρητή στο έδαφος το σώμα επιταχύνεται και ως προς τους δύο άξονες.*

$$\Sigma\vec{F}_x = m\vec{a}_x \;\text{ ή }\; -f_k = m\frac{d\upsilon}{dt} \;\text{ ή }\; -f_k = m\frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt} \;\text{ ή}$$

$$-\mu m(a+g) = m\frac{d\upsilon}{dx}\upsilon \;\text{ ή }\; \int_{\upsilon_0}^{0}\upsilon d\upsilon = -\mu(a+g)\int_0^x dx \;\text{ ή}$$

$$\left.\frac{\upsilon^2}{2}\right|_{\upsilon_0}^{0} = -\mu m(a+g)\Big|_0^x \;\text{ ή }\; -\frac{\upsilon^2}{2} = -\mu(a+g)x \;\text{ ή }\; x = \frac{\upsilon_0^2}{2\mu(a+g)}.$$

β) $\Sigma\vec{F}_x = m\vec{a}_x$ ή $-f_k = m\dfrac{d\upsilon}{dt}$ ή $-\mu m(a+g) = m\dfrac{d\upsilon}{dt}$ ή $\displaystyle\int_{\upsilon_0}^{0}\upsilon d\upsilon = -\mu(a+g)\int_0^t dt$ ή $-\upsilon_0 = -\mu(a+g)t$ ή

$$t = \frac{\upsilon_0}{\mu(a+g)}.$$

Σώμα μάζας $m_1$ βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο δάπεδο και συνδέεται με αβαρές και μη εκτατό νήμα, το οποίο διέρχεται από το αυλάκι τροχαλίας αμελητέας μάζας, με σώμα μάζας $m_2$ όπως φαίνεται στο σχήμα 3.16. Στο σώμα μάζας $m_1$ ασκούμε δύναμη $\vec{F}$ όπως φαίνεται στο σχήμα 3.16. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος $m_1$ και του δαπέδου είναι $\mu$. Να βρείτε το μέτρο: α) της επιτάχυνσης των δυο μαζών. β) της τάσης του νήματος.

**Λύση**

α) i. Σχεδιάζουμε το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για καθένα από τα σώματα $m_1$ και $m_2$ όπως φαίνεται στα σχήματα 3.16β και 3.16γ. ii. Εφαρμόζουμε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για τα δυο σώματα, υποθέτοντας ότι το $m_1$ επιταχύνεται προς τα δεξιά.

$m_2$: $\quad \Sigma\vec{F}_y = m_2\cdot\vec{a}_2$ ή $T - m_2\cdot g = m_2\cdot a \qquad (1)$

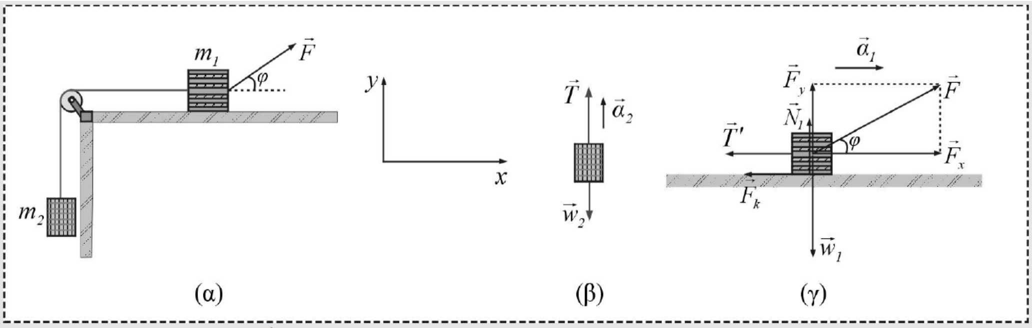
$m_1$: $\quad \Sigma\vec{F}_x = m_1\cdot\vec{a}_1$ ή $F\cdot\cos\varphi - T - f_k = m_1\cdot a \qquad (2)$

$\Sigma\vec{F}_y = \vec{0}$ ή $F\cdot\sin\varphi + N_1 = m_1\cdot g$ ή $N_1 = m_1\cdot g - F\cdot\sin\varphi$

Είναι $\quad f_k = \mu\cdot N_1$ ή $f_k = \mu\cdot(m_1\cdot g - F\cdot\sin\varphi) \qquad (3)$

Από τις εξισώσεις (1), (2), (3) βρίσκουμε:

$$a = \frac{F(\cos\varphi + \mu\cdot\sin\varphi) - (\mu\cdot m_1 + m_2)\cdot g}{m_1 + m_2} \qquad (4)$$




***Σχήμα 3.17*** *(α) Η δύναμη $\vec{F}$ ενεργεί κατά την κατεύθυνση που φαίνεται στο σχήμα και το $m_1$ υποθέτουμε ότι επιταχύνεται προς τα δεξιά. (β), (γ) Τα διαγράμματα ελεύθερου σώματος για το $m_2$ και το $m_1$ αντίστοιχα. Είναι: $\vec{T}' = -\vec{T}$ και $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a$.*

β)
$$T = \frac{m_2\left[F(\cos\varphi + \mu\cdot\sin\varphi) + m_1(1-\mu)\cdot g\right]}{m_1 + m_2}$$

Αν το $m_1$ κινείται προς τ' αριστερά, πρέπει να αλλάξουμε το πρόσημο της $f_k$, εφόσον η δύναμη της κινητικής τριβής είναι αντίθετη της κίνησης.

Μπορούμε να βρούμε την επιτάχυνση από την (4) αν αντικαταστήσουμε το $\mu$ με το $(-\mu)$.

Μια στροφή αυτοκινητόδρομου έχει ακτίνα 200 m και έχει υπολογιστεί για ταχύτητες κυκλοφορίας μέτρου 20 m/s. α) Αν η στροφή δεν έχει κλίση, βρείτε την ελάχιστη τιμή του συντελεστή στατικής τριβής μεταξύ των ελαστικών του αυτοκινήτου και του δρόμου. β) Αν θεωρήσουμε αμελητέα την τριβή ποια γωνία κλίσης πρέπει να έχει η στροφή;

**Λύση**

α) Το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης τον παίζει η στατική τριβή. Έχουμε:

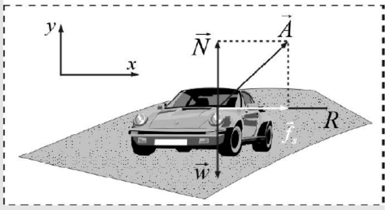
$$\Sigma F_x = F_r \quad ή \quad F_s = \frac{m \cdot \upsilon^2}{R}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad ή \quad N = m \cdot g$$

Για να μην ολισθήσει το αυτοκίνητο πρέπει

$$f_s \le \mu_s \cdot N \quad ή \quad \frac{m \cdot \upsilon^2}{R} \le \mu_s \cdot m \cdot g \quad ή \quad \mu_s \ge \frac{\upsilon^2}{g \cdot R} \quad ή \quad \mu_s \ge 0{,}2$$

Συνεπώς $\mu_{s\,min} = 0{,}2$



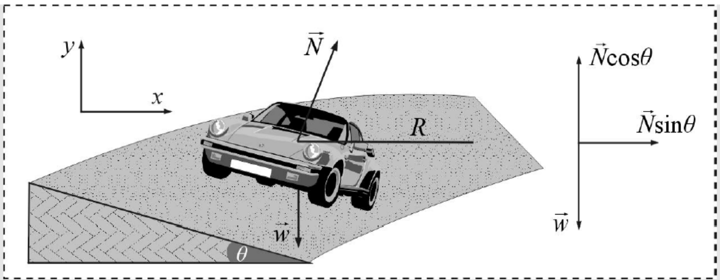

*__Σχήμα 3.21__ Διάγραμμα ελεύθερου σώματος για το αυτοκίνητο όταν διαγράφει οριζόντια στροφή. Η $\vec{A}$ είναι το άθροισμα των δυνάμεων που δρουν και στους τέσσερις τροχούς του αυτοκινήτου.*

β) Έχουμε: $$\Sigma F_x = F_r \quad ή \quad N \cdot \sin\theta = \frac{m \cdot \upsilon^2}{R}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad ή \quad N \cdot \cos\theta = m \cdot g$$

Με διαίρεση κατά μέλη των δυο αυτών εξισώσεων προκύπτει $\tan\theta = \dfrac{\upsilon^2}{g \cdot R}$ ή $\tan\theta = 0{,}2$ ή $\theta = 11{,}3°$.

*__Σχήμα 3.22__ Κάτοψη ενός αυτοκινήτου καθώς κινείται σε στροφή με γωνία κλίσης θ. Αν αμελήσουμε την τριβή η οριζόντια συνιστώσα της κάθετης δύναμης $\vec{N}$ δίνει την απαραίτητη κεντρομόλο δύναμη. Η $\vec{N}$ αντιπροσωπεύει το άθροισμα των δυνάμεων που ασκούνται από το δρόμο στους τέσσερις τροχούς του αυτοκινήτου.*




***Σχόλιο***: Στην περίπτωση που είχαμε τριβή με κατεύθυνση προς το κάτω μέρος του δρόμου ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα θα γραφόταν: $N \cdot \sin\theta + F_s \cos\theta = \dfrac{m \cdot \upsilon^2}{r}$

Μικρή μεταλλική σφαίρα μάζας $m$ είναι δεμένη στο ένα άκρο αβαρούς και μη εκτατού νήματος μήκους $\ell$ και διαγράφει κατακόρυφο κύκλο γύρω από το σταθερό σημείο Ο, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.23. Να υπολογίσετε το μέτρο της τάσης του νήματος: α) όταν το νήμα σχηματίζει με την κατακόρυφο γωνία θ και το μέτρο της ταχύτητας είναι υ, β) όταν η σφαίρα διέρχεται από την ανώτατη και την κατώτατη θέση της τροχιάς της και γ) σε ποια θέση της τροχιάς είναι πιθανότερο να κοπεί το νήμα αν αυξηθεί η μέση ταχύτητα της σφαίρας.

**Λύση**

α) Το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας μεταβάλλεται γιατί λόγω του βάρους της υπάρχει εφαπτομενική συνιστώσα επιτάχυνσης.

Αναλύουμε το βάρος $\vec{w}$ της σφαίρας σε μια ακτινική συνιστώσα $\vec{w}_r$ και μια εφαπτομενική συνιστώσα $\vec{w}_t$ και εφαρμόζουμε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα και κατά τις δυο αυτές διευθύνσεις.

Έχουμε: $\Sigma \vec{F}_t = m \cdot \vec{\alpha}_t$: $-m \cdot g \cdot \sin\theta = m \cdot a_t$ ή $\alpha_t = -g \cdot \sin\theta$

Η συνιστώσα $\alpha_t = \dfrac{d\upsilon}{dt}$ μεταβάλει το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας της σφαίρας.

$$\Sigma \vec{F}_r = m \cdot \vec{\alpha}_r \quad ή \quad T - m \cdot g \cdot \cos\theta = \frac{m \cdot \upsilon^2}{\ell} \quad ή \qquad T = m\left(\frac{\upsilon^2}{\ell} + g \cdot \cos\theta\right) \qquad (1)$$

β) Όταν η σφαίρα διέρχεται από την ανώτατη θέση Α είναι θ=π και από (1) προκύπτει:

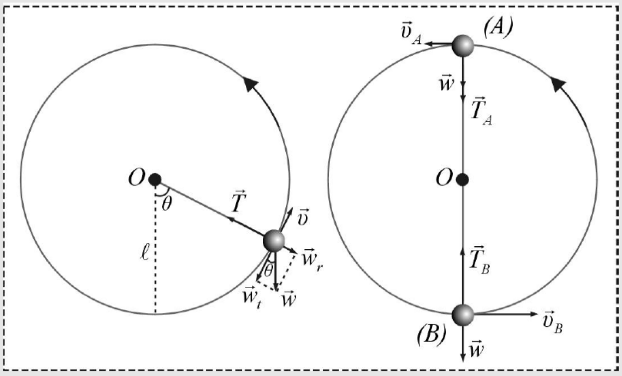
$$T_A = m\left(\frac{\upsilon_A^2}{\ell} - g\right)$$

Όταν η σφαίρα διέρχεται από την κατώτατη θέση Β είναι $\theta = 0$ και από (1) προκύπτει:

$$T_B = m\left(\frac{\upsilon_B^2}{\ell} + g\right)$$

γ) Η τάση $T_A$ είναι η ελάχιστη ενώ η $T_B$ είναι η μέγιστη.

Συνεπώς πιθανότερο είναι να κοπεί το νήμα όταν η σφαίρα διέρχεται από την κατώτατη θέση της τροχιάς της.




*__Σχήμα 3.24__ (α) Δυνάμεις που ενεργούν στη σφαίρα όταν το νήμα σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφο. (β) Οι δυνάμεις που ενεργούν στη σφαίρα όταν βρίσκεται στην ανώτατη θέση Α και την κατώτατη θέση Β της τροχιάς της.*

Προς Λύση

**3.6** Υλικό σημείο κινείται κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα $x$. Τη στιγμή $t_0 = 0$ βρίσκεται στη θέση $x = 0$ και έχει ταχύτητα $\upsilon_0$. Στο υλικό σημείο ενεργεί δύναμη $\vec{F} = -\beta \cdot \upsilon^2 \vec{i}$ όπου $\beta$ θετική σταθερά και $\upsilon$ το μέτρο της στιγμιαίας ταχύτητας του.
Α. Να βρείτε σε συνάρτηση με τη θέση $x$ του υλικού σημείου: α) Το μέτρο της ταχύτητάς του, β) Το μέτρο της επιτάχυνσής του.
Β. Να βρείτε τη θέση του υλικού σημείου σε συνάρτηση με το χρόνο.

**3.7** Σώμα μάζας $m$ ηρεμεί στην αρχή $O$ ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων $Oxy$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ασκείται στο σώμα δύναμη $\vec{F}$ της οποίας οι συνιστώσες είναι: $F_x(t) = k_1 + k_2 \cdot y$, $F_y(t) = k_3 \cdot t$ όπου $k_1$, $k_2$, και $k_3$ είναι σταθερές. Να βρείτε σε συνάρτηση με το χρόνο: α) Την ταχύτητα του σώματος. β) Το διάνυσμα θέσης του σώματος.

**3.8** Δυο παρατηρητές $O$ και $O'$ σταθεροί ως προς δυο συστήματα συντεταγμένων $Oxyz$ και $O'x'y'z'$ αντίστοιχα, παρατηρούν την κίνηση υλικού σημείου Ρ. Να αποδείξετε ότι και οι δυο παρατηρητές συμφωνούν ότι στο υλικό ασκείται η ίδια δύναμη αν και μόνον αν τα δυο συστήματα συντεταγμένων κινούνται με σταθερή ταχύτητα το ένα ως προς το άλλο.

**3.9** Υλικό σημείο μάζας 2 kg κινείται με την επίδραση δύναμης $\vec{F} = 48t^2 \cdot \vec{i} + (72t - 32)\vec{j} - 24t \cdot \vec{k}$ (S.I). Τη στιγμή $t_0 = 0$ το υλικό σημείο βρίσκεται στη θέση $\vec{r}_0 = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ (S.I) με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0 = 2\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}$ (S.I). Να βρείτε σε συνάρτηση με το χρόνο: α) την ταχύτητα του υλικού σημείου. β) τη θέση του.

**3.10** Υλικό σημείο μάζας $m$ κινείται κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα $x$ και πάνω του ασκείται δύναμη αντίστασης που καθορίζεται από την εξίσωση $F = -\beta \cdot \upsilon^3$ όπου $\beta$ θετική σταθερά. Τη στιγμή $t_0 = 0$ το υλικό σημείο βρίσκεται στη θέση $x_0 = 0$ και έχει ταχύτητα $\upsilon_0$. α) Αν τη χρονική στιγμή τ η ταχύτητα του είναι $\upsilon_0/2$ δείξτε ότι η ταχύτητα του τη στιγμή 8τ θα είναι $\upsilon_0/5$. β) Να βρείτε το διάστημα που διανύει το υλικό σημείο για να αποκτήσει τις ταχύτητες: i. $\upsilon_0/2$, ii. $\upsilon_0/5$.

**3.11** Σώμα μάζας 2 kg ηρεμεί πάνω σε λείο εκτεταμένο οριζόντιο επίπεδο στην αρχή Ο ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων $Oxy$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ αρχίζουν να ενεργούν στο σώμα οι δυνάμεις $\vec{F}_1 = 5\vec{i} - 7\vec{j}$

(S.I) και $\vec{F}_2 = 3\vec{i} + \vec{j}$ (S.I). Να βρείτε τη στιγμή $t = 4\,\text{s}$. α) την επιτάχυνση του σώματος. β) την ταχύτητά του. γ) το διάνυσμα θέσης του.

**3.12** Σώμα μάζας 5 kg, τη στιγμή $t_0 = 0$, έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0 = 8\vec{i}$ (S.I) τη στιγμή $t = 4\,\text{s}$ η ταχύτητα του είναι: $\vec{\upsilon} = 20\vec{i} + 16\vec{j}$ (S.I). Αν στο σώμα ενεργεί μια σταθερή συνισταμένη δύναμη να βρείτε: α) τις συνιστώσες της. β) το μέτρο της συνισταμένης δύναμης.

**3.13** Δύο δυνάμεις $\vec{F}_1 = -12\vec{i} - 8\vec{j}$ (S.I) και $\vec{F}_2 = -6\vec{i} + 14\vec{j}$ (S.I) αρχίζουν να ενεργούν τη στιγμή $t_0 = 0$ σε σώμα μάζας 4 kg το οποίο ηρεμεί στη θέση $(-2\,\text{m}, 5\,\text{m})$. Να βρείτε τη χρονική στιγμή $t = 10\,\text{s}$: α) την ταχύτητα του σώματος. β) τη μετατόπιση του σώματος. γ) τη θέση του σώματος.

**2.14** Σε σώμα μάζας 2 kg ενεργεί οριζόντια δύναμη που περιγράφεται από την εξίσωση $F = 4 + 2t$ (S.I). Να βρείτε σε συνάρτηση με το χρόνο: α) την ταχύτητα του σώματος. β) τη θέση του. Δίνεται ότι για $t = 0$ είναι $x = 0$ και $\upsilon_0 = 0$.

**3.15** Σώμα μάζας $m$ βρίσκεται αρχικά στο σημείο $y = 0$ και τη χρονική στιγμή $t = 0$ αρχίζει να πέφτει κατακόρυφα (κατά μήκος του άξονα $y$) υπό την επίδραση του πεδίου βαρύτητας το οποίο θεωρείται ομογενές. Αν η αντίσταση του αέρα είναι ίση με $-\lambda \cdot \upsilon$, όπου $\upsilon$ το μέτρο της ταχύτητας του σώματος και λ μια θετική σταθερά, να βρεθούν και να καταχωρηθούν σε διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου: α) η μεταβολή της ταχύτητας με το χρόνο, β) η τιμή στην οποία τείνει το μέτρο της ταχύτητας μετα από πολύ μεγάλο χρόνο (οριακή ή ορικη ταχύτητα $\upsilon_{ορ}$) και ο χρόνος που απαιτείται για να αρχίσει το σώμα να προσεγγίζει την οριακή του ταχύτητα.

**3.16** Σώμα μάζας 2 kg κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και οι συντεταγμένες του $x$ και $y$ είναι: $x = 3{,}5t^2 - 1$ (S.I) και $y = 2t^3 + 2$ (S.I).
Α. Να βρείτε σε συνάρτηση με το χρόνο: α) την ταχύτητα του σώματος. β) την επιτάχυνση του σώματος.
Β. Πόσο είναι το μέτρο της συνισταμένης δύναμης που ασκείται στο σώμα τη στιγμή $t = 2\,\text{s}$;

**3.17** Μια βενζινάκατος με μάζα $m$ κινείται ευθύγραμμα με μεγάλη ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0$. Κάποια στιγμή η μηχανή σβήνει. Αρχικά, η δύναμη αντίστασης του νερού είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας: $F_1 = -k \cdot \upsilon^2$. Όταν η ταχύτητα μειωθεί κάτω απο $\upsilon_0/2$, τότε η δύναμη της αντίστασης του νερού γίνεται ανάλογη της ταχύτητας: $F_2 = -\lambda \cdot \upsilon$ όπου $k$, $\lambda$ σταθερές. Να υπολογίσετε το συνολικό διάστημα που θα διανύσει η βενζινάκατος μέσα στο νερό μέχρι να σταματήσει.