Ένα συνεχές ημιτονοειδές κύμα διαδίδεται σε σχοινί με ταχύτητα 40 cm/s. Η μετατόπιση των σωματιδίων του σχοινιού σε x = 10 cm διαπιστώνεται ότι μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με την εξίσωση $y = 5\,(cm)\, \sin[1 - 4 \cdot t]$. Η γραμμική πυκνότητα του σχοινιού είναι 4 g/cm (α) Ποιά είναι η συχνότητα του κύματος; (β) ποιο είναι το μήκος κύματος του κύματος; (γ) γράψτε τη γενική εξίσωση σαν συνάρτηση της θέσης κ' του χρόνου (δ) υπολογίστε την τάση στο σχοινί

$$y = 5 \sin[1 - 4 \cdot t] \qquad A = 5\,cm$$

$$y = A \sin(kx - \omega t] \qquad \omega = 4\,s^{-1}$$

για $x = 10$ cm $\qquad kx = 1 \Rightarrow k = 10^{-1}\,cm^{-1}$

(α) $f = \frac{\omega}{2\pi} \rightarrow f = \frac{4}{2\pi} = 0{,}64$ Hz

(β) $\lambda = \frac{2\pi}{k} = 20\pi = 62{,}8$ cm

(γ) $y(x,t) = 5 \sin(0{,}1x - 4t)$

(δ) $\upsilon = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow F = \upsilon^2 \cdot \mu = 0{,}4 \frac{kg}{m} \cdot 0{,}4^2 \frac{m}{s}$

$= 0{,}064$ N

Χρησιμοποιήστε την κυματική εξίσωση για να βρείτε την ταχύτητα ενός κύματος που δίνεται από την έκφραση

$$y(x,t) = 3 \sin[4x - 7t]$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 12 \cdot \cos(4x - 7t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -12 \cdot 4 \sin(4x - 7t)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -3 \cdot 7 \cos(4x - 7t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -3 \cdot 7 \cdot 7 \sin(4x - 7t)$$

$$\overset{4}{\cancel{12}} \cdot 4 \cancel{\sin(4x - 7t)} = \frac{1}{v^2} \cancel{3} \cdot 7 \cdot 7 \cancel{\sin(4x - 7t)}$$

$$16 = \frac{1}{v^2} 49 \Rightarrow v^2 = \frac{16}{49} \Rightarrow v = \pm \frac{4}{7} \text{ m/s}$$

Ένα ομοιόμορφο σχοινί μάζας m και μήκους L κρέμεται από μία οροφή (α) Δείξτε ότι η ταχύτητα ενός εγκάρσιου κύματος στο σχοινί είναι συνάρτηση του y, της απόστασης από το κατώτατο άκρο και δίνεται από τη σχέση $u=\sqrt{g\cdot y}$ (β) Δείξτε ότι ο χρόνος που χρειάζεται το εγκάρσιο κύμα για να διανύσει το μήκος του σχοινιού δίνεται από τη σχέση $t=2\sqrt{L/g}$

$$u=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$$\mu=\frac{m}{L}$$

Θεωρούμε ένα μικρό τμήμα του σχοινιού σε απόσταση y από το κατώτατο άκρο (όπου $y=0$)

Η τάση στο τμήμα αυτό είναι το βάρος εκείνου του τμήματος του σχοινιού που κρέμεται κάτω από αυτό. $F=mg=\mu\cdot y\cdot g$

(α) $u=\sqrt{\dfrac{\mu\cdot y\cdot g}{\mu}}=\sqrt{y\cdot g}$

(β) επειδή $u=\dfrac{dy}{dt}\Rightarrow dy=u\cdot dt\Rightarrow$

$$\frac{1}{\sqrt{g\cdot y}}dy=dt\rightarrow\int\frac{1}{\sqrt{g\cdot y}}dy=\int dt\Rightarrow\frac{1}{g}\frac{(gy)^{-1/2+1}}{-1/2+1}\Big|_0^L=t$$

$$t=\frac{2}{g}\sqrt{gy}\Big|_0^L=\frac{2}{g}\sqrt{gL}=2\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Να αποδειχθεί ότι η κλίση ενός σχοινιού σε οποιοδήποτε σημείο x είναι αριθμητικά ίση με το λόγο της ταχύτητας του σωματιδίου προς την ταχύτητα του κύματος στο σημείο αυτό.

$$y = A \cdot \sin(kx - \omega t)$$

$$\text{κλίση} \quad \frac{\partial y}{\partial x} = A k \cos(kx - \omega t)$$

$$\upsilon_{\sigma\omega\mu} = \frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\text{κλίση}}{\upsilon_{\sigma\omega\mu}} = -\frac{k}{\omega} = -\frac{\frac{2\pi}{\lambda}}{\frac{2\pi}{T}} = -\frac{T}{\lambda} = -\frac{1}{\upsilon}$$

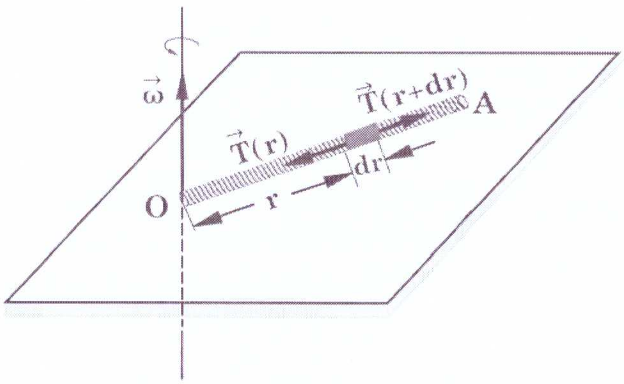
$$\text{κλίση} = -\frac{\upsilon_{\sigma\omega\mu}}{\upsilon_{\kappa\upsilon\mu}}$$

Ένα ομογενές σχοινί μήκους L και μάζας m στηρίζεται στο ένα άκρο του O και περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω επί οριζοντίου επιπέδου, περί άξονα διερχόμενο από το O.

i) Να δείξετε ότι η τάση που τεντώνει το σχοινί μεταβάλλεται με την απόσταση r από το σταθερό άκρο O.

ii) Κάποια στιγμή δημιουργούμε επί του σχοινιού στο άκρο του O ένα εγκάρσιο παλμό μικρής διάρκειας και έκτασης, ο οποίος ταξιδεύει προς το ελευθερο άκρο του. Να βρείτε τον χρόνο που χρειάζεται ο παλμός να διανύσει το μήκος του σχοινιού. Η βαρύτητα να αγνοηθεί.

<u>**ΛΥΣΗ**</u>: **i)** Θεωρούμε ένα στοιχειώδες τμήμα του σχοινιού μήκους dr (dr→0), σε απόσταση r από τον άξονα περιστροφής. Η μάζα dm, του τμήματος αυτού διαγράφει περιφέρεια κέντρου O και ακτίνας r υπό την επίδραση των τάσεων $\vec{\mathbf{T}}(\mathbf{r})$ και $\vec{\mathbf{T}}(\mathbf{r+dr})$ που δέχεται στις άκρες του από τα εκατέρωθεν αυτού τμήματα του σχοινιου, εκ των οποίων η $\vec{\mathbf{T}}(\mathbf{r})$ κατευθύνεται προς το σταθερό άκρο του O και η $\vec{\mathbf{T}}(\mathbf{r+dr})$ προς το ελεύθερο άκρο του A (σχ. 2). Η συνισταμένη των δύο αυτών δυνάμεων ενεργεί ως κεντρομόλος δύναμη επί της μάζας dm, δηλαδή μπορούμε τα γράψουμε την σχέση:



Σχήμα 2

$$\mathbf{T(r)-T(r+dr)=dm\omega^2 r \quad\Rightarrow\quad T(r+dr)-T(r)=-dm\omega^2 r \quad\Rightarrow}$$

$$\mathbf{dT=-dm\omega^2 r=-\mu dr\omega^2 r} \qquad (1)$$

όπου μ η σταθερή γραμμική πυκνότητα του σχοινιού ίση με m/L και dT η μεταβολή της τάσεως του σχοινιού κατά μήκος του στοιχείου dr. Το αρνητικό πρόσημο στην (1) δηλώνει ότι η τάση του σχοινιού μειώνεται από το άκρο O προς το ελεύθερο άκρο του. Ολοκληρώνοντας την (1) έχουμε:

$$\mathbf{T(r)=-\mu\omega^2 r^2/2+C} \qquad (2)$$

Η σταθερά ολοκληρώσεως C θα προκύψει από το αναμβισβήτητο γεγονός ότι η τάση του σχοινιού στο ελεύθερο άκρο του (x=L) είναι μηδενική, οπότε από την (2) θα έχουμε:

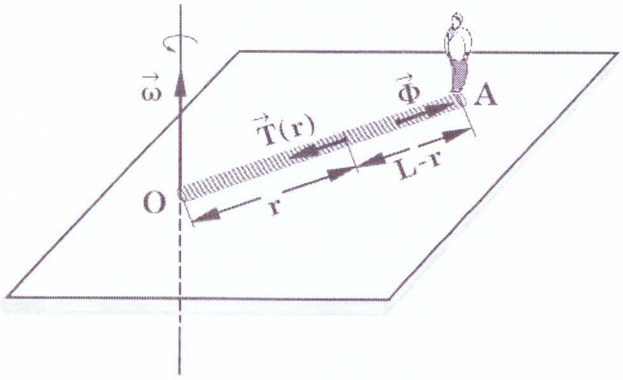
$$0 = -\mu\omega^2 L^2/2 + C \quad \Rightarrow \quad C = \mu\omega^2 L^2/2$$

Έτσι η σχέση (2) γράφεται:

$$T(r) = \frac{\mu\omega^2 L^2}{2} - \frac{\mu\omega^2 r^2}{2} \quad \Rightarrow \quad T(r) = \frac{m\omega^2}{2L}\left(L^2 - r^2\right), \; 0 \leq r \leq L \qquad (3)$$

Παρατήρηση:

Το πρώτο ερώτημα του προβλήματος μπορεί να λυθεί συντομότερα, αν η κίνηση του σχοινιού εξετασθεί από παρατηρήτη που στρέφεται μαζί με το σχοινί. Ο παρατηρητής αυτός βλέπει το σχοινί να ισορροπεί, εξετάζοντας δε το τμήμα του



Σχήμα 3

σχοινιού από το ελεύθερο άκρο του Α μέχρι την διατομή που απέχει απόσταση r από σταθερό άκρο Ο, διαπιστώνει ότι το τμήμα αυτό ηρεμεί υπό την επίδραση της δύναμης $\vec{T}(r)$ που δέχεται από το υπόλοιπο σχοινί μήκους r και της αδρα νειακής φυγόκεντρης δύναμης $\vec{\Phi}$, που θεωρεί ότι ενεργεί στο κέντρο μάζας του θεωρούμενου τμήματος (σχ. 3). Για τον παρατηρητή αυτόν τα μέτρα των δύο δυνάμεων είναι ίσα, δηλαδή ισχύει:

$$T(r) = \Phi = m_{(L-r)}\omega^2\left(r + \frac{L-r}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad T(r) = \mu\left(L-x\right)\omega^2\left(r + \frac{L-r}{2}\right) \quad \Rightarrow$$

$$T(r) = \mu\left(L-r\right)\omega^2\left(\frac{L+r}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad T(r) = \frac{m\omega^2}{2L}\left(L^2 - r^2\right), \; 0 \leq r \leq L$$

ii) Αν στο άκρο Ο του σχοινιού δημιουργθεί ένας εγκάρσιος παλμός, αυτός θα διαδίδεται προς το ελευθερο άκρο του Α με ταχύτητα v, η οποία θα μειώνεται με την απόσταση r σύμφωνα με την σχέση:

$$v = \sqrt{\frac{T(r)}{\mu}} \overset{(3)}{\Rightarrow} v = \sqrt{\frac{\mu\omega^2}{2\mu}\left(L^2 - r^2\right)} = \frac{\omega}{\sqrt{2}}\sqrt{L^2 - r^2} \tag{4}$$

Εάν dt είναι ο χρόνος διαδόσεως του παλμού μεταξύ των θέσεων r και r+dr του σχοινιού, θα ισχύει:

$$dt = \frac{dr}{v} \overset{(4)}{\Rightarrow} dt = \frac{\sqrt{2}}{\omega}\frac{dr}{\sqrt{L^2 - r^2}} \tag{5}$$

Ο ζητούμενος χρόνος t_L θα προκύψει με ολοκλήρωση της (5) και με όρια ολοκλήρωσης για την μεταβλητή r από 0 έως L, δηλαδή θα έχουμε:

$$t_L = \frac{\sqrt{2}}{\omega}\int_0^L \frac{dr}{\sqrt{L^2 - r^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\omega}\,\eta\mu^{-1}\left(\frac{L}{r}\right)\Bigg]_0^L \Rightarrow$$

$$t_L = \frac{\sqrt{2}}{\omega}\left[\eta\mu^{-1}\left(\frac{L}{L}\right) - \eta\mu^{-1}(0)\right] \Rightarrow$$

$$t_L = \frac{\sqrt{2}}{\omega}\left[\eta\mu^{-1}(1)\right] = \frac{\sqrt{2}\pi}{2\omega} \tag{6}$$

i) Επί ιδανικής χορδής διαδίδεται παλμός, που περιγράφεται από κυματοσυνάρτηση της μορφής:

$$y(x,t) = f(x - vt) \qquad -\infty < x < +\infty \;,\; t \geq 0 \tag{a}$$

όπου v η ταχύτητα διαδόσεως του παλμού. Να δείξετε ότι το σχήμα του παλμού παραμένει αναλλοίωτο και ότι η κυματοσυνάρτηση ικανο ποιεί την σχέση:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -v\frac{\partial y}{\partial x} \tag{b}$$

ii) Εάν η κυματοσυνάρτηση του παλμού έχει την μορφή:

$$y(x,t) = \frac{\alpha^3}{\alpha^2 + (x - vt)^2} \quad , \; -\infty < x < +\infty \;,\; t \geq 0 \tag{c}$$

όπου α σταθερή θετική ποσότητα, να βρείτε την εγκάρσια ταχύτητα του σημείου της χορδής με συντεταγμένη x=α/2 την στιγμή t=0.

iii) Να βρείτε την συνάρτηση κλίσεως ∂y/∂x της χορδής την χρονική στιγμή t=0 και να σχεδιάσετε ένα πρόχειρο διάγραμμα αυτής.

ΛΥΣΗ: i) Θεωρώντας τον παλμό κατά τις χρονικές στιγμές t και t+Δt, θα έχουμε συμφωνα με την κυματοσυνάρτηση (a), τις σχέσεις:

$$\mathbf{y(x,t) = f(x\text{-}vt)} \quad \textbf{και} \quad \mathbf{y(x+\Delta x, t+\Delta t) = f\left[x+\Delta x\text{-}v(t+\Delta t\right]} \qquad (1)$$

όπου Δx η μετατόπισή του παλμού μεταξύ των χρονικών στιγμών t και t+Δt. Όμως η μορφή του παλμού εγγυάται ότι αυτός διαδίδεται προς την θετική κατεύθυνση του άξονα x και επομένως ισχύει Δx=vΔt, οπότε η δεύτερη από τις σχέσεις (1) γράφεται:

$$\mathbf{y(x+\Delta x, t+\Delta t) = f\left[x+v\Delta t\text{-}v(t+\Delta t\right]} \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{y(x+\Delta x, t+\Delta t) = f\left(x\text{-}vt\right)} \qquad (2)$$

Η (2) δηλώνει το αμετάβλητο του σχήματος του παλμου κατα τον χρόνο διαδό σεώς του επί της χορδής.

Παραγωγίζοντας την κυματοσυνάρτηση (1) ως προς τον χρόνο t και ως προς την χωρική μεταβλητή x προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\mathbf{\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot(\text{-}v)} \quad \text{και} \quad \mathbf{\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot 1}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε ο μετασχηματισμός u=x-vt. Συνδυάζοντας τις σχέσεις αυτές προκύπτει η αποδεικτέα σχέση:

$$\mathbf{\frac{\partial y}{\partial t} = \text{-}v\frac{\partial y}{\partial x}} \qquad (3)$$

ii) Η εγκάρσια ταχύτητα $\mathbf{v_y}$ ένος σημείου του παλμού που περιγράφεται με την κυματοσυνάρτηση (c) θα προκύψει με παραγώγιση της συνάρτησης αυτής ως προς t, δηλαδή θα έχουμε:

$$\mathbf{v_y = \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\alpha^3}{\alpha^2 + \left(x\text{-}vt\right)^2}\right]} \quad \Rightarrow$$

$$v_y = \frac{-2\alpha^3 (x-vt)(-v)}{\left[\alpha^2 + (x-vt)^2\right]^2} = \frac{2\alpha^3 v (x-vt)}{\left[\alpha^2 + (x-vt)^2\right]^2} \quad -\infty < x < +\infty \quad , \quad t \geq 0 \qquad (4)$$

Η (4) για t=0 και x=α/2 δίνει:

$$v_y(\alpha/2, 0) = \frac{2\alpha^3 v(\alpha/2)}{\left(\alpha^2 + (\alpha/2)^2\right)^2} = \frac{\alpha^4 v}{\left(5\alpha^2/4\right)^2} = \frac{16v}{25} \qquad (5)$$

iii) Σύμφωνα με την αποδειχθείσα σχέση (3) η συνάρτηση g(x) που δίνει την κλίση ∂y/∂x του παλμού την χρονική στιγμή t=0 έχει την μορφή:

$$g(x) = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t=0} \overset{(4)}{\Rightarrow} g(x) = -\frac{1}{v}\left[\frac{2\alpha^3 v x}{\left(\alpha^2 + x^2\right)^2}\right] \Rightarrow$$

$$g(x) = \frac{-2\alpha^3 x}{\left(\alpha^2 + x^2\right)^2} \qquad -\infty < x < +\infty \qquad (6)$$

Για την συνάρτηση g(x) παρατηρούμε τα έξής:

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$$

δηλαδή το διάγραμμα της g(x) τείνει ασυμπτωτικά και προς τον θετικό ημιά ξονα Ox και προς τον αρνητικό ημιάξονα Ox'.

Στην θέση x=0 ισχύει g(0) = 0, δηλαδή το διάγραμμα της g(x) διέρχεται από την αρχή των άξόνων.

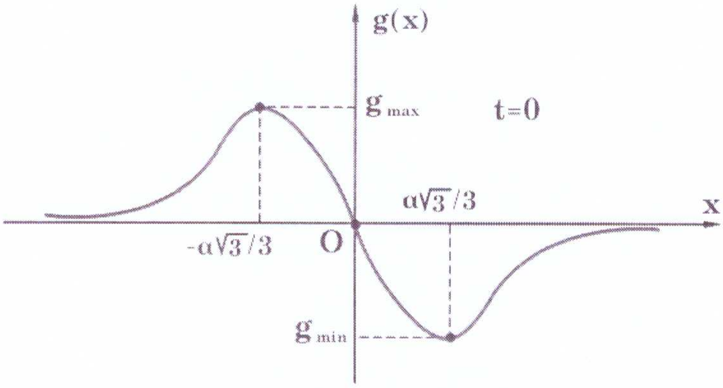
Εάν η g(x) παρουσιάζει τοπικά ακρότατα αυτά θα βρεθούν από τον μηδενισμό της πρώτης παραγώγου της, δηλαδή από την σχέση:

$$\frac{dg(x)}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\frac{-2\alpha^3 x}{(x^2 + \alpha^2)^2}\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{-2\alpha^3\left(x^2 + \alpha^2\right)^2 + 12\alpha^3 x\left(x^2 + \alpha^2\right)^3 x}{\left(x^2 + \alpha^2\right)^4} = 0 \Rightarrow$$

$$-2\alpha^3\left(x^2 + \alpha^2\right)^2 + 8\alpha^3 x\left(x^2 + \alpha^2\right)x = 0 \Rightarrow$$

$$-\left(x^2+\alpha^2\right)+4x^2=0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2=\alpha^2 \quad \Rightarrow \quad x=\pm\,\alpha\sqrt{3}/3$$



Σχήμα 4

δηλαδή η g(x) παρουσιάζει δύο τοπικά ακρότατα στις θέσεις $\mathbf{x=\pm\,\alpha\sqrt{3}/3}$. Για $\mathbf{x=\alpha\sqrt{3}/3}$ η τιμή του ακρότατου είναι αρνητική και για $\mathbf{x=-\alpha\sqrt{3}/3}$ η τιμή του είναι θετική, που σημαίνει ότι το πρώτο ακρότατο είναι ελάχιστο και το δευτερο μέγιστο. Στο σχήμα (4) φαίνεται ένα πρόχειρο διάγραμμα της συνάρησης g(x).