Ψηφιακή λογική σχεδίαση – Λύσεις θεμάτων εξεταστικής περιόδου Ιαν. 2020

<u>ΘΕΜΑ 1^{Ο}</u> *(2,0 μονάδες)*

Στον παρακάτω πίνακα, δίνονται οι μη προσημασμένοι αριθμοί Α, σε δυαδική παράσταση με δώδεκα (12) ψηφία, και Β, σε δεκαεξαδική παράσταση με τρία (3) ψηφία.

Αριθμοί	Δεκαδική παράσταση	Δυαδική παράσταση (12 ψηφία)	Δεκαεξαδική παράσταση (3 ψηφία)
Α		000010010101	
Β			0D4

1. Να διενεργήσετε τις απαραίτητες μετατροπές, ώστε να συμπληρωθούν τα κενά στοιχεία στον παραπάνω πίνακα. Να δείξετε αναλυτικά τις μετατροπές.
2. Να εκτελέσετε αναλυτικά τις πράξεις Α + Β και Α – Β στο δυαδικό αριθμητικό σύστημα και να μετατρέψετε τα αποτελέσματα και στο δεκαδικό αριθμητικό σύστημα.

<u>Λύση</u>

α) Ο αριθμός Α = 000010010101_2 μετατρέπεται σε δεκαδική μορφή πολλαπλασιάζοντας κάθε δυαδικό ψηφίο με το αντίστοιχο βάρος εκφρασμένο σε δεκαδική μορφή:

$A = 0\times2^{11} + 0\times2^{10} + 0\times2^{9} + 0\times2^{8} + 1\times2^{7} + 0\times2^{6} + 0\times2^{5} + 1\times2^{4} + 0\times2^{3} + 1\times2^{2} + 0\times2^{1} + 1\times2^{0} = 149_{10}$.

Για τη μετατροπή στο δεκαεξαδικό, αντιστοιχίζουμε ένα δεκαεξαδικό ψηφίο σε κάθε τέσσερα δυαδικά: $0000\ 1001\ 0101_2$ = 0 9 5, επομένως η δεκαεξαδική παράσταση είναι Α = 095_{16}.

Για τον αριθμό Β η μετατροπή της δεκαεξαδικής παράστασης σε δυαδική γίνεται και πάλι με αντιστοίχιση τεσσάρων δυαδικών ψηφίων σε κάθε δεκαεξαδικό ψηφίο: 0D4 = 0000 1101 0100. Η μετατροπή της δεκαεξαδικής παράστασης σε δεκαδική γίνεται πολλαπλασιάζοντας κάθε δεκαεξαδικό ψηφίο με το αντίστοιχο βάρος εκφρασμένο σε δεκαδική μορφή:

$B = 0\times16^{2} + 13\times16^{1} + 4\times16^{0} = 212_{10}$.

Με βάση τα παραπάνω συμπληρώνεται ο πίνακας.

Αριθμοί	Δεκαδική παράσταση	Δυαδική παράσταση	Δεκαεξαδική παράσταση
Α	149	000010010101	095
Β	212	000011010100	0D4

β) Το άθροισμα (Α + Β) υπολογίζεται ως εξής:

$$
\begin{array}{ccccccccccccl}
 & & & & 1 & & & 1 & & 1 & & & \leftarrow \text{Κρατούμενα προηγούμενης θέσης} \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \quad \text{Α} \\
+ & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \quad \text{Β} \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \quad \text{Άθροισμα}
\end{array}
$$

Στο δεκαδικό σύστημα το άθροισμα παριστάνεται ως εξής:

$A + B = 0\times2^{11} + 0\times2^{10} + 0\times2^{9} + 1\times2^{8} + 0\times2^{7} + 1\times2^{6} + 1\times2^{5} + 0\times2^{4} + 1\times2^{3} + 0\times2^{2} + 0\times2^{1} + 1\times2^{0} = 361_{10}$.

Η διαφορά Α – Β υπολογίζεται με πρόσθεση στον αριθμό Α του συμπληρώματος ως προς 2 του αριθμού Β. Το συμπλήρωμα ως προς 2 ενός αριθμού προκύπτει εάν διατηρήσουμε τα συνεχόμενα λιγότερο σημαντικά μηδενικά και την πρώτη μονάδα του αριθμού και αντικαταστήσουμε τις μονάδες με μηδενικά και τα μηδενικά με μονάδες στις υπόλοιπες πιο σημαντικές θέσεις του αριθμού. Συνεπώς, το συμπλήρωμα ως προς 2 του αριθμού Β είναι: 111100101100. Εκτελούμε την πρόσθεση του Α με το συμπλήρωμα ως προς 2 του Β:

						1	1	1	1				← Κρατούμενα προηγούμενης θέσης
	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	Α
+	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	Συμπλήρωμα ως προς 2 του Β
	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	Άθροισμα

Λόγω του ότι Β > Α, η διαφορά Α – Β είναι αρνητικός αριθμός και η τιμή του προκύπτει με τον υπολογισμό του συμπληρώματος ως προς 2 του αποτελέσματος της πρόσθεσης του μειωτέου (Α) με το συμπλήρωμα ως προς 2 του αφαιρετέου (Β).

Το συμπλήρωμα ως προς 2 του παραπάνω αθροίσματος είναι: 000000111111 και η μετατροπή του σε δεκαδική παράσταση έχει ως εξής: $0\times2^{11} + 0\times2^{10} + 0\times2^{9} + 0\times2^{8} + 0\times2^{7} + 0\times2^{6} + 1\times2^{5} + 1\times2^{4} + 1\times2^{3} + 1\times2^{2} + 1\times2^{1} + 1\times2^{0} = 63_{10}$. Επομένως, η δεκαδική παράσταση της διαφοράς Α – Β είναι ο αριθμός – 63.

<u>ΘΕΜΑ 2^{Ο}</u> *(3,0 μονάδες)*

Θέλουμε να σχεδιάσουμε λογικό κύκλωμα με τέσσερις (4) εισόδους, X_3, X_2, X_1, και X_0, και μια έξοδο F, τέτοιο ώστε:

- να προκύπτει F = 1, εάν ο συνδυασμός τιμών των ψηφίων των τεσσάρων (4) εισόδων αναπαριστά μονοψήφιο δεκαδικό αριθμό σε μορφή κώδικα BCD μεγαλύτερο ή ίσο του 5, και
- να προκύπτει F = 0, εάν ο συνδυασμός τιμών των ψηφίων των τεσσάρων (4) εισόδων αναπαριστά μονοψήφιο δεκαδικό αριθμό σε μορφή κώδικα BCD μικρότερο του 5.

Για τους μη χρησιμοποιούμενους συνδυασμούς τιμών των εισόδων η τιμή της εξόδου F λαμβάνεται ως αδιάφορη.

Να σχεδιαστεί το χονδρικό (σχηματικό) διάγραμμα, να συμπληρωθεί ο πίνακας αλήθειας, να διατυπωθεί η λογική συνάρτηση του κυκλώματος σε κανονική μορφή και να σχεδιαστεί κύκλωμα που θα περιλαμβάνει τον **ελάχιστο δυνατό αριθμό πυλών NAND <u>μόνο</u>**.

Δεν επιτρέπεται η χρήση αντιστροφέων ή άλλου τύπου λογικών πυλών και ως είσοδοι του λογικού κυκλώματος διατίθενται μόνο οι μεταβλητές που αντιστοιχούν στις τέσσερις (4) εισόδους και όχι οι συμπληρωματικές τους μορφές.

<u>Λύση</u>

Το σχηματικό διάγραμμα και ο πίνακας αληθείας του κυκλώματος φαίνονται παρακάτω.

Οι συνδυασμοί των εισόδων που δεν χρησιμοποιούνται στον κώδικα BCD, αποτελούν αδιάφορους όρους της συνάρτησης.

Δεκαδικός αριθμός	X_3	X_2	X_1	X_0	F
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
Μη χρησιμοποιούμενοι συνδυασμοί	1	0	1	0	x
	1	0	1	1	x
	1	1	0	0	x
	1	1	0	1	x
	1	1	1	0	x
	1	1	1	1	x

Η λογική συνάρτηση της εξόδου σε κανονική μορφή είναι:

$$F = \Sigma(5, 6, 7, 8, 9) + d(10, 11, 12, 13, 14, 15) =$$
$$= X'_3X_2X'_1X_0 + X'_3X_2X_1X'_0 + X'_3X_2X_1X_0 + X_3X'_2X'_1X'_0 + X_3X'_2X'_1X_0 +$$
$$+ d(10, 11, 12, 13, 14, 15)$$

Ο χάρτης Karnaugh της λογικής συνάρτησης F έχει ως εξής:

X_3X_2 \ X_1X_0	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	1
11	x	x	x	x
10	1	1	x	x

Από τον πίνακα Karnaugh προκύπτει η απλοποιημένη έκφραση της λογικής συνάρτησης της εξόδου:

$$F = X_3 + X_2X_1 + X_2X_0$$

Στη συνέχεια, αφού ζητείται να υλοποιηθεί το λογικό κύκλωμα με τον ελάχιστο δυνατό αριθμό πυλών NAND, εφαρμόζουμε στην απλοποιημένη έκφραση της F τα θεωρήματα De Morgan, $(x + y)' = x'\cdot y'$, και διπλής άρνησης της άλγεβρας Boole, $F = (F')'$.

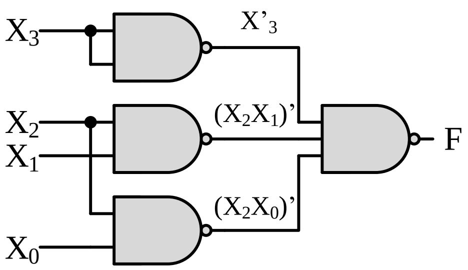
Το συμπλήρωμα της απλοποιημένης έκφρασης της F με εφαρμογή του θεωρήματος De Morgan είναι:

$$F' = (X_3 + X_2X_1 + X_2X_0)' = X'_3\cdot(X_2X_1)'\cdot(X_2X_0)'$$

Επομένως, η συνάρτηση F εκφράζεται ως:

$$F = [F']' = [X'_3 \cdot (X_2X_1)' \cdot (X_2X_0)']'$$

Με βάση τα παραπάνω, το ζητούμενο λογικό κύκλωμα έχει ως εξής:



ΘΕΜΑ 3^{O} *(3,0 μονάδες)*

Τέσσερις συμφοιτητές, έστω A, B, C και D, από τους οποίους ο A διαθέτει αυτοκίνητο, συζητούν τι θα κάνουν για να "γιορτάσουν" την ολοκλήρωση της εξεταστικής περιόδου. Μια πρόταση που γίνεται είναι να πάνε εκδρομή αλλά υπάρχουν και αντιρρήσεις, οπότε αποφασίζουν να θέσουν την πρόταση σε ψηφοφορία. Σε περίπτωση ισοψηφίας συμφωνούν η ψήφος του ιδιοκτήτη του αυτοκινήτου (A) να έχει αυξημένη βαρύτητα (να μετράει σαν διπλή ψήφος).

1. Να συμπληρωθεί ο πίνακας αλήθειας που περιγράφει αυτή τη διαδικασία.
2. Να σχεδιαστεί κύκλωμα που την υλοποιεί με έναν **κατάλληλο αποκωδικοποιητή** και **τέσσερις (4) πύλες OR τριών (3) εισόδων**.
3. Να σχεδιαστεί κύκλωμα που την υλοποιεί με έναν **πολυπλέκτη 2-σε-1** και λογικές **πύλες δύο (2) εισόδων μόνο**. Ως είσοδος ελέγχου του πολυπλέκτη να τεθεί η μεταβλητή A.

Λύση

1. Ο πίνακας αλήθειας που περιγράφει αυτή τη διαδικασία παρουσιάζεται στο Σχ. 3.1.
2. Αφού έχουμε τέσσερις ανεξάρτητες μεταβλητές (εισόδους), χρειαζόμαστε έναν αποκωδικοποιητή 4-σε-16.

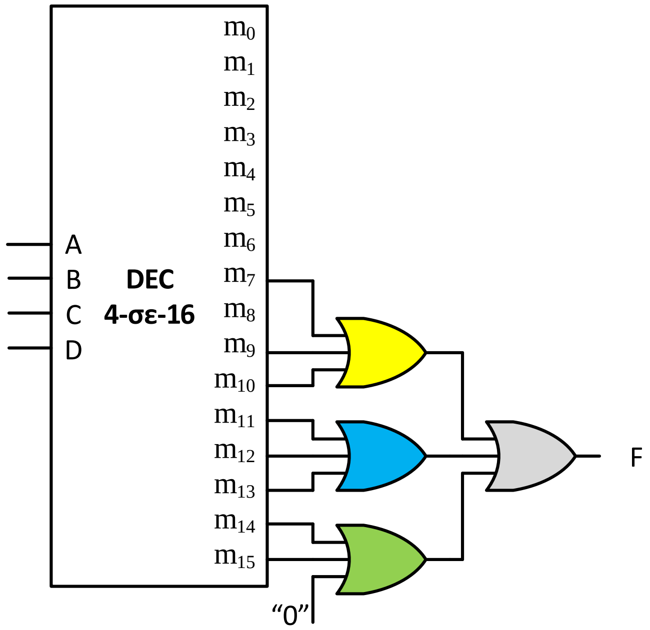
   Από τον πίνακα αλήθειας προκύπτει η λογική συνάρτηση της εξαρτημένης μεταβλητής (εξόδου) σε κανονική μορφή αθροίσματος ελαχιστόρων:

   $$F = \Sigma(7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15)$$
   $$= m_7 + m_9 + m_{10} + m_{11} + m_{12} + m_{13} + m_{14} + m_{15}$$
   $$= (m_7 + m_9 + m_{10}) + (m_{11} + m_{12} + m_{13}) + (m_{14} + m_{15})$$

   Από την παραπάνω αλγεβρική έκφραση παρατηρούμε ότι, απαιτούνται αρχικά δύο πύλες OR τριών εισόδων και μία πύλη OR δύο εισόδων για τα επιμέρους λογικά αθροίσματα ελαχιστόρων. Επίσης απαιτείται μία επιπλέον πύλη OR τριών εισόδων για το λογικό άθροισμα των εξόδων των τριών προηγούμενων πυλών.
   Επειδή διατίθενται μόνο πύλες OR τριών εισόδων, σε μία από τις πύλες που σχηματίζουν τα λογικά αθροίσματα των ελαχιστόρων θα υπάρχει μια είσοδος που δεν χρησιμοποιείται. Η είσοδος αυτή δεν επιτρέπεται να μείνει ασύνδετη, αλλά θα πρέπει να λάβει τιμή 0, δηλαδή το ουδέτερο στοιχείο της λογικής πράξης OR, αφού x + 0 = x. Σύμφωνα με τα παραπάνω, το λογικό κύκλωμα που προκύπτει είναι αυτό που παρουσιάζεται στο Σχ. 3.2.

A	B	C	D	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

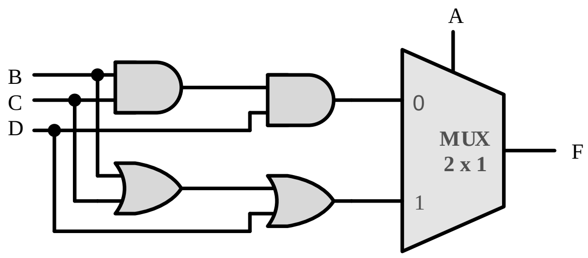
Σχήμα 3.1



Σχήμα 3.2

3. Επιλέγοντας ως είσοδο ελέγχου του πολυπλέκτη 2-σε-1 την ανεξάρτητη μεταβλητή A, από τον πίνακα αλήθεις προκύπτει ότι:
   - για A = 0, F = BCD = (BC)D
   - για A = 1, F = B + C + D = (B + C) + D

   Επομένως, η ζητούμενη υλοποίηση είναι η ακόλουθη:



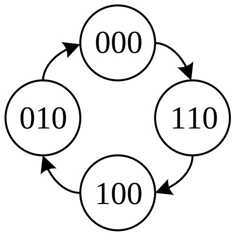
<u>ΘΕΜΑ 4º</u> *(4,0 μονάδες)*

1. Να σχεδιάσετε με τον ελάχιστο δυνατό αριθμό JK flip-flops σύγχρονο κυκλικό (επαναλαμβανόμενης μέτρησης) δυαδικό μετρητή που απαριθμεί την ακολουθία 0-6-4-2-0 (διάγραμμα καταστάσεων, πίνακας καταστάσεων, απλοποιημένες συναρτήσεις εισόδων flip-flops, λογικό κύκλωμα). Για τις μη χρησιμοποιούμενες (απαριθμούμενες) καταστάσεις οι τιμές των εισόδων των flip-flops λαμβάνονται ως αδιάφορες. (2,5 μον.)
2. Να ελέγξετε αν ο μετρητής που σχεδιάσατε έχει δυνατότητα αυτοδιόρθωσης, εξηγώντας την απάντησή σας. (1,5 μον.)

<u>Λύση</u>

Ο μέγιστος αριθμός που απαριθμεί ο μετρητής είναι 6, που απαιτεί τρία δυαδικά ψηφία για να εκφραστεί, 6 = 110, άρα ο ελάχιστος αριθμός flip-flops που απαιτούνται για την υλοποίηση του κυκλώματος είναι ομοίως τρία.

Το διάγραμμα καταστάσεων του ζητούμενου απαριθμητή είναι το ακόλουθο:



Με βάση το διάγραμμα χρονισμού και τον πίνακα διέγερσης του JK flip-flop, συμπληρώνουμε τον πίνακα μετάβασης καταστάσεων (πίνακα καταστάσεων):

Παρούσα Κατάσταση			Επόμενη Κατάσταση			Είσοδοι Flip-Flop					
Q_2	Q_1	Q_0	Q^+_2	Q^+_1	Q^+_0	J_2	K_2	J_1	K_1	J_0	K_0
0	0	0	1	1	0	1	X	1	X	0	X
0	0	1				X	X	X	X	X	X
0	1	0	0	0	0	0	X	X	1	0	X
0	1	1				X	X	X	X	X	X
1	0	0	0	1	0	X	1	1	X	0	X
1	0	1				X	X	X	X	X	X
1	1	0	1	0	0	X	0	X	1	0	X
1	1	1				X	X	X	X	X	X

Για τις μη χρησιμοποιούμενες (απαριθμούμενες) καταστάσεις οι τιμές των εισόδων των flip-flops λαμβάνονται ως αδιάφορες.

Από τον πίνακα καταστάσεων προσδιορίζουμε τις απλοποιημένες συναρτήσεις των εισόδων των flip-flops. Να σημειωθεί ότι από τον πίνακα καταστάσεων είναι προφανές ότι $J_0 = 0$, $K_0 = X$, $J_1 = 1$ και $K_1 = 1$. Οι απλοποιημένες συναρτήσεις για τις εισόδους J_2 και K_2 προσδιορίζονται με τη χρήση πινάκων Karnaugh:

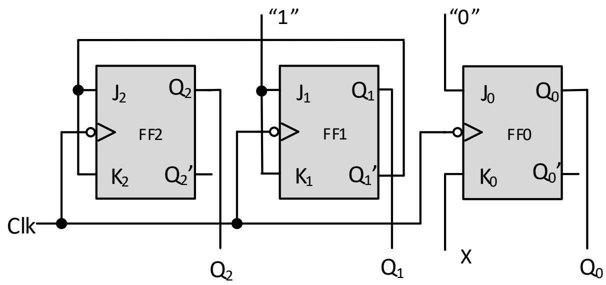
Q_2 \ Q_1Q_0	00	01	11	10
0	1	X	X	0
1	X	X	X	X

$J_2 = Q'_1$

Q_2 \ Q_1Q_0	00	01	11	10
0	X	X	X	X
1	1	X	X	0

$K_2 = Q'_1$

Το ζητούμενο λογικό κύκλωμα είναι το ακόλουθο:



Ας εξετάσουμε τώρα τη συμπεριφορά του κυκλώματος αν βρεθεί στις μη χρησιμοποιούμενες καταστάσεις 001, 011, 101 και 111. Επειδή K_0 = X θα πρέπει να εξετάσουμε τις μεταβάσεις για X = 0 και για X = 1, δηλαδή για $K_0 = 0$ και για $K_0 = 1$.

Για $K_0 = 0$:

Παρούσα κατάσταση			Είσοδοι FF						Επόμενη κατάσταση		
Q_2	**Q_1**	**Q_0**	**J_2=Q'_1**	**K_2=Q'_1**	**J_1=1**	**K_1=1**	**J_0=0**	**K_0=0**	**Q^+_2**	**Q^+_1**	**Q^+_0**
0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1

Επομένως, για $K_0 = 0$ το σύστημα είναι μη αυτοδιορθούμενο, αφού αν βρεθεί σε οποιαδήποτε από τις μη χρησιμοποιούμενες καταστάσεις (περιττοί αριθμοί) δεν επανέρχεται στην επιθυμητή ακολουθία απαρίθμησης και απαριθμεί πλέον κατά φθίνουσα ακολουθία τους περιττούς (μονούς) αριθμούς.

Για $K_0 = 1$:

Παρούσα κατάσταση			Είσοδοι FF						Επόμενη κατάσταση		
Q_2	**Q_1**	**Q_0**	**J_2=Q'_1**	**K_2=Q'_1**	**J_1=1**	**K_1=1**	**J_0=0**	**K_0=1**	**Q^+_2**	**Q^+_1**	**Q^+_0**
0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0

Επομένως, για $K_0 = 1$ το σύστημα είναι αυτοδιορθούμενο, αφού αν βρεθεί σε οποιαδήποτε από τις μη χρησιμοποιούμενες καταστάσεις (περιττοί αριθμοί) επανέρχεται στον επόμενο ωρολογιακό παλμό σε άρτιο αριθμό της επιθυμητής ακολουθίας απαρίθμησης.