02_Αριθμητικά Συστήματα

και

Αριθμητικές Πράξεις

(Μέρος 1ο)

Αναπαράσταση αριθμών με αξία θέσης

Ένας ακέραιος μη-προσημασμένος δεκαδικός αριθμός, για παράδειγμα το 5792, παριστάνει μια ποσότητα ίση με πέντε χιλιάδες, συν 7 εκατοντάδες, συν 9 δεκάδες, συν 2 μονάδες:

$$5 \times 1000 + 7 \times 100 + 9 \times 10 + 2 \times 1$$

Οι χιλιάδες, εκατοντάδες, δεκάδες και μονάδες, είναι δυνάμεις του 10 που προσδιορίζονται από τη **θέση** των ψηφίων του αριθμού:

$$5 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 2 \times 10^0$$

Επομένως, το 5792 είναι μια αναπαράσταση, μια συντομογραφία, της παραπάνω ποσότητας.

Η σύμβαση που ακολουθείται είναι να γράφονται μόνο οι συντελεστές (δηλ. τα ψηφία με τα οποία πολλαπλασιάζονται οι αντίστοιχες δυνάμεις του 10) και από τη θέση των συντελεστών να προσδιορίζονται οι αναγκαίες δυνάμεις του 10.

Γενικά, ένας ακέραιος μη-προσημασμένος δεκαδικός αριθμός **A** παριστάνεται από μια ακολουθία συντελεστών:

$$\mathbf{A = \alpha_{n-1}\alpha_{n-2} \ldots \alpha_1\alpha_0}$$

Οι συντελεστές $\boldsymbol{\alpha_i}$ μπορεί να είναι οποιοδήποτε από τα δεκαδικά ψηφία (0, 1, 2, ..., 9), ενώ η τιμή του δείκτη **i** δίνει την τάξη της θέσης του εκάστοτε συντελεστή, δηλαδή τη δύναμη του 10, με την οποία πρέπει να πολλαπλασιαστεί ο συγκεκριμένος συντελεστής:

$$\mathbf{A = \alpha_{n-1}\alpha_{n-2} \ldots \alpha_1\alpha_0 = \alpha_{n-1} \times 10^{n-1} + \alpha_{n-2} \times 10^{n-2} + \ldots + \alpha_1 \times 10^1 + \alpha_0 \times 10^0}$$

Η σύμβαση αυτή ακολουθείται σε όλα τα αριθμητικά συστήματα (δεκαδικό, δυαδικό, τετραδικό, οκταδικό, δεκαεξαδικό κλπ.).

Σε οποιοδήποτε αριθμητικό σύστημα, με βάση τον αριθμό **B**, ένας ακέραιος μη-προσημασμένος αριθμός **A** με πλήθος ψηφίων **n**, εκφράζεται ως ακολούθως:

$$\mathbf{A = \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\ldots\alpha_1\ \alpha_0 = \alpha_{n-1}} \times \mathbf{B^{n-1}} + \mathbf{\alpha_{n-2}} \times \mathbf{B^{n-2}} + \ldots + \mathbf{\alpha_1} \times \mathbf{B^1} + \mathbf{\alpha_0} \times \mathbf{B^0}$$

όπου:

- **B** η βάση του αριθμητικού συστήματος, και
- οι συντελεστές $\boldsymbol{\alpha_i}$ μπορεί να είναι οποιοδήποτε από τα ψηφία του αριθμητικού συστήματος, τα οποία παίρνουν ακέραιες τιμές από **0** μέχρι και **B – 1**.

Οι τιμές του δείκτη **i** δίνουν την τάξη της θέσης του εκάστοτε συντελεστή και κατά συνέπεια τη δύναμη της βάσης **B** με την οποία πρέπει να πολλαπλασιαστεί ο συντελεστής αυτός.

Παραδείγματα:

Δεκαδικό αριθμητικό σύστημα (βάση B = 10)

Τα ψηφία του δεκαδικού αριθμητικού συστήματος είναι οι ακέραιοι αριθμοί από 0 μέχρι και 9.

$(795)_{10} = 7 \times 100 + 9 \times 10 + 5 \times 1 = 7 \times \mathbf{10}^2 + 9 \times \mathbf{10}^1 + 5 \times \mathbf{10}^0$

Τετραδικό αριθμητικό σύστημα (βάση B = 4)

Τα ψηφία του τετραδικού αριθμητικού συστήματος είναι οι ακέραιοι αριθμοί από 0 μέχρι και 3.

$(132)_4 = 1 \times \mathbf{4}^2 + 3 \times \mathbf{4}^1 + 2 \times \mathbf{4}^0 = 1 \times 16 + 3 \times 4 + 2 \times 1 = (30)_{10}$

Οκταδικό αριθμητικό σύστημα (βάση B = 8)

Τα ψηφία του οκταδικού αριθμητικού συστήματος είναι οι ακέραιοι αριθμοί από 0 μέχρι και 7.

$$(370)_8 = 3 \times 8^2 + 7 \times 8^1 + 0 \times 8^0 = 3 \times 64 + 7 \times 8 + 0 \times 1 = (248)_{10}$$

Δεκαεξαδικό αριθμητικό σύστημα (βάση B = 16)

Τα ψηφία του δεκαεξαδικού αριθμητικού συστήματος είναι οι ακέραιοι αριθμοί 0 και 15, όμως οι αξίες 10, 11, 12, 13, 14 και 15 εκφράζονται με τους λατινικούς χαρακτήρες A, B, C, D, E και F αντίστοιχα.

$$(1AF)_{16} = 1 \times 16^2 + A \times 16^1 + F \times 16^0 =$$

$$= 1 \times 256 + 10 \times 16 + 15 \times 1 = (431)_{10}$$

Δυαδικό αριθμητικό σύστημα (Βάση = 2)

Τα ψηφία του δυαδικού αριθμητικού συστήματος είναι οι ακέραιοι αριθμοί 0 και 1.

$$(1001)_2 = 1 \text{ x } \mathbf{2}^3 + 0 \text{ x } \mathbf{2}^2 + 0 \text{ x } \mathbf{2}^1 + 1 \text{ x } \mathbf{2}^0 =$$

$$= 1 \text{ x } 8 + 0 \text{ x } 4 + 0 \text{ x } 2 + 1 \text{ x } 1 = (9)_{10}$$

Επομένως, στο δεκαδικό σύστημα έχουμε μονάδες (10^0), δεκάδες (10^1), εκατοντάδες (10^2), χιλιάδες (10^3), κλπ., ενώ στο δυαδικό σύστημα θα έχουμε **μονάδες** (**2**^{0}), **δυάδες** (**2**^{1}), **τετράδες** (**2**^{2}), **οκτάδες** (**2**^{3}), κλπ., αντίστοιχα.

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζεται η παράσταση των δεκαδικών αριθμών 0 έως και 15 στο δυαδικό, τετραδικό, οκταδικό και δεκαεξαδικό αριθμητικό σύστημα αντίστοιχα.

Δεκαδικό	Δυαδικό	Τετραδικό	Οκταδικό	Δεκαεξαδικό
0	0 0 0 **0**	0 0	0 0	**0**
1	0 0 0 **1**	0 1	0 1	**1**
2	0 0 **1 0**	0 2	0 2	**2**
3	0 0 **1 1**	0 3	0 3	**3**
4	0 **1 0 0**	1 0	0 4	**4**
5	0 **1 0 1**	1 1	0 5	**5**
6	0 **1 1 0**	1 2	0 6	**6**
7	0 **1 1 1**	1 3	0 7	**7**
8	**1 0 0 0**	2 0	1 0	**8**
9	**1 0 0 1**	2 1	1 1	**9**
10	**1 0 1 0**	2 2	1 2	**A**
11	**1 0 1 1**	2 3	1 3	**B**
12	**1 1 0 0**	3 0	1 4	**C**
13	**1 1 0 1**	3 1	1 5	**D**
14	**1 1 1 0**	3 2	1 6	**E**
15	**1 1 1 1**	3 3	1 7	**F**

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι δυνάμεις του 2 (από 0 έως 20)

ν	2^{ν}		ν	2^{ν}		ν	2^{ν}
0	1		7	128		14	16.384
1	2		8	256		15	32.768
2	4		9	512		16	65.536
3	8		10	1.024		17	131.072
4	16		11	2.048		18	262.144
5	32		12	4.096		19	524.288
6	64		13	8.192		20	1.048.576

Μετατροπές αριθμών σε συστήματα με άλλη βάση

Η μετατροπή ενός αριθμού από το σύστημα με βάση B, στο δεκαδικό αριθμητικό σύστημα, γίνεται αν αναπτύξουμε τον αριθμό σε μία ακολουθία δυνάμεων του B και προσθέσουμε όλους τους όρους, όπως δείξαμε προηγουμένως:

$$(370)_8 = 3 \times 8^2 + 7 \times 8^1 + 0 \times 8^0 = 3 \times 64 + 7 \times 8 + 0 \times 1 = (248)_{10}$$

$$(1AF)_{16} = 1 \times 16^2 + A \times 16^1 + F \times 16^0 =$$

$$= 1 \times 256 + 10 \times 16 + 15 \times 1 = (431)_{10}$$

$$(1001)_2 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 =$$

$$= 1 \times 8 + 0 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1 = (9)_{10}$$

Η μετατροπή ενός αριθμού από το δεκαδικό αριθμητικό σύστημα, σε οποιοδήποτε άλλο αριθμητικό σύστημα με βάση Β, γίνεται με επαναλαμβανόμενη διαίρεση του δεκαδικού αριθμού με τη βάση Β του επιθυμητού συστήματος, <u>μέχρι το πηλίκο της διαίρεσης να γίνει 0</u>.

Οι συντελεστές του αριθμού στο επιθυμητό σύστημα με βάση Β λαμβάνονται από τα υπόλοιπα των διαιρέσεων.

<u>Το υπόλοιπο της πρώτης διαίρεσης</u> αντιστοιχεί στο <u>ελάχιστο σημαντικό ψηφίο</u> (Least Significant Digit – <u>LSD</u>).

<u>Το υπόλοιπο της τελευταίας διαίρεσης</u> αντιστοιχεί στο <u>μέγιστο σημαντικό ψηφίο</u> (Most Significant Digit – <u>MSD</u>).

Παράδειγμα 1: Να μετατραπεί ο αριθμός $(141)_{10}$ στο δυαδικό, τετραδικό, οκταδικό και δεκαεξαδικό σύστημα

Μετατροπή αριθμού στο δυαδικό σύστημα:

	141	2							
LSD	**1**	70	2						
		0	35	2					
			1	17	2				
				1	8	2			
					0	4	2		
						0	2	2	
							0	1	2
							MSD	**1**	0

Επομένως, $\mathbf{(141)_{10} = (10001101)_2}$

Μετατροπή αριθμού στο τετραδικό σύστημα:

	141	4			
LSD	**1**	35	4		
		3	8	4	
			0	2	4
			MSD	**2**	0

Επομένως, **$(141)_{10} = (2031)_4$**

Μετατροπή αριθμού στο οκταδικό σύστημα:

	141	8		
LSD	**5**	17	8	
		1	2	8
		MSD	**2**	0

Επομένως, $\mathbf{(141)_{10} = (215)_8}$

Μετατροπή αριθμού στο δεκαεξαδικό σύστημα:

	141	16	
LSD	**13**	8	16
	MSD	**8**	0

Επομένως, $\mathbf{(141)_{10} = (8D)_{16}}$

Η μετατροπή ενός αριθμού μεταξύ αριθμητικών συστημάτων που έχουν βάση Β, η οποία μπορεί να εκφραστεί ως δύναμη του 2, δηλαδή:

δυαδικό:	$B = 2 = 2^1$,
τετραδικό:	$B = 4 = 2^2$,
οκταδικό:	$B = 8 = 2^3$,
δεκαεξαδικό:	$B = 16 = 2^4$,

γίνεται μέσω του δυαδικού αριθμητικού συστήματος.

Ας δούμε αυτές τις μετατροπές μέσω παραδειγμάτων.

Παράδειγμα 2: Να μετατραπεί ο αριθμός **10001101_2** στο τετραδικό, οκταδικό και δεκαεξαδικό σύστημα και να επαληθευτεί η μετατροπή (αντίστροφη μετατροπή).

Μετατροπή του δυαδικού αριθμού στο τετραδικό σύστημα

Χωρίζουμε δυάδες ψηφίων από δεξιά προς τα αριστερά:

10	**00**	**11**	**01**	δυαδικό
2	**0**	**3**	**1**	τετραδικό

Επαλήθευση: εκφράζουμε κάθε ψηφίο του τετραδικού αριθμού σε δυαδική μορφή

2	**0**	**3**	**1**	τετραδικό
10	**00**	**11**	**01**	δυαδικό

Μετατροπή του δυαδικού αριθμού στο οκταδικό σύστημα

Χωρίζουμε τριάδες ψηφίων από δεξιά προς τα αριστερά:

(0)**10**	**001**	**101**	δυαδικό
2	**1**	**5**	οκταδικό

Επαλήθευση:

Εκφράζουμε κάθε ψηφίο του οκταδικού αριθμού σε δυαδική μορφή

2	**1**	**5**	οκταδικό
(0)**10**	**001**	**101**	δυαδικό

Μετατροπή του δυαδικού αριθμού στο δεκαεξαδικό σύστημα

Χωρίζουμε τετράδες ψηφίων από δεξιά προς τα αριστερά:

1000	**1101**	δυαδικό
8	**D**	δεκαεξαδικό

<u>Επαλήθευση:</u>

Εκφράζουμε κάθε ψηφίο του δεκαεξαδικού αριθμού σε δυαδική μορφή

8	**D**	δεκαεξαδικό
1000	**1101**	δυαδικό

Αριθμητικές πράξεις στο δυαδικό αριθμητικό σύστημα

Πρόσθεση

Ο αλγόριθμος της πρόσθεσης σε όλα τα αριθμητικά συστήματα είναι ο ίδιος.

Έστω ότι θέλουμε να προσθέσουμε τους αριθμούς $X = X_3X_2X_1X_0$ και $Y = Y_3Y_2Y_1Y_0$.

Αθροίζουμε τους συντελεστές κάθε τάξης, ξεκινώντας από το ελάχιστο σημαντικό ψηφίο (μονάδες).

Κάθε επιμέρους άθροιση των $\mathbf{X_i}$ και $\mathbf{Y_i}$ δίνει ένα άθροισα $\mathbf{S_i}$ και ένα κρατούμενο $\mathbf{C_i}$.

Το κρατούμενο $\mathbf{C_i}$ που προκύπτει προστίθεται στους συντελεστές της επόμενης τάξης $\mathbf{X_{i+1}}$ και $\mathbf{Y_{i+1}}$.

$X =$	(0)	X_3	X_2	X_1	X_0
$+\ Y =$	(0)	Y_3	Y_2	Y_1	Y_0
	C_3	C_2	C_1	C_0	
Άθροισμα **S** =	S_4	S_3	S_2	S_1	S_0
Επιμέρους Κρατούμενα C_i		C_3	C_2	C_1	C_0

Επομένως το άθροισμα που προκύπτει είναι $\mathbf{S = S_4S_3S_2S_1S_0}$, όπου

$\mathbf{S_4 = C_3}$

Στην δυαδική πρόσθεση έχουμε τις εξής δυνατές περιπτώσεις:

	Κρατούμενο	Άθροισμα	
	C	**S**	
0 + 0	0	0	$= (0)_{10}$
0 + 1 ή 1 + 0	0	1	$= (1)_{10}$
1 + 1	1	0	$= (2)_{10}$
1 + 1 +1	1	1	$= (3)_{10}$

Παράδειγμα 3: Να υπολογιστεί το άθροισμα των δυαδικών αριθμών $A = 1101_2$ και $B = 111_2$.

A =	(0)	**1**	**1**	**0**	**1**	$= (13)_{10}$
+ B =	(0)	(0)	**1**	**1**	**1**	$= (7)_{10}$
	1	**1**	**1**	**1**		
Άθροισμα **S** =	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	$= \mathbf{(20)_{10}}$
Επιμέρους Κρατούμενα		**1**	**1**	**1**	**1**	

Άρα, το άθροισμα που προκύπτει είναι:

$$\mathbf{S = S_4S_3S_2S_1S_0 = 10100}$$

Αφαίρεση

Η αφαίρεση στο δυαδικό αριθμητικό σύστημα μπορεί να γίνει με τον γνωστό αλγόριθμο της αφαίρεσης που εφαρμόζουμε στο δεκαδικό αριθμητικό σύστημα και ο οποίος ισχύει για όλα τα αριθμητικά συστήματα.

Να σημειωθεί ότι κατά την αφαίρεση, προσθέτουμε το **Δανεικό** από προηγούμενη αφαίρεση στον **Αφαιρετέο** και το άθροισμά τους αφαιρείται από τον **Μειωτέο:**

$$\textbf{(Διαφορά)}_i = \textbf{(Μειωτέος)}_i - [\textbf{(Αφαιρετέος)}_i + \textbf{(Δανεικό)}_{i-1}]$$

Στη δυαδική αφαίρεση έχουμε τις εξής δυνατές περιπτώσεις:

Αφαίρεση: X – Y			
Μειωτέος **X**	Αφαιρετέος **Y**	Δανεικό **B**	Διαφορά **D**
0	0	0	0
1	1	0	0
1	0	0	1
0	1	1	1
(0)0	10	1	0
(0)1	10	1	1

Παράδειγμα 4: Να αφαιρεθούν οι δυαδικοί αριθμοί:

X = 1101 (μειωτέος) και Y = 111 (αφαιρετέος).

(Μειωτέος) X =	**1**	**1**	**0**	**1**	=	$(13)_{10}$
- (Αφαιρετέος) Y =	**(0)** + 1	**1** + 1	**1** + 0	**1**	=	$(7)_{10}$
Διαφορά **D** =	**0**	**1**	**1**	**0**	**=**	$\mathbf{(6)_{10}}$
Επιμέρους Δανεικά $\mathbf{B_i}$	**0**	**1**	**1**	**0**		

Άρα, η διαφορά που προκύπτει είναι: $\mathbf{D = (D_3)D_2D_1D_0 = (0)110}$

Συμπληρώματα αριθμών

Όπως είδαμε, η αφαίρεση δύο αριθμών βασίζεται στην έννοια του "**δανεικού**" ψηφίου, όταν το ψηφίο του μειωτέου είναι μικρότερο από το αντίστοιχο του αφαιρετέου. Δανειζόμαστε, δηλαδή, ένα "1" από τον συντελεστή της αμέσης μεγαλύτερης τάξης.

Η διαδικασία όμως αυτή δεν είναι εύκολα υλοποιήσιμη στα ψηφιακά συστήματα και για το λόγο αυτό ακολουθείται η μέθοδος της χρήσης **συμπληρωμάτων**.

Τα συμπληρώματα χρησιμοποιούνται στους ψηφιακούς υπολογιστές για την απλοποίηση της πράξης της αφαίρεσης, καθώς και για τις **λογικές πράξεις** (που θα δούμε αργότερα). Η απλοποίηση των αριθμητικών πράξεων οδηγεί σε απλούστερα και πιο οικονομικά κυκλώματα που τις υλοποιούν.

Υπάρχουν δύο τύποι συμπληρωμάτων σε κάθε αριθμητικό σύστημα:

- το **“Συμπλήρωμα ως προς βάση”**, και
- το **“Συμπλήρωμα ως προς ελαττωμένη βάση”** ή **“Συμπλήρωμα ως προς βάση μείον ένα”**.

Σε ένα αριθμητικό σύστημα με βάση **B**, το πρώτο αναφέρεται ως “Συμπλήρωμα ως προς B”, $\boldsymbol{\Sigma_{(B)}}$ ή $\boldsymbol{\Sigma_{B}}$, και το δεύτερο αναφέρεται ως “Συμπλήρωμα ως προς (B-1)”, $\boldsymbol{\Sigma_{(B-1)}}$ ή $\boldsymbol{\Sigma_{B-1}}$.

Επομένως, στο **δεκαδικό** σύστημα θα αναφερόμαστε για τους δύο τύπους των συμπληρωμάτων, σε “**Συμπλήρωμα ως προς 10**”, $\boldsymbol{\Sigma_{(10)}}$ ή $\boldsymbol{\Sigma_{10}}$, και “**Συμπλήρωμα ως προς 9**”, $\boldsymbol{\Sigma_{(9)}}$ ή $\boldsymbol{\Sigma_{9}}$.

Στο **δυαδικό** σύστημα θα αναφερόμαστε σε “**Συμπλήρωμα ως προς 2”**, $\boldsymbol{\Sigma_{(2)}}$ ή $\boldsymbol{\Sigma_{2}}$, και “**Συμπλήρωμα ως προς 1**”, $\boldsymbol{\Sigma_{(1)}}$ ή $\boldsymbol{\Sigma_{1}}$, αντίστοιχα.

Συμπλήρωμα ως προς ελαττωμένη βάση

ή

Συμπλήρωμα ως προς βάση μείον ένα ($Σ_{(B-1)}$)

Έστω ένας αριθμός $\mathbf{X = X_{n-1}X_{n-2} \ldots X_1X_0}$, με **n** το πλήθος ψηφία, σε ένα αριθμητικό σύστημα με βάση **B**.

Το συμπλήρωμα του **X** ως προς ελαττωμένη βάση ορίζεται ως:

$$\mathbf{Σ_{B-1}(X) = (B^n-1) – X}$$

Στο δεκαδικό αριθμητικό σύστημα, B = 10 και B – 1 = 9, και επομένως, το συμπλήρωμα ως προς ελαττωμένη βάση, δηλαδή το συμπλήρωμα ως προς 9, ενός δεκαδικού αριθμού **X** είναι:

$$\mathbf{Σ_9(X) = (10^n – 1) – X}$$

Το 10^n παριστάνει έναν αριθμό που αποτελείται από έναν άσο που ακολουθείται από n μηδενικά.
Το $10^n – 1$ είναι ένας αριθμός που παριστάνεται από n το πλήθος 9.

Για παράδειγμα, εάν n=3, έχουμε $10^3=1000$ και $10^3–1 = 999$.
Άρα το συμπλήρωμα ως προς 9 ενός δεκαδικού αριθμού προκύπτει αν αφαιρέσουμε κάθε ψηφίο του από το 9.

Για παράδειγμα:

$\Sigma_9(56399) = 43600$ (αφού: 9-5=4, 9-6=3, 9-3=6 και 9-9=0)

$\Sigma_9(024619) = 975380$

Στο δυαδικό αριθμητικό σύστημα, **B = 2** και **B – 1 = 1**.

Επομένως, το συμπλήρωμα ως προς 1 ενός δυαδικού αριθμού **X** είναι:

$$\mathbf{\Sigma_1(X) = (2^n - 1) - X}$$

‘Αρα, σε αυτή την περίπτωση:

- **το 2^n παριστάνεται από ένα δυαδικό αριθμό ο οποίος αποτελείται από έναν άσο που ακολουθείται από n το πλήθος μηδενικά**, και

- **το $2^n - 1$ είναι ένας δυαδικός αριθμός που παριστάνεται από n το πλήθος 1**.

Για παράδειγμα, εάν n = 3, έχουμε:

$$2^3 = (1000)_2$$

και

$$2^3 - 1 = (0111)_2.$$

Επομένως, το συμπλήρωμα ως προς 1 ενός δυαδικού αριθμού προκύπτει αν αφαιρέσουμε κάθε ψηφίο από το 1.
Ωστόσο, όταν αφαιρούμε δυαδικά ψηφία από το 1, μπορούμε να έχουμε μόνο είτε 1 – **0** = **1,** είτε 1 – **1** = **0**, που σημαίνει ότι το αντίστοιχο ψηφίο απλώς αλλάζει από 0 σε 1 ή από 1 σε 0.

Άρα,
το συμπλήρωμα ενός δυαδικού αριθμού ως προς 1 προκύπτει αλλάζοντας τα 0 σε 1 και τα 1 σε 0.

Παραδείγματα:

$$Σ_1(101011101) = 010100010$$

$$Σ_1(01101011) = 10010100$$

Συμπλήρωμα ως προς βάση ($Σ_{(B)}$)

Έστω ένας αριθμός $\mathbf{X = X_{n-1}X_{n-2} \ldots X_1X_0}$, με **n** το πλήθος ψηφία, σε ένα αριθμητικό σύστημα με βάση **B**.

Το συμπλήρωμα του **X** ως προς βάση ορίζεται ως:

$$\mathbf{Σ_B(X) = B^n - X}$$

Αυτή η σχέση δίνει:

$$Σ_B(X) = B^n - X = B^n - X + (1 - 1) = (B^n - 1) - X + 1 = Σ_{B-1}(X) + 1$$

Επομένως,

το συμπλήρωμα ενός αριθμού X ως προς βάση (B) ισούται με το συμπλήρωμα του αριθμού ως προς βάση μείον 1, συν μια μονάδα:

$$\mathbf{Σ_B(X) = Σ_{B-1}(X) + 1}$$

Επομένως, στο δεκαδικό σύστημα θα έχουμε: Σ10(Χ) = Σ9(Χ) + 1.

Για παράδειγμα, στο δεκαδικό αριθμητικό σύστημα, το συμπλήρωμα του αριθμού 735 ως προς βάση μείον 1 (Σ9) είναι ο αριθμός 264, αφού 735 + 264 = 999, και το συμπλήρωμα ως προς βάση (Σ10) είναι 264 + 1 = 265.

Στο δυαδικό σύστημα θα έχουμε: $Σ_2(X) = Σ_1(X) + 1$.

Υπενθυμίζεται ότι, το συμπλήρωμα ως προς βάση μείον 1, δηλαδή το συμπλήρωμα ως προς 1 ($Σ_1$), προκύπτει απλά με την αντιστροφή των ψηφίων του δυαδικού αριθμού: αντικαθιστούμε τα 0 με 1 και τα 1 με 0.

Για παράδειγμα, το συμπλήρωμα του δυαδικού αριθμού 1001 ως προς 1 είναι ο αριθμός 0110, οπότε το συμπλήρωμα ως προς 2 αυτού του δυαδικού αριθμού είναι 0110 + 1 = 0111.

Αφαίρεση με χρήση Συμπληρωμάτων

Σε όλα τα αριθμητικά συστήματα, αντί του κλασσικού αλγόριθμου της αφαίρεσης, μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο των συμπληρωμάτων, ειδικότερα μάλιστα στο δυαδικό αριθμητικό σύστημα, λόγω της ευκολίας εφαρμογής του στο συγκεκριμένο αριθμητικό σύστημα.

Για την αφαίρεση **X**(:*μειωτέος*) **– Y**(:*αφαιρετέος*) δύο μη προσημασμένων ακέραιων αριθμών, έστω $\mathbf{X = X_{n-1}X_{n-2} \ldots X_1\, X_0}$ και $\mathbf{Y = Y_{n-1}Y_{n-2} \ldots Y_1Y_0}$, με το ίδιο πλήθος **n** ψηφίων ο καθένας, στο αριθμητικό σύστημα με βάση το Β ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1. Εκφράζουμε τους αριθμούς με το ίδιο πλήθος ψηφίων προσθέτοντας, αν χρειάζεται, στον αριθμό με το μικρότερο πλήθος ψηφίων τον αναγκαίο αριθμό μηδενικών αριστερά από το μέγιστο σημαντικό ψηφίο του.
2. Προσδιορίζουμε το συμπλήρωμα ως προς βάση **($Σ_{(B)}$)** του αφαιρετέου.
3. Προσθέτουμε στον μειωτέο **X** το συμπλήρωμα ως προς βάση **($Σ_{(B)}$)** του αφαιρετέου **Y**, δηλαδή υπολογίζουμε το:

$$\mathbf{X + Σ_{(B)}(Y) = X + (B^n – Y) = X – Y + B^ν}$$

4. Αν **X≥Y**, τότε προκύπτει τελικό κρατούμενο 1 (ένα επιπλέον ψηφίο, που είναι ο συντελεστής της τάξης **B^n**), το οποίο ονομάζεται **ψηφίο υπερχείλισης** και μπορεί να παραληφθεί. Ο αριθμός που απομένει είναι η διαφορά **X – Y**.

5. Αν **X<Y**, τότε το άθροισμα που προκύπτει <u>έχει μηδενικό τελικό κρατούμενο (: δεν έχει κρατούμενο)</u> και ισούται με **B^n – (Y – X)**, το οποίο <u>είναι το συμπλήρωμα ως προς βάση του **X – Y**</u>, $Σ_2$(X – Y).

- Το αποτέλεσμα της αφαίρεσης είναι προφανώς ένας αρνητικός αριθμός, αφού ο μειωτέος είναι μικρότερος από τον αφαιρετέο.
- Για να πάρουμε το αποτέλεσμα στην κανονική μορφή, υπολογίζουμε το συμπλήρωμα ως προς βάση του αθροίσματος που προκύπτει και τοποθετούμε στην αρχή ένα αρνητικό πρόσημο.

Παράδειγμα 5: Με χρήση συμπληρωμάτων να γίνει η αφαίρεση $(619573)_{10} - (4237)_{10}$.

Παράδειγμα 5: Με χρήση συμπληρωμάτων να γίνει η αφαίρεση $(619573)_{10} - (4237)_{10}$.

Ο αφαιρετέος έχει δύο ψηφία λιγότερα από τον μειωτέο, άρα συμπληρώνουμε δύο μηδενικά αριστερά από το μέγιστο σημαντικό ψηφίο: 4237 = 004237.

$\Sigma_9(004237) = 995762$

$\Sigma_{10}(004237) = 995762 + 1 = 995763$

Μειωτέος	619573
+ Συμπλήρωμα ως προς 10 του αφαιρετέου	995763
Άθροισμα με ψηφίο υπερχείλισης	**1**615336
Διαφορά	**615336**

Παράδειγμα 6: Με χρήση συμπληρωμάτων να γίνει η αφαίρεση $(9573)_{10} - (14237)_{10}$.

Στην περίπτωση αυτή ο μειωτέος είναι μικρότερος από τον αφαιρετέο (X<Y), οπότε το αποτέλεσμα της αφαίρεσης θα είναι προφανώς ένας αρνητικός αριθμός.

$\Sigma_9(14237) = 85762$

$\Sigma_{10}(14237) = \Sigma_9(14237) + 1 = 85762 + 1 = 85763$

Μειωτέος	09573
+ Συμπλήρωμα ως προς 10 του αφαιρετέου	85763
Άθροισμα με <u>ψηφίο υπερχείλισης</u>	(**<u>0</u>**)95336

Το άθροισμα που προέκυψε είναι το συμπλήρωμα ως προς βάση της διαφοράς X-Y, $\Sigma_{10}(X - Y)$.

Για να πάρουμε το αποτέλεσμα σε κανονική μορφή, υπολογίζουμε το συμπλήρωμα ως προς βάση (Σ_{10}) του αθροίσματος που προέκυψε και τοποθετούμε στην αρχή ένα αρνητικό πρόσημο:

$\Sigma_9(95336) =$	04663
$\Sigma_{10}(95336) = \Sigma_9(95336) + 1 = 4663 + 1 =$	4664
Διαφορά	**– 4664**

Παράδειγμα 7: Με χρήση συμπληρωμάτων να γίνει η αφαίρεση $(10101)_2 - (1101)_2$.

Ο αφαιρετέος έχει ένα ψηφίο λιγότερο από τον μειωτέο, άρα συμπληρώνουμε ένα μηδενικό αριστερά από το μέγιστο σημαντικό ψηφίο: $(1101)_2 = (01101)_2$.

$\Sigma_1(01101) = 10010$

$\Sigma_2(01101) = \Sigma_1(01101) + 1 = 10010 + 1 = 10011$

Μειωτέος	10101
+ Συμπλήρωμα ως προς 2 του αφαιρετέου	10011
Άθροισμα με ψηφίο υπερχείλισης	$\cancel{1}01000$
Διαφορά	**01000**

Παράδειγμα 8: Με χρήση συμπληρωμάτων να γίνει η αφαίρεση $(1111)_2 – (10101)_2$

Στην περίπτωση αυτή ο μειωτέος είναι μικρότερος από τον αφαιρετέο (X<Y), οπότε το αποτέλεσμα της αφαίρεσης θα είναι προφανώς ένας αρνητικός αριθμός.

Επιπλέον να σημειωθεί ότι, αφού ο αφαιρετέος $(10101)_2$ αποτελείται από 5 ψηφία, όλη η διαδικασία θα πρέπει να πραγματοποιηθεί με 5 ψηφία.

$$\Sigma_1(10101) = 01010$$

$$\Sigma_2(10101) = \Sigma_1(10101) + 1 = 01010 + 1 = 01011$$

	Μειωτέος	01111
+	Συμπλήρωμα ως προς 2 του αφαιρετέου	01011
	Άθροισμα <u>με ψηφίο υπερχείλισης</u>	($\cancel{0}$)11010

Το άθροισμα που προέκυψε είναι το συμπλήρωμα ως προς βάση της διαφοράς X-Y, $\Sigma_2(X - Y)$.

Για να πάρουμε το αποτέλεσμα σε κανονική μορφή, υπολογίζουμε το συμπλήρωμα ως προς βάση του αθροίσματος που προέκυψε και τοποθετούμε στην αρχή ένα αρνητικό πρόσημο:

$\Sigma_1(11010) =$	00101
$\Sigma_2(11010) = \Sigma_1(11010) + 1 = 00101 + 1 =$	00110
Διαφορά	**– 110**

Πολλαπλασιασμός

Για τον πολλαπλασιασμό των δυαδικών αριθμών ισχύουν οι εξής περιπτώσεις:

0 x 0 = 0

0 x 1 = 0

1 x 0 = 0

1 x 1 = 1

Ο πολλαπλασιασμός δύο δυαδικών αριθμών μπορεί να γίνει με την ίδια μέθοδο όπως στο δεκαδικό αριθμητικό σύστημα.

Για παράδειγμα, να πολλαπλασιάσουμε τους αριθμούς $(1110)_2$ και $(1011)_2$:

Πολλαπλασιαστέος:					1	1	1	0
Πολλαπλασιαστής:				x	1	0	1	1
					1	1	1	0
				1	1	1	0	
			0	0	0	0		
		1	1	1	0			
Επιμέρους κρατούμενα:	1	1	1	1	1	0	0	
Γινόμενο:	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**

Να σημειωθεί ότι, κατά την επιμέρους άθροιση των ψηφίων κάθε στήλης, δημιουργούνται επιμέρους κρατούμενα, τα οποία μεταφέρονται στην αμέσως επόμενη στήλη (ολίσθηση προς τα αριστερά κατά μία θέση) και αθροίζονται με τα ψηφία αυτής.

Παρατηρούμε ότι:

- Το πλήθος των ψηφίων του γινόμενου ισούται με το άθροισμα του πλήθους των ψηφίων του πολλαπλασιαστέου και του πολλαπλασιαστή.
- Κάθε επιμέρους γινόμενο που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του εκάστοτε ψηφίου του πολλαπλασιαστή με τα ψηφία του πολλαπλασιαστέου είναι: είτε ίσο με τον πολλαπλασιαστέο, όταν το ψηφίο του πολλαπλασιαστή είναι 1, είτε μηδέν (με πλήθος ψηφίων ίσο με το πλήθος των ψηφίων του πολλαπλασιαστέου), όταν το ψηφίο του πολλαπλασιαστή είναι 0.

Στα ψηφιακά συστήματα, είναι πιο αποδοτικό ως προς την υλοποίηση (:απλούστερο κύκλωμα), αντί να προσθέτουμε στο τελευταίο βήμα του πολλαπλασιασμού όλα τα ψηφία των επιμέρους γινομένων κατά στήλη, να κάνουμε διαδοχικές προσθέσεις ώστε σε κάθε βήμα να παράγεται ένα μερικό γινόμενο, μέχρι και την εξαγωγή του τελικού γινομένου:

Πολλαπλασιαστέος:					1	1	1	0
Πολλαπλασιαστής:				x	1	0	1	1
					1	1	1	0
			+	1	1	1	0	
			1	0	1	0	1	
		+	0	0	0	0		
			1	0	1	0		
	+	1	1	1	0			
Γινόμενο:	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**

Να σημειώσουμε ότι, ένας δυαδικός αριθμός Α μπορεί να πολλαπλασιαστεί επί 2 απλά τοποθετώντας ένα ψηφίο 0 δεξιά του λιγότερου σημαντικού ψηφίου του.

Με αυτόν τον τρόπο, όλα τα ψηφία του αριθμού Α μετατοπίζονται μια θέση προς τα αριστερά, δηλαδή ο αριθμός ολισθαίνει προς τα αριστερά (shift left) κατά μία θέση.

Επομένως, εάν $A = \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\ldots\alpha_1\alpha_0$, τότε θα είναι $2 \times A = \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\ldots\alpha_1\alpha_0\underline{0}$.

Για παράδειγμα, εάν $A = 111$ ($=7_{10}$), τότε $2 \times A = 111\underline{0}$ ($=14_{10}$).

Κατ' αυτόν τον τρόπο, ένας αριθμός πολλαπλασιάζεται επί 2^k εάν μετατοπίσουμε τα ψηφία του προς τα αριστερά κατά k θέσεις.

Αντίστοιχα, εάν ένας δυαδικός αριθμός $A = \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\ldots\alpha_1\alpha_0$ ολισθήσει προς τα δεξιά κατά μία θέση (δεξιά ολίσθηση), έχουμε ως αποτέλεσμα τη διαίρεση του αριθμού δια 2, δηλαδή $A \div 2 = \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\ldots\alpha_1$, ενώ το τελευταίο (ελάχιστο σημαντικό) ψηφίο α_0 του αριθμού A χάνεται. Για παράδειγμα,

εάν: $A = 110$ ($=6_{10}$), τότε: $A \div 2 = 11$ ($=3_{10}$).

Κατ’ αυτόν τον τρόπο, ένας αριθμός διαιρείται δια 2^k εάν μετατοπίσουμε τα ψηφία του προς τα δεξιά κατά k θέσεις.

Αντίστοιχα, εάν ένας δυαδικός αριθμός $A = \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\ldots\alpha_1\alpha_0$ ολισθήσει προς τα δεξιά κατά μία θέση (δεξιά ολίσθηση), έχουμε ως αποτέλεσμα τη διαίρεση του αριθμού δια 2, δηλαδή $A \div 2 = \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\ldots\alpha_1$, ενώ το τελευταίο (ελάχιστο σημαντικό) ψηφίο α_0 του αριθμού A χάνεται. Για παράδειγμα,

εάν: $A = 110\ (=6_{10})$, τότε: $A \div 2 = 11\ (=3_{10})$.

Κατ' αυτόν τον τρόπο, ένας αριθμός διαιρείται δια 2^k εάν μετατοπίσουμε τα ψηφία του προς τα δεξιά κατά k θέσεις.

Παρατηρούμε ότι, η διαίρεση δια 2, με ολίσθηση του αριθμού προς τα δεξιά, μας δίνει ως αποτέλεσμα <u>μόνο το ακέραιο μέρος</u> του πηλίκου. Για παράδειγμα,

εάν $A = 1001\ (=9_{10})$, τότε $A \div 2 = 100\ (=4_{10})$.

Διαίρεση

Η διαίρεση δύο δυαδικών αριθμών μπορεί να γίνει με την ίδια μέθοδο με το δεκαδικό σύστημα.

Για παράδειγμα, να διαιρέσουμε τον αριθμό $(11011)_2 = (27)_{10}$ δια του αριθμού $(11)_2 = (3)_{10}$:

$$
\begin{array}{cccccc|cccc}
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\
\cline{7-8}
- & 1 & 1 & & & & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\cline{2-3}
 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\
 & - & 0 & 0 & & & & & & \\
\cline{3-4}
 & & 0 & 0 & 1 & & & & & \\
 & & - & 0 & 0 & & & & & \\
\cline{4-5}
 & & & 0 & 1 & 1 & & & & \\
 & & & - & 1 & 1 & & & & \\
\cline{5-6}
 & & & & 0 & 0 & & & &
\end{array}
$$

Στην περίπτωση που το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι διάφορο από το μηδέν, προκύπτει επιπλέον του ακέραιου μέρους (που ισούται με το πηλίκο της διαίρεσης) και κλασματικό μέρος.

Την αναπαράσταση δυαδικών αριθμών με ακέραιο και κλασματικό μέρος θα την εξετάσουμε στη συνέχεια.