Αναπαράσταση αριθμών με ακέραιο και κλασματικό μέρος

Όπως είδαμε, η σύμβαση που ακολουθείται στην αναπαράσταση των αριθμών σε όλα τα αριθμητικά συστήματα, είναι να γράφονται μόνο οι συντελεστές (δηλαδή τα ψηφία με τα οποία πολλαπλασιάζονται οι αντίστοιχες δυνάμεις της βάσης του συστήματος) και από τη θέση των συντελεστών να προσδιορίζονται οι αναγκαίες δυνάμεις της βάσης:

$$\mathbf{A = \alpha_{n-1}\alpha_{n-2} \ldots \alpha_1\alpha_0 \;=\; \alpha_{n-1}} \times \mathbf{B^{n-1}} + {}_{\mathbf{n-2}} \times \mathbf{B^{n-2}} + \mathbf{\ldots} + \mathbf{\alpha_1} \times \mathbf{B^1} + \mathbf{\alpha_0} \times \mathbf{B^0}$$

όπου **B** η βάση του αριθμητικού συστήματος και οι συντελεστές $\mathbf{\alpha_i}$ μπορεί να είναι οποιοδήποτε από τα ψηφία του αριθμητικού συστήματος, τα οποία παίρνουν ακέραιες τιμές από **0** μέχρι και **B – 1**.

Οι τιμές του δείκτη **i** δίνουν την τάξη της θέσης του εκάστοτε συντελεστή και κατά συνέπεια τη δύναμη της βάσης **B** με την οποία πρέπει να πολλαπλασιαστεί ο συντελεστής αυτός.

Όταν έχουμε μη-προσημασμένους αριθμούς, οι οποίοι έχουν ακέραιο και κλασματικό μέρος, η αναπαράσταση ακολουθεί την ίδια λογική:

$$\mathbf{A = \alpha_{n-1} \ldots \alpha_1 \alpha_0 \,.\, \alpha_{-1}\alpha_{-2}\ldots\alpha_{-m} = \alpha_{n-1}B^{n-1} + \ldots + \alpha_1 B^1 + \alpha_0 B^0 .\ \alpha_{-1} B^{-1} + \alpha_{-2}B^{-2} + \ldots + \alpha_{-m}B^{-m}}$$

Για παράδειγμα, ο δεκαδικός αριθμός $(739.24)_{10}$ είναι η αναπαράσταση της μαθηματικής έκφρασης:

$$7 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 9 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2}$$

Ομοίως, ο δυαδικός αριθμός $(11010.11)_2$ αναπαριστάνει την μαθηματική έκφραση:

$$1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} = (26.75)_{10}$$

και ο οκταδικός αριθμός $(127.4)_8$ θα είναι:

$$1 \times 8^2 + 2 \times 8^1 + 7 \times 8^0 + 4 \times 8^{-1} = 64 + 16 + 7 + 0.5 = (87.5)_{10}$$

Μετατροπές αριθμών με ακέραιο και κλασματικό μέρος σε συστήματα με άλλη βάση

Η μετατροπή δεκαδικών αριθμών που έχουν ακέραιο και κλασματικό μέρος γίνεται χωριστά για το ακέραιο και το κλασματικό μέρος και, ακολούθως, συνδυάζονται τα δύο αποτελέσματα.

Για τη μετατροπή του κλασματικού μέρους ενός δεκαδικού αριθμού σε ένα σύστημα με βάση Β ακολουθείται η εξής διαδικασία:

- Πολλαπλασιάζουμε το κλασματικό μέρος του δεκαδικού αριθμού με τη βάση Β και προκύπτει ένα ακέραιο και ένα κλασματικό μέρος γινομένου.
- Στη συνέχεια το νέο κλασματικό μέρος πολλαπλασιάζεται με τη βάση Β και προκύπτει ένα νέο ακέραιο και ένα νέο κλασματικό μέρος.
- Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι το νέο κλασματικό μέρος που προκύπτει να είναι 0 ή μέχρι ο αριθμός των ψηφίων να γίνει τέτοιος, ώστε να έχουμε αρκετή ακρίβεια. Οι συντελεστές του κλασματικού μέρους του αριθμού στο σύστημα με βάση Β λαμβάνονται από τα ακέραια μέρη.

Παράδειγμα 9: Να εκφραστεί ο δεκαδικός αριθμός $(0.6875)_{10}$ στο δυαδικό σύστημα.

		Ακέραιο μέρος		Κλασματικό μέρος	**Συντελεστής**
0.6875 x 2	=	**1**	+	0.3750	$\boldsymbol{\alpha_{-1} = 1}$
0.3750 x 2	=	**0**	+	0.7500	$\boldsymbol{\alpha_{-2} = 0}$
0.7500 x 2	=	**1**	+	0.5000	$\boldsymbol{\alpha_{-3} = 1}$
0.5000 x 2	=	**1**	+	0.0000	$\boldsymbol{\alpha_{-4} = 1}$

Επομένως, $(0.6875)_{10} = (0.1011)_2$

Παράδειγμα 10: Να εκφραστεί ο δεκαδικός αριθμός $(141.513)_{10}$ στο οκταδικό σύστημα.

- Μετατροπή του <u>ακέραιου μέρους</u> του αριθμού στο οκταδικό σύστημα:

	141	8		
LSD	**5**	17	8	
		1	2	8
		MSD	**2**	0

Επομένως, το ακέραιο μέρος του αριθμού θα είναι: $\mathbf{(141)_{10} = (215)_8}$

- Μετατροπή του <u>κλασματικού μέρους</u> του αριθμού στο οκταδικό σύστημα:

$$0.513 \times 8 = \mathbf{4}.104$$
$$0.104 \times 8 = \mathbf{0}.832$$
$$0.832 \times 8 = \mathbf{6}.656$$
$$0.656 \times 8 = \mathbf{5}.244$$

Επομένως, <u>με ακρίβεια τεσσάρων σημαντικών ψηφίων</u>, το κλασματικό μέρος του αριθμού θα είναι: $(0.513)_{10} = (0.4065)_8$. Άρα, θα έχουμε: $(141.513)_{10} = (215.4065)_8$.

Η μετατροπή ενός αριθμού μεταξύ αριθμητικών συστημάτων με βάση B, η οποία μπορεί να εκφραστεί ως δύναμη του 2 (δυαδικό: $B=2=2^1$, τετραδικό: $B=4=2^2$, οκταδικό: $B=8=2^3$, δεκαεξαδικό: $B=16=2^4$), γίνεται μέσω του δυαδικού αριθμητικού συστήματος.

Για να μετατρέψουμε έναν αριθμό με ακέραιο και κλασματικό μέρος από το δυαδικό σύστημα σε ένα σύστημα με βάση B^n (τετραδικό: n = 2, οκταδικό: n = 3, δεκαεξαδικό: n = 4), χωρίζουμε τον δυαδικό αριθμό σε ομάδες των n bits, ξεκινώντας από την υποδιαστολή και προχωρώντας προς τα αριστερά για το ακέραιο μέρος και προς τα δεξιά για το κλασματικό.

Στη συνέχεια, αντικαθιστούμε την κάθε ομάδα bits με τον αντίστοιχο συντελεστή του συστήματος με βάση B^n.

Για παράδειγμα, ο δυαδικός αριθμός $(10110001101011.111100000110)_2$, στο οκταδικό σύστημα ($B = 8 = 2^3$, n = 3) θα είναι:

$$(\underline{010}\ \underline{110}\ \underline{001}\ \underline{101}\ \underline{011}\,.\,\underline{111}\ \underline{100}\ \underline{000}\ \underline{110})_2 = (26153.7406)_8$$

$$2\quad 6\quad 1\quad 5\quad 3\ .\ 7\quad 4\quad 0\quad 6$$

Η μετατροπή από το δυαδικό στο δεκαεξαδικό σύστημα είναι παρόμοια, με τη διαφορά ότι χωρίζουμε σε ομάδες των τεσσάρων bits, ενώ στο τετραδικό σε ομάδες των δύο bits:

$$(\underline{0010}\ \underline{1100}\ \underline{0110}\ \underline{1011}\,.\,\underline{1111}\ \underline{0000}\ \underline{0110})_2 = (2C6B.F06)_{16}$$

$$\underleftarrow{2\quad C\quad 6\quad B}\ .\ \underrightarrow{F\quad 0\quad 6}$$

$$(\underline{10}\ \underline{11}\ \underline{00}\ \underline{01}\ \underline{10}\ \underline{10}\ \underline{11}\,.\,\underline{11}\ \underline{11}\ \underline{00}\ \underline{00}\ \underline{01}\ \underline{10})_2 = (2301223.330012)_4$$

$$\underleftarrow{2\quad 3\quad 0\quad 1\quad 2\quad 2\quad 3}\ .\ \underrightarrow{3\quad 3\quad 0\quad 0\quad 1\quad 2}$$

Προσημασμένοι δυαδικοί αριθμοί

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, στα ψηφιακά συστήματα οποιαδήποτε πληροφορία αναπαριστάνεται αποκλειστικά με τη χρήση δυαδικών ψηφίων.

Αυτό ισχύει και για την αναπαράσταση προσημασμένων δυαδικών αριθμών.

Στο δυαδικό αριθμητικό σύστημα υπάρχουν τρεις τρόποι αναπαράστασης των προσημασμένων αριθμών:

Παράσταση προσημασμένου μέτρου (signed magnitude)

Σε αυτόν τον τρόπο αναπαράστασης χρησιμοποιείται ένα επιπλέον ψηφίο για το πρόσημο, που καταλαμβάνει την περισσότερο σημαντική θέση του αριθμού, δηλαδή, **το μέγιστο σημαντικό ψηφίο παριστάνει το πρόσημο του αριθμού,** + (συν) ή – (πλην).

Η σύμβαση που ακολουθείται είναι:

- εάν το ψηφίο προσήμου είναι **0**, ο αριθμός είναι **θετικός**, ενώ
- εάν το ψηφίο προσήμου είναι **1**, ο αριθμός είναι **αρνητικός**.

Για παράδειγμα, στην παράσταση προσημασμένου μέτρου, ο προσημασμένος δεκαδικός αριθμός **+**9_{10} εκφράζεται με την ακολουθία δυαδικών ψηφίων **0**1001, ενώ ο αριθμός **-**9_{10}, εκφράζεται ως **1**1001.

Σε αυτόν τον τρόπο αναπαράστασης έχουμε τρία μειονεκτήματα:

1. Δεσμεύουμε ένα επιπλέον ψηφίο για την αναπαράσταση του προσήμου.
2. Προκύπτουν δύο αναπαραστάσεις για το μηδέν, το **+**0 (**0**000) και το **-**0 (**1**000).
3. Εάν ο τρόπος αναπαράστασης των αριθμών δεν είναι γνωστός εκ των προτέρων, προκαλείται σύγχυση σχετικά με τη σωστή ερμηνεία του ρόλου των ψηφίων του αριθμού.

Στο παράδειγμά μας, ο μεν συνδυασμός ψηφίων **0**1001 (δηλαδή το **+**9_{10}) δίνει τη σωστή τιμή όπως και στην αναπαράσταση των μη-προσημασμένων αριθμών, αλλά ο συνδυασμός **1**1001, εάν δεν είναι γνωστό ότι πρόκειται για προσημασμένο αριθμό, δίνει τιμή 25_{10} στην αναπαράσταση των μη-προσημασμένων αριθμών.

Η αναπαράσταση αυτή δεν είναι πρακτική για την υλοποίηση αριθμητικών πράξεων με προσημασμένους δυαδικούς αριθμούς στα ψηφιακά συστήματα.

Παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος (signed complement)

Στο σύστημα αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί είτε το συμπλήρωμα ως προς 1, είτε το συμπλήρωμα ως προς 2, αλλά η χρήση του συμπληρώματος ως προς 2 είναι η πιο συνηθισμένη.

Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε τον δεκαδικό μη-προσημασμένο αριθμό 9, ο οποίος παριστάνεται στο δυαδικό σύστημα με 4 ψηφία (1001).

Στην παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 1, ο προσημασμένος δεκαδικός αριθμός **+**9_{10} εκφράζεται με την ακολουθία δυαδικών ψηφίων **0**1001, ενώ ο αριθμός **-**9_{10}, εκφράζεται ως **1**0110.

Δεκαδικός	Παράσταση προσημασμένου μεγέθους	Παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 1	Παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2
+7	0111	0111	0111
+6	0110	0110	0110
+5	0101	0101	0101
+4	0010	0010	0010
+3	0011	0011	0011
+2	0010	0010	0010
+1	0001	0001	0001
0	0000 ή 1000	0000 ή 1000	0000
-1	1001	1110	1111
-2	1010	1101	1110
-3	1011	1100	1101
-4	1100	1011	1100
-5	1101	1010	1011
-6	1110	1001	1010
-7	1111	1000	1001
-8	-	-	1000

Παρατηρούμε ότι:

- Η παράσταση των θετικών αριθμών είναι ίδια και στους τρεις τρόπους αναπαράστασης και προκύπτει από τους αντίστοιχους μη προσημασμένους αριθμούς, με την προσθήκη ενός επιπλέον ψηφίου προσήμου με τιμή 0, στη θέση του μέγιστου σημαντικού ψηφίου.
- Στις παραστάσεις προσημασμένου μέτρου και προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 1, ο αριθμός 0 μπορεί να εκφραστεί με δύο τρόπους, **+ 0** (**0000**) και **– 0** (**1000**).
- Και στους τρεις τρόπους αναπαράστασης με τέσσερα δυαδικά ψηφία, ο μεγαλύτερος θετικός αριθμός που μπορεί να παρασταθεί είναι ο δεκαδικός αριθμός +7 και ο μικρότερος ο δεκαδικός αριθμός -7, με εξαίρεση την παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2, στην οποία μπορεί να παρασταθεί και ο δεκαδικός αριθμός - 8.
- Στην παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2, ένας αρνητικός δεκαδικός αριθμός μπορεί να εκφραστεί είτε ως το συμπλήρωμα ως προς 2 του αντίστοιχου δυαδικού μη-προσημασμένου αριθμού, πλέον του ψηφίου προσήμου 1 στη θέση του μέγιστου σημαντικού ψηφίου, είτε ως το συμπλήρωμα ως προς 2 του αντίστοιχου θετικού δυαδικού προσημασμένου αριθμού, συμπεριλαμβάνοντας και το ψηφίο προσήμου στους υπολογισμούς.

Παράδειγμα 11: Να εκφράσετε τους αριθμούς $+(74)_{10}$ και $-(74)_{10}$ στις παραστάσεις προσημασμένου μέτρου και προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2, με 8 συνολικά δυαδικά ψηφία.

Το μέτρο του δεκαδικού αριθμού 74 με 7 δυαδικά ψηφία είναι $(74)_{10} = (1001010)_2$. Το όγδοο ψηφίο χρησιμοποιείται για το πρόσημο.

Στην <u>απεικόνιση προσημασμένου μέτρου</u> θα έχουμε:

$+(74)_{10} = \mathbf{0}1001010$

$-(74)_{10} = \mathbf{1}1001010$

Στην <u>απεικόνιση προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2</u> για $+(74)_{10}$ θα έχουμε την ίδια απεικόνιση όπως προηγουμένως, ενώ για το $-(74)_{10}$ θα πρέπει να υπολογίσουμε το συμπλήρωμα ως προς 2 του αριθμού 01001010 (συμπεριλαμβάνουμε και το ψηφίο προσήμου):

$-(74)_{10} = \Sigma_2(01001010) = \Sigma_1(01001010) + 1 = 10110101 + 1 = 10110110$

Αριθμητικές πράξεις με προσημασμένους δυαδικούς αριθμούς

Πρόσθεση

Στην πρόσθεση δύο δυαδικών αριθμών εκφρασμένων σε παράσταση προσημασμένου μέτρου, απαιτείται αρχικά η σύγκριση των προσήμων και του μέτρου των αριθμών και ακολούθως εκτελείται η πράξη της πρόσθεσης ή της αφαίρεσης.

Διακρίνουμε τις ακόλουθες δύο περιπτώσεις:

- Οι δύο αριθμοί είναι ομόσημοι (είτε θετικοί, είτε αρνητικοί)

Στην περίπτωση αυτή προσθέτουμε τα μέτρα των δύο αριθμών και διατηρούμε το πρόσημο.

Για παράδειγμα:

$(+\underline{74})_{10} + (+\underline{12})_{10} = \underline{1001010} + \underline{0001100} = 0\underline{1010110} = (+\underline{86})_{10}$

$(-\underline{74})_{10} + (-\underline{12})_{10} = \underline{1001010} + \underline{0001100} = 1\underline{1010110} = (-\underline{86})_{10}$

Παρατηρούμε ότι το μέτρο των αριθμών παραμένει το ίδιο, ενώ αλλάζει το ψηφίο προσήμου.

➢ Οι δύο αριθμοί είναι ετερόσημοι (: έχουν διαφορετικό πρόσημο)

Στην περίπτωση αυτή συγκρίνουμε τα μέτρα των αριθμών, αφαιρούμε το μικρότερο από το μεγαλύτερο και διατηρούμε το πρόσημο του μεγαλύτερου αριθμού.

Για παράδειγμα, για να προσθέσουμε τους αριθμούς $(+74)_{10}$ και $(–12)_{10}$, αρχικά αφαιρούμε τα μέτρα των δύο αριθμών:

$$(\underline{74})_{10} - (\underline{12})_{10} = \underline{1001010} - \underline{0001100} = \underline{0111110} = (\underline{62})_{10}$$

Στη συνέχεια, προσθέτουμε αριστερά από το μέγιστο σημαντικό ψηφίο του αριθμού που προέκυψε από την αφαίρεση, το ψηφίο προσήμου, που στο παράδειγμά μας είναι 0, επειδή το αποτέλεσμα της αφαίρεσης 74 – 12 είναι θετικός αριθμός.

Επομένως, το αποτέλεσμα της πρόσθεσης αυτής είναι ο θετικός αριθμός:

$$(+74)_{10} + (-12)_{10} = 0\underline{0111110} = (+\underline{62})_{10}$$

Αντίστοιχα, κατά την πρόσθεση των αριθμών $(–74)_{10}$ και $(+12)_{10}$, θα έχουμε ως αποτέλεσμα έναν αρνητικό αριθμό, με το ίδιο μέτρο όπως προηγουμένως, αλλά με ψηφίο προσήμου 1:

$$(-74)_{10} + (+12)_{10} = 1\underline{0111110} = (-\underline{62})_{10}$$

Αφαίρεση

Η αφαίρεση δύο προσημασμένων δυαδικών αριθμών εκφρασμένων σε <u>παράσταση προσημασμένου μέτρου</u> ανάγεται σε πρόσθεση του μειωτέου με τον αντίθετο αριθμό του αφαιρετέου, ο οποίος εκφράζεται ως το συμπλήρωμα ως προς 2 του αφαιρετέου και η πράξη εκτελείται σύμφωνα με αυτά που παρουσιάσαμε προηγουμένως.

Για την αφαίρεση δύο προσημασμένων δυαδικών αριθμών εκφρασμένων σε <u>παράσταση</u> <u>προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2</u>, ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

Παίρνουμε το συμπλήρωμα ως προς 2 του αφαιρετέου (συμπεριλαμβανομένου του ψηφίου προσήμου) και το προσθέτουμε στον μειωτέο (συμπεριλαμβανομένου του ψηφίου προσήμου).

<u>Εάν προκύψει κρατούμενο στη θέση του ψηφίου προσήμου, αυτό αγνοείται.</u>

Η διαδικασία αυτή έχει καθιερωθεί επειδή η πράξη της αφαίρεσης μπορεί να αλλάξει ουσιαστικά σε πράξη πρόσθεσης, εάν απλά αλλάξουμε το πρόσημο του αφαιρετέου και εκτελέσουμε πρόσθεση, όπως φαίνεται στις παρακάτω σχέσεις:

$$(\pm A) - (+B) = (\pm A) + (-B)$$

$$(\pm A) - (-B) = (\pm A) + (+B)$$

Η αλλαγή ενός θετικού αριθμού σε αρνητικό προκύπτει απλά, παίρνοντας το συμπλήρωμα ως προς 2 του αριθμού.

Ισχύει επίσης το αντίστροφο, επειδή το συμπλήρωμα ως προς 2 ενός αρνητικού αριθμού, εκφρασμένου σε μορφή προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2, παράγει τον αντίστοιχο θετικό αριθμό (: *“δύο αρνήσεις κάνουν μια κατάφαση”*).

Παράδειγμα 12: Δίνονται οι δεκαδικοί αριθμοί **A = + 6** και **B = – 13**.

Να εκφραστούν οι αριθμοί αυτοί σε παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2 και να πραγματοποιηθούν οι πράξεις: **A + B**, **A – B**, **– A + B** και **– A – B**.

Αρχικά θα πρέπει να προσδιορίσουμε το πλήθος των απαιτούμενων δυαδικών ψηφίων για την έκφραση των αριθμών σε παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2. Αυτό ισούται με το πλήθος δυαδικών ψηφίων που απαιτούνται για την έκφραση του μέτρου των αριθμών σε δυαδική μορφή, πλέον ενός ψηφίου για το πρόσημο. Στην περίπτωσή μας έχουμε:

$$6_{10} = 110_2$$
$$13_{10} = 1101_2$$

Παρατηρούμε ότι για την έκφραση του μέτρου σε δυαδική μορφή, οι δύο αριθμοί απαιτούν διαφορετικό πλήθος ψηφίων.

Σημειώνουμε εδώ ότι, για την εκτέλεση πράξεων μεταξύ αριθμών εκφρασμένων σε παράσταση προσημασμένου μέτρου ή/και προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2, **και οι δύο αριθμοί θα πρέπει να εκφραστούν με το ίδιο πλήθος ψηφίων**, άρα ο μεγαλύτερος κατά μέτρο αριθμός καθορίζει και το πλήθος των ψηφίων με το οποίο θα παρασταθούν οι αριθμοί.

Επομένως, σε παράσταση προσημασμένου μεγέθους, οι αριθμοί μας θα πρέπει να εκφραστούν με 5 δυαδικά ψηφία, 4 ψηφία για το μέτρο συν ένα ψηφίο προσήμου.

Ο αριθμός **A** είναι θετικός, άρα η έκφρασή σε παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2 είναι ίδια με αυτήν σε παράσταση προσημασμένου μεγέθους και, με 5 δυαδικά ψηφία συμπεριλαμβανομένου του ψηφίου προσήμου, θα είναι:

A = + 6 = **0**0110

Ο αριθμός **B** είναι αρνητικός. Η έκφρασή του σε παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2 προκύπτει από τον υπολογισμό του συμπληρώματος ως προς 2 του μέτρου του αριθμού, πλέον ενός ψηφίου προσήμου 1 στη θέση του μέγιστου σημαντικού ψηφίου.

Το μέτρο του αριθμού **B** βρήκαμε ότι είναι 1101. Επομένως, το συμπλήρωμά του ως προς 2 είναι:

$$\Sigma_2(\mathbf{1101}) = \Sigma_1(\mathbf{1101}) + 1 = \mathbf{0010} + 1 = \mathbf{0011}$$

Άρα, η έκφραση του **B** σε παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2 είναι:

$$\mathbf{B} = \mathbf{-}\,13 = \mathbf{10011}$$

Προφανώς στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε εάν υπολογίζαμε απ’ ευθείας το συμπλήρωμα ως προς 2 του αριθμού + 13 = **0**1101, δηλαδή την έκφραση του + 13 σε παράσταση προσημασμένου μεγέθους ή/και προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2 (είναι ίδια, όταν πρόκειται για θετικούς αριθμούς):

$$\Sigma_2(\mathbf{0}1101) = \Sigma_1(\mathbf{0}1101) + 1 = 10010 + 1 = \mathbf{1}0011$$

Κατά την πρόσθεση ή αφαίρεση δύο προσημασμένων αριθμών με πλήθος ψηφίων n (συμπεριλαμβανομένου του ψηφίου προσήμου), είναι πιθανό το αποτέλεσμα να απαιτεί n+1 πλήθος ψηφίων για την ορθή παράστασή του. Στην περίπτωση αυτή έχουμε μετατόπιση του ψηφίου προσήμου κατά μία θέση προς τα αριστερά.

Η κατάσταση αυτή αναφέρεται ως **υπερχείλιση** (overflow). Η υπερχείλιση αποτελεί πρόβλημα διότι οδηγεί σε λανθασμένα αποτελέσματα.

Για παράδειγμα, κατά την πρόσθεση των θετικών προσημασμένων δυαδικών αριθμών 0110 = $(+6)_{10}$ και 0101 = $(+5)_{10}$, εκφρασμένων με 4 δυαδικά ψηφία συμπεριλαμβανομένου του ψηφίου προσήμου, προκύπτει το αρνητικό αποτέλεσμα 1011 = $(-5)_{10}$, το οποίο προφανώς είναι λανθασμένο.

Αυτό συμβαίνει επειδή το ορθό αποτέλεσμα 01011 = $(+11)_{10}$ δεν μπορεί να εκφραστεί με 4 δυαδικά ψηφία, αλλά απαιτεί 5 δυαδικά ψηφία.

Εάν εκφράσουμε τους δοθέντες προσημασμένους αριθμούς με 5 δυαδικά ψηφία, τότε $(+6)_{10}$ = 00110 και $(+5)_{10}$ = 00101, και το άθροισμα που προκύπτει είναι 01011 = $(11)_{10}$, το οποίο είναι το ορθό αποτέλεσμα.

Υπερχείλιση είναι ομοίως πιθανό να προκύψει κατά την πρόσθεση δύο προσημασμένων αρνητικών αριθμών.

Για παράδειγμα, κατά την πρόσθεση των αρνητικών προσημασμένων δυαδικών αριθμών 1010 = $(-6)_{10}$ και 1011 = $(-5)_{10}$, εκφρασμένων με 4 δυαδικά ψηφία συμπεριλαμβανομένου του ψηφίου προσήμου, σε μορφή προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2, προκύπτει το θετικό αποτέλεσμα 0101 = $(+5)_{10}$, το οποίο προφανώς είναι λανθασμένο.

Επίσης, υπερχείλιση είναι ομοίως πιθανό να προκύψει και κατά την αφαίρεση ετερόσημων προσημασμένων αριθμών, αφού:

$$(+A) - (-B) = (+A) + (+B)$$

$$(-A) - (+B) = (-A) + (-B).$$

Η υπερχείλιση αποτελεί πρόβλημα στα ψηφιακά συστήματα στα οποία το πλήθος των ψηφίων των θέσεων μνήμης, όπου αποθηκεύονται οι αριθμοί, είναι συγκεκριμένο, με συνέπεια να μην μπορεί να αποθηκευτεί το αποτέλεσμα μιας πράξης, που το πλήθος των ψηφίων του υπερβαίνει το πλήθος των διαθέσιμων ψηφίων θέσεων της μνήμης.

Το πρόβλημα της υπερχείλισης αντιμετωπίζεται συνήθως με τη χρήση ειδικής θέσης μνήμης, με βάση το περιεχόμενο της οποίας υποδεικνύεται εάν υπήρξε υπερχείλιση στην πράξη που εκτελέστηκε.

Να σημειωθεί ότι, οι δυαδικοί αριθμοί σε παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2, προστίθενται και αφαιρούνται σύμφωνα με τους ίδιους κανόνες πρόσθεσης και αφαίρεσης που ισχύουν για τους μη-προσημασμένους δυαδικούς αριθμούς.

Επομένως, οι υπολογιστές χρειάζονται ένα και μοναδικό ηλεκτρονικό κύκλωμα για να εκτελέσουν και τις δύο πράξεις.

Πολλαπλασιασμός

Στον πολλαπλασιασμό προσημασμένων δυαδικών αριθμών διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

1. Εάν και οι δύο αριθμοί είναι θετικοί, ο πολλαπλασιασμός εκτελείται με τον ίδιο τρόπο όπως για τους μη-προσημασμένους αριθμούς.
2. Εάν και οι δύο αριθμοί είναι αρνητικοί, τότε το γινόμενό τους θα είναι ένας θετικός αριθμός.
   - Αν οι αριθμοί είναι εκφρασμένοι σε παράσταση <u>προσημασμένου μέτρου</u>, αγνοούμε το ψηφίο προσήμου και εκτελούμε την πράξη του πολλαπλασιασμού με τον ίδιο τρόπο όπως για τους μη-προσημασμένους αριθμούς.
   - Αν οι αριθμοί είναι εκφρασμένοι σε <u>παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2</u>, λαμβάνουμε το συμπλήρωμα ως προς 2 των αριθμών, μετατρέποντάς τους έτσι σε θετικούς αριθμούς και εκτελούμε την πράξη του πολλαπλασιασμού με τον ίδιο τρόπο όπως για τους μη-προσημασμένους αριθμούς.

3. Εάν ο ένας αριθμός είναι θετικός και ο άλλος αρνητικός, τότε το γινόμενό τους θα είναι ένας αρνητικός αριθμός.
   - Αν οι αριθμοί είναι εκφρασμένοι σε παράσταση προσημασμένου μέτρου, αγνοούμε το ψηφίο προσήμου και εκτελούμε την πράξη του πολλαπλασιασμού με τον ίδιο τρόπο όπως για τους μη-προσημασμένους αριθμούς και ακολούθως προσθέτουμε το (αρνητικό) ψηφίο προσήμου ως το μέγιστο σημαντικό ψηφίο.
   - Αν οι αριθμοί είναι εκφρασμένοι σε παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2, λαμβάνουμε το συμπλήρωμα ως προς 2 μόνο του αρνητικού αριθμού, μετατρέποντάς τον έτσι σε θετικό αριθμό, εκτελούμε την πράξη του πολλαπλασιασμού με τον ίδιο τρόπο όπως για τους μη-προσημασμένους αριθμούς και, επειδή ο αριθμός που θα προκύψει ως γινόμενο θα είναι ένας θετικός αριθμός, υπολογίζουμε το συμπλήρωμά του ως προς 2 για να τον μετατρέψουμε στον ισοδύναμο αρνητικό αριθμό σε παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2.

Παράδειγμα 13: Να υπολογιστεί το γινόμενο των προσημασμένων δυαδικών αριθμών $01110 = (+14)_{10}$ και $10101 = (-11)_{10}$.

Μετατρέπουμε τον αρνητικό δυαδικό αριθμό $10101 = (-11)_{10}$ σε θετικό, υπολογίζοντας το συμπλήρωμά του ως προς 2:

$$\Sigma_2(10101) = \Sigma_1(10101) + 1 = 01010 + 1 = 01011$$

Εκτελούμε την πράξη του πολλαπλασιασμού μεταξύ των 01110 και 01011, με τον ίδιο τρόπο όπως για τους μη-προσημασμένους αριθμούς:

Πολλαπλασιαστέος:					1	1	1	0
Πολλαπλασιαστής:				x	1	0	1	1
					1	1	1	0
				1	1	1	0	
			0	0	0	0		
		1	1	1	0			
Επιμέρους κρατούμενα:	1	1	1	1	1	0	0	
Γινόμενο:	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**

Επομένως, το γινόμενο που προκύπτει είναι ο θετικός αριθμός με μέτρο:

$$10011010 = 154_{10}$$

και σε μορφή προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2:

$$010011010 = (+154)_{10}.$$

Ακολούθως, για να βρούμε το γινόμενο των δοθέντων αριθμών στη ζητούμενη αναπαράσταση, υπολογίζουμε το συμπλήρωμά του ως προς 2 για να τον μετατρέψουμε στον ισοδύναμο αρνητικό αριθμό σε παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2:

$$\Sigma_2(010011010) = \Sigma_1(010011010) + 1 = 101100101 + 1 = 101100110$$

Άρα, το ζητούμενο γινόμενο είναι: $101100110 = (-154)_{10}$.

Διαίρεση

Στη διαίρεση προσημασμένων δυαδικών αριθμών διακρίνουμε τις ίδιες περιπτώσεις και ακολουθούμε την ίδια διαδικασία, όπως στον πολλαπλασιασμό.

Παράδειγμα 14: Δίνονται σε μορφή προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2 οι αριθμοί A = 011011 και B = 101.

Να προσδιοριστούν οι αντίστοιχοι ισοδύναμοι προσημασμένοι δεκαδικοί αριθμοί και να υπολογιστεί το πηλίκο της διαίρεσης A÷B.

Ο πρώτος αριθμός είναι θετικός, αφού το ψηφίο προσήμου είναι 0, και το μέτρο του ισούται με:

$$11011_2 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 16 + 8 + 0 + 2 + 1 = 27_{10}$$

Επομένως:

$$011011 = (+27)_{10}.$$

Ο δεύτερος αριθμός είναι αρνητικός, αφού το ψηφίο προσήμου είναι 1.

Επομένως για να προσδιορίσουμε την δεκαδική του αξία πρέπει να υπολογίσουμε το συμπλήρωμα αυτού ως προς 2:

$$\Sigma_2(101) = \Sigma_1(101) + 1 = 010 + 1 = 011$$

Το δεκαδικό ισοδύναμο του μέτρου αυτού του αριθμού είναι:

$$1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 2 + 1 = 3_{10}$$

Επομένως, 101 = $(-3)_{10}$.

Για να εκτελέσουμε τη διαίρεση, αρχικά πρέπει να μετατρέψουμε τον αρνητικό δυαδικό αριθμό 101 = $(-3)_{10}$ σε θετικό, το οποίο έχουμε κάνει ήδη στο προηγούμενο βήμα του παραδείγματος και βρήκαμε ότι είναι ίσο με: 011.

Ακολούθως εκτελούμε τη διαίρεση των δύο δυαδικών αριθμών:

$$
\begin{array}{cccccc|cccc}
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\
\cline{7-8}
- & 1 & 1 & & & & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\cline{2-3}
 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\
 & - & 0 & 0 & & & & & & \\
\cline{3-4}
 & & 0 & 0 & 1 & & & & & \\
 & & - & 0 & 0 & & & & & \\
\cline{4-5}
 & & & 0 & 1 & 1 & & & & \\
 & & & - & 1 & 1 & & & & \\
\cline{5-6}
 & & & & 0 & 0 & & & &
\end{array}
$$

Το πηλίκο της διαίρεσης είναι: $1001_2 = 9_{10}$ και σε μορφή προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2: $01001 = (+9)_{10}$

Για να εκφράσουμε το πηλίκο της διαίρεσης των δοθέντων αριθμών στη ζητούμενη αναπαράσταση, υπολογίζουμε το συμπλήρωμά του ως προς 2 για να το μετατρέψουμε στον ισοδύναμο αρνητικό αριθμό σε παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος ως προς 2:

$$\Sigma_2(01001) = \Sigma_1(01001) + 1 = 10110 + 1 = 10111$$

Άρα, το ζητούμενο πηλίκο είναι: $10111 = (-9)_{10}$.