Θεωρία Οικονομικής Μεγέθυνσης και Ανάπτυξης

Απαντήσεις 3ου Σετ Ασκήσεων - Υπόδειγμα Solow με Τεχνολογική Πρόοδο

1. (α΄) Η Συνάρτηση Παραγωγής ανά Αποτελεσματική Εργασία

$$\tilde{y_t} = \frac{1}{A_t L_t} {K_t}^{\frac{1}{2}} (A_t L_t)^{\frac{1}{2}}$$
$$\tilde{y_t} = {K_t}^{\frac{1}{2}} (A_t L_t)^{\frac{-1}{2}}$$
$$\tilde{y_t} = (\frac{K_t}{A_t L_t})^{\frac{1}{2}}$$
$$\tilde{y_t} = \tilde{k_t}^{\frac{1}{2}}$$

(β΄) Στη Σταθερή Κατάσταση Ισχύει:

$$sf(\tilde{k}) = (n + \delta + g)\tilde{k_t}^{\frac{1}{2}}$$
$$0.4\tilde{k_t}^{\frac{1}{2}} = (0.1 + 0.1 + 0.05)\tilde{k_t}^{\frac{1}{2}}$$
$$\tilde{k_t}^{\frac{1}{2}} = \frac{0.4}{0.25}$$
$$\tilde{k_t}^{\frac{1}{2}} = 1.6$$
$$\tilde{k_t} = 1.6^2$$
$$\tilde{k_t^*} = 2.56$$

Αρα ισχύει

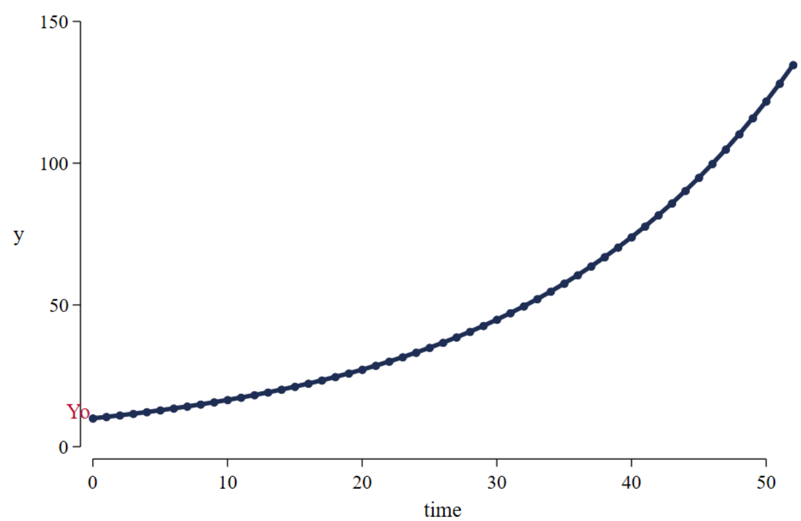
$$\tilde{y_t^*} = \tilde{k_t^*}^{\frac{1}{2}}$$
$$\tilde{y_t^*} = 1.6$$

(γ΄) Η Κατανάλωση ανά Αποτελεσματική Εργασία στη Σταθερή Κατάσταση είναι

$$\tilde{c_t} = \tilde{y_t} - s\tilde{y_t} \tag{1}$$
$$\tilde{c_t} = (1-s)\tilde{y_t} = (1-0.4) * 1.6 \tag{2}$$
$$\tilde{c_t^*} = 0.96 \tag{3}$$

(δ΄) Το Εισοδημα ανα Εργαζόμενο αυξάνει Συνεχώς με το Ρυθμό Αύξησης της Τεχνολογίας g. Η Συνάρτηση επομένως είναι:

$$y_t = y_0 e^{0.1t}$$



(ε΄) Παραγωγίζοντας τη Συνάρτηση Κατανάλωσης στη Σταθερή Κατάσταση έχουμε

$$c\tilde{(s)} = f(k\tilde{(s)}) - sf(k\tilde{(s)})$$
$$c\tilde{(s)} = f(k\tilde{(s)}) - (n+g+\delta)k\tilde{(s)}$$
$$\frac{\partial \tilde{c}}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial \tilde{k}}\frac{\partial \tilde{k}}{\partial s} - (n+g+\delta)\frac{\partial \tilde{k}}{\partial s}$$
$$\frac{\partial \tilde{c}}{\partial s} = \frac{\partial \tilde{k}}{\partial s}[f'(\tilde{k} - (n+g+\delta)]$$

Μεγιστοποίηση της Συνάρτησης

$$\frac{\partial \tilde{c}}{\partial s} = 0$$
$$\frac{\partial \tilde{k}}{\partial s}[f'(\tilde{k}) - (n + g + \delta)] = 0$$
$$f'(\tilde{k}) = n + g + \delta$$

(ϛ′) Χρησιμοποιώντας τα Δεδομένα της άσκησης έχουμε

$$\frac{1}{2}\tilde{k}^{\frac{-1}{2}} = 0.25$$
$$\tilde{k}^{\frac{1}{2}} = 2$$
$$\tilde{k} = 4$$

Στη Σταθερή Κατάσταση Ισχύει

$$sf(\tilde{k}) = (n + \delta + g)\tilde{k}_t$$
$$s4^{\frac{1}{2}} = 0.25 * 4$$
$$s = 0.5$$

2. Πολλαπλασιάζουμε τις Εισροές με ένα Θετικό Αριθμό λ

$$F(K, L) = AK^{\frac{1}{4}}L^{\frac{3}{4}}$$
$$F(\lambda K, \lambda L) = A(\lambda K)^{\frac{1}{4}}(\lambda L)^{\frac{3}{4}}$$
$$F(\lambda K, \lambda L) = A\lambda K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{3}{4}} = \lambda F(K, L)$$

$$F(K, L) = AK^{\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{2}}$$
$$F(\lambda K, \lambda L) = A(\lambda K)^{\frac{1}{4}}(\lambda L)^{\frac{1}{2}}$$
$$F(\lambda K, \lambda L) = A\lambda^{\frac{3}{4}}K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{3}{4}} = \lambda^{\frac{3}{4}}F(K, L)$$

$$F(K, L) = AK + A(KL)^{\frac{1}{2}}$$
$$F(\lambda K, \lambda L) = A(\lambda K) + A(\lambda K\lambda L)^{\frac{1}{2}}$$
$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda[AK + A(KL)^{\frac{1}{2}}]$$
$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$$

$$F(K, L) = AK + BL$$
$$F(\lambda K, \lambda L) = A(\lambda K) + B(\lambda L)$$
$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda(AK + BL)$$
$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$$

3. (α′) Η Συνάρτηση Παραγωγής ανά Εργαζόμενο

$$y_t = \frac{1}{L_t}(AK_t + BL_t)$$
$$y_t = Ak_t + B$$

Η Συνάρτηση Μέσου Προιόντος ανά Εργαζόμενο

$$\frac{f(k_t)}{k_t} = \frac{1}{k_t}(Ak_t + B)$$
$$\frac{f(k_t)}{k_t} = A + \frac{B}{k_t}$$

(β′) Ισχύει ότι:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{sf(k_t)}{k_t} = \lim_{k\to\infty} s(A + \frac{B}{k_t})$$
$$\lim_{k\to\infty} \frac{sf(k_t)}{k_t} = sA + \lim_{k\to\infty} \frac{B}{k_t}$$
$$\lim_{k\to\infty} \frac{sf(k_t)}{k_t} = sA$$

(γ′) Ο Ρυθμός Μεγέθυνσης του Κεφαλαίου ανά Εργαζόμενο

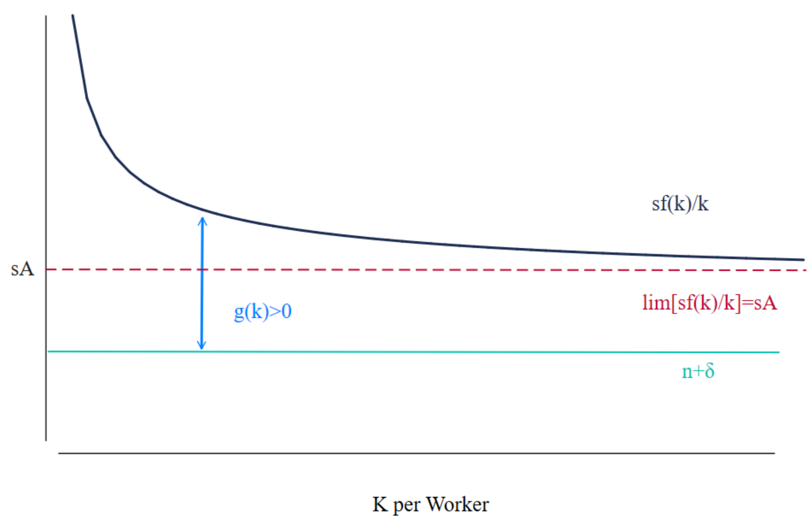
$$g_k = \frac{sf(k_t)}{k_t} - (n + \delta)$$
$$g_k = s(A + \frac{B}{k_t}) - (n + \delta)$$
$$g_k = sA - (n + \delta) + \frac{sB}{k_t}$$

(δ′) Καθώς $k \to \infty$ ο Ρυθμός Μεγέθυνσης του Κεφαλαίου ανά Εργαζόμενο συγκλίνει στην Ποσότητα $sA - (n+\delta)$
Αν $sA < n + \delta$ θα Υπάρχει Σημείο όπου :

$$sA = n + \delta$$
$$g_k = 0$$

Αν όμως $sA > n + \delta$ ο Ρυθμός Μεγέθυνσης του k επομένως και του y Συγκλινουν σε ένα **Θετικό Αριθμό** άρα επιτυγχάνεται Μακροχρόνια Μεγέθυνση

(ε′) Περίπτωση όπου $sA > n + \delta$



Περίπτωση όπου $sA < n + \delta$