ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΟΣ Γ.Γλεντής

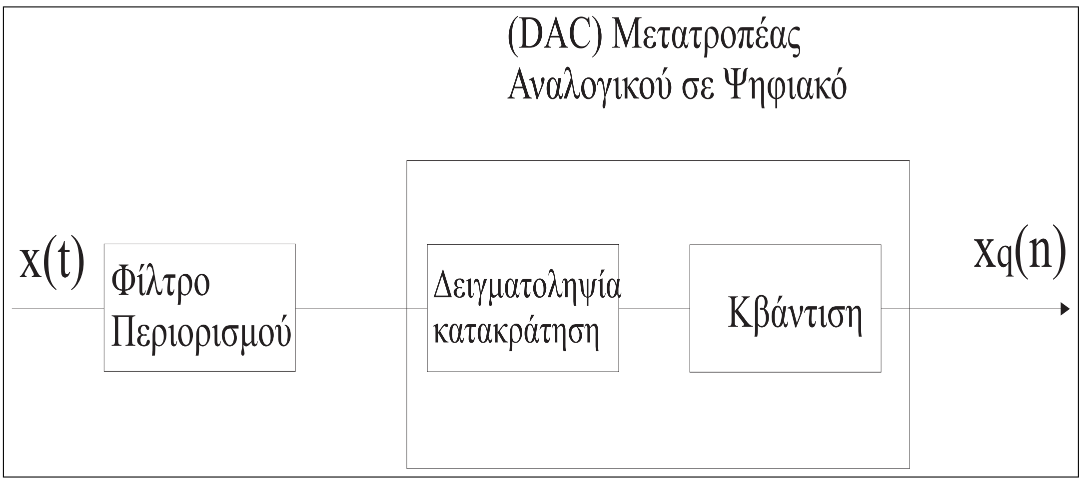
ΨΗΦΙΟΠΟΙΗΣΗ ΑΝΑΛΟΓΙΚΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ

Ψηφιοποίηση = Δειγματοληψία + Κβάντιση

- Κατά την (περιοδική) δειγματοληψία ενός αναλογικού σήματος (σήματος συνεχούς χρόνου) λαμβάνουμε δείγματα (στιγμιότυπα) του σήματος συνεχούς χρόνου σε τακτά χρονικά διαστήματα

$$v(n) = v(nT_s)$$

- Περίοδος δειγματοληψίας: T_s sec
- Συχνότητα δειγματοληψίας: $F_s = \dfrac{1}{T_s}$ Hz ή κύκλοι/sec



ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ

Η συχνότητα δειγματοληψίας ενός σήματος βασικής ζώνης πρέπει να είναι τουλάχιστον διπλάσια από τη μέγιστη συχνότητα f_{max} του εισερχόμενου σήματος για να αποφύγουμε το φαινόμενη της φασματικής αναδίπλωσης (aliasing).

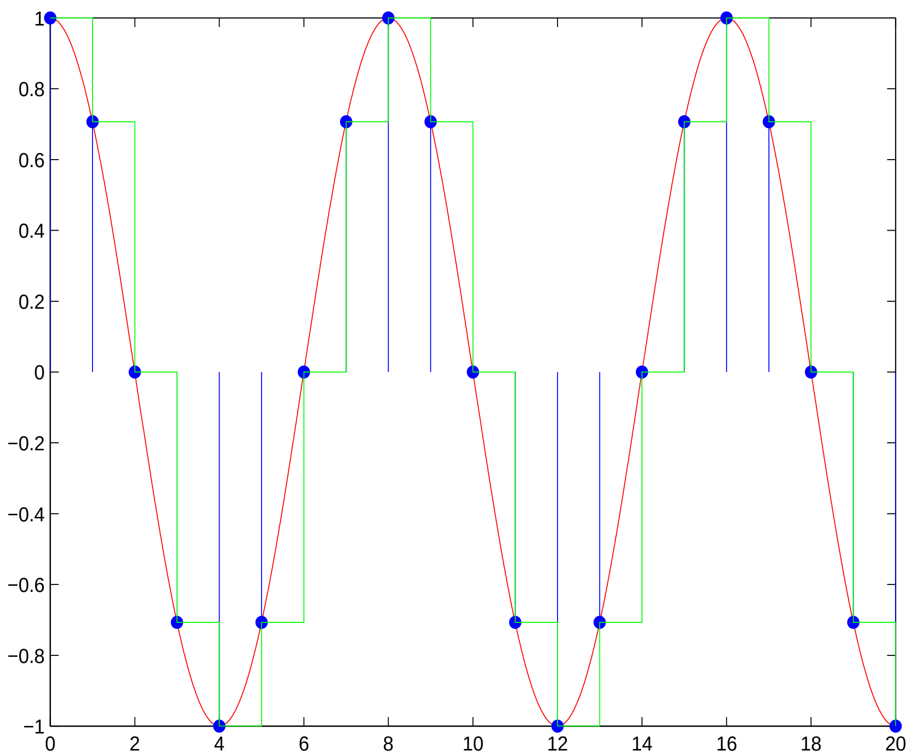
$$F_s \geq 2 f_{\mathsf{max}}$$

ή

$$T_s \leq \frac{1}{2 T_{\mathsf{max}}}$$

- H. Nyquist 'Certan topics in telegraph transmission theory', AIEE Trans. (47), pp. 616-644, 1928
- C. Shannon 'Communications in the presence of noise', Proc. IRE, (37), pp. 10-21, 1949.

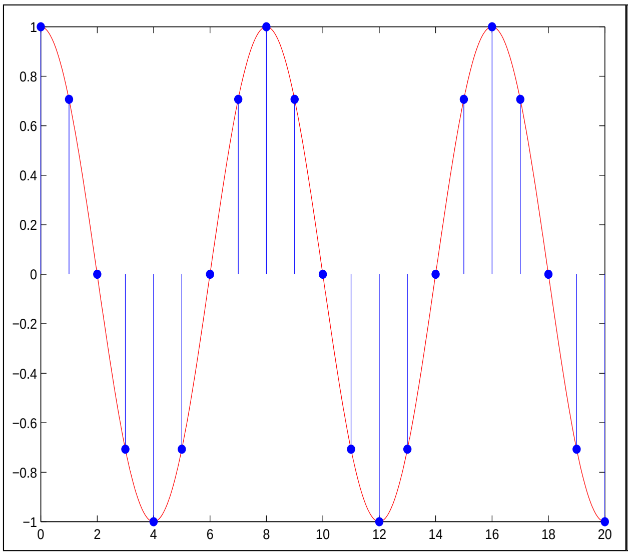
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ



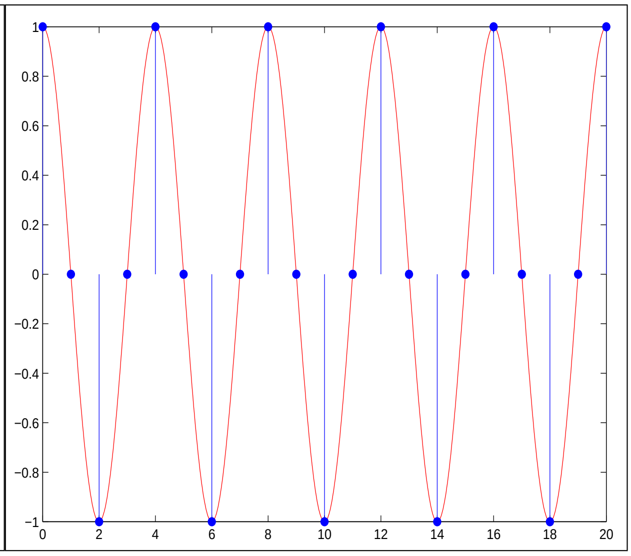
- Αναλογικό σήμα (κόκκινο)

- Δειγματοληπτημένο σήμα (μπλέ)

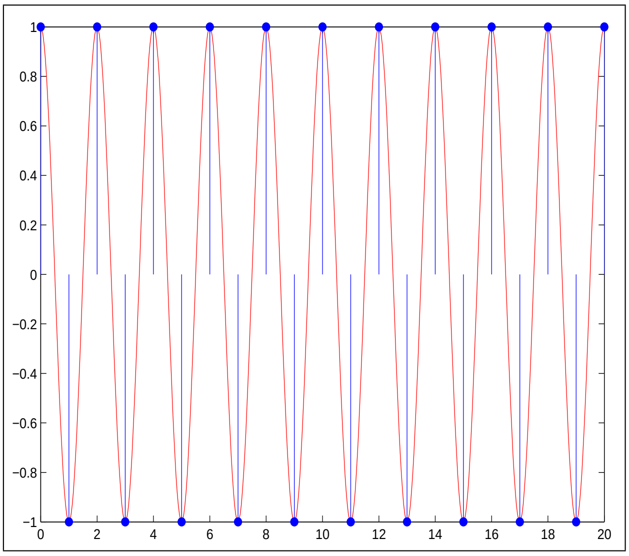
- Σήμα εξόδου της μονάδας δειγματοληψίας/κατακράτησης (πράσινο)



$F_s = 8$ Hz, $f_{\text{max}} = 1$ Hz

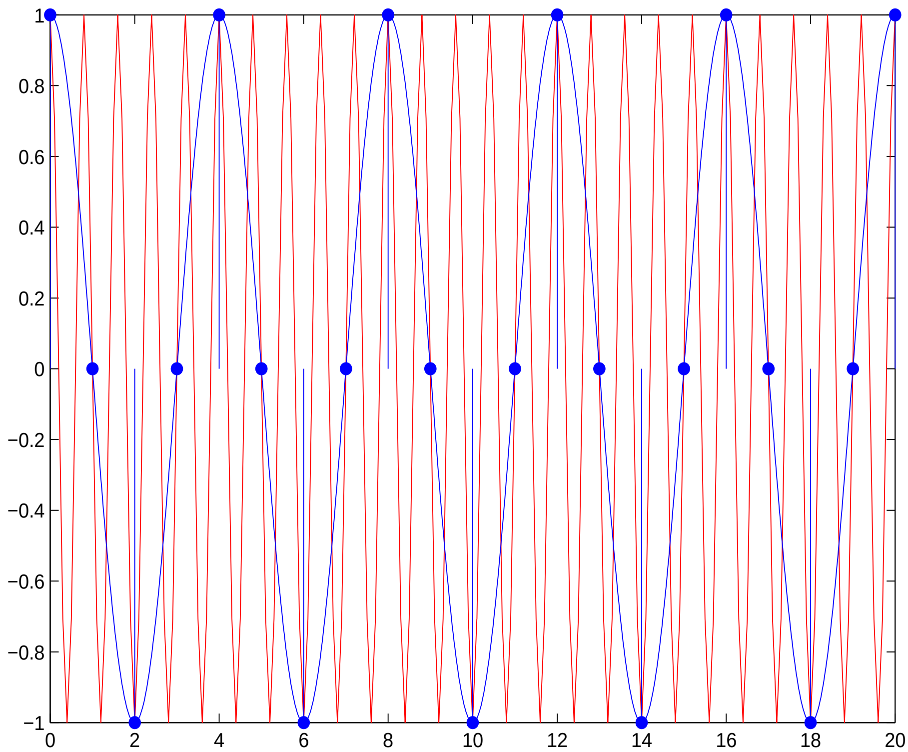


$F_s = 8$ Hz, $f_{\text{max}} = 2$ Hz



$F_s = 8$ Hz, $f_{\text{max}} = 4$ Hz

$F_s = 8$ Hz και $f_{\text{max}} = 10$ Hz



Η μέγιστη συχνότητα του σήματος είναι προφανώς μεγαλύτερη από τη $F_s/2$. Άρα, η δειγματοληψία οδηγεί σε αλλοιωμένο σήμα. Λόγω της αναδίπλωσης του φάσματος, το δειγματοληπτημένο σήμα φαίνεται να αντιστοιχεί σε σήμα συχνότητας $f' = 2$ Hz.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ

- $x(t)$ αναλογικό σήμα $\Longleftrightarrow X(\omega)$ μετασχηματισμός Fourier

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

- $x_s(n) \equiv x(nT_s)$ το δειγματοληπτημένο σήμα

$\Longleftrightarrow X(\Omega)$ μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

$$X_s(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_s(n) e^{-j\Omega n}$$

$$x_s(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_s(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

$$\omega T_s = \Omega$$

Αποδεικνύεται ότι

$$X_s(\omega T_s) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega + \frac{2k\pi}{T_s})$$

ή

$$X_s(\Omega = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\frac{\Omega + 2k\pi}{T_s})$$

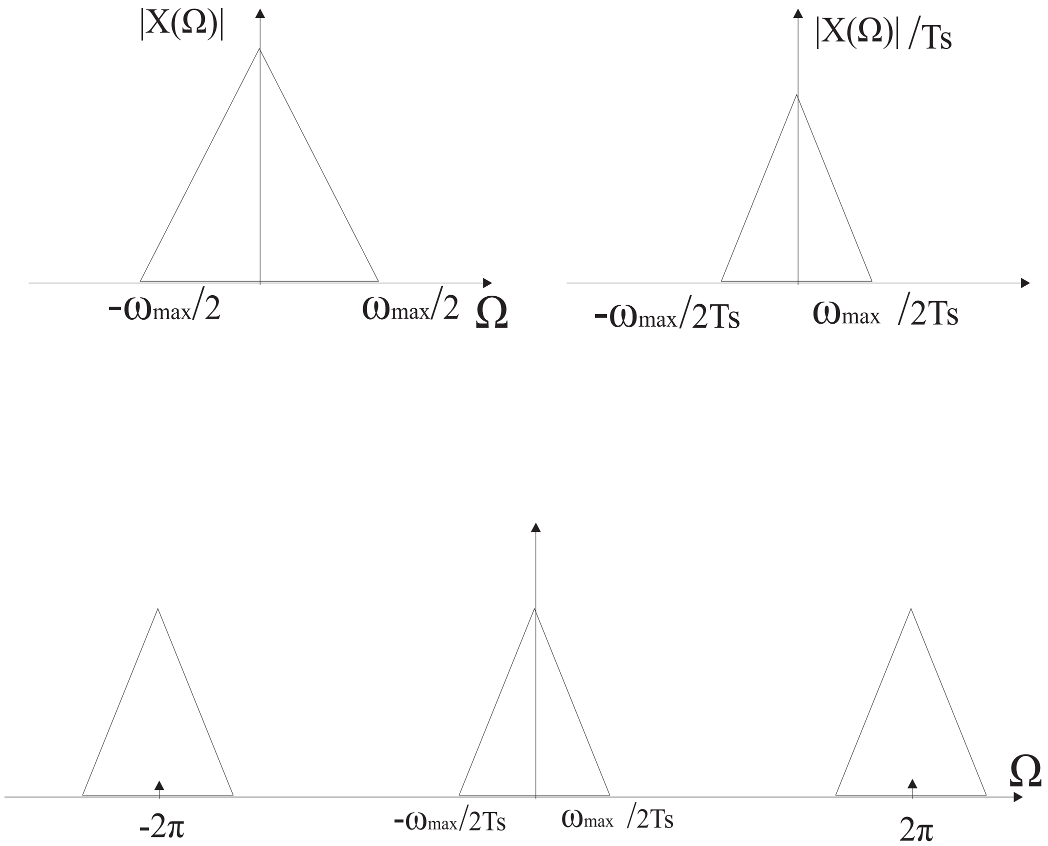
$$X_s(\omega T_s) = \frac{1}{T_s}[...X(\omega - \frac{2p}{T_s}) + X(\omega) + X(\omega + \frac{2\pi}{T_2}) + ...]$$

- Συνθήκη αποφυγής φασματικής επικάλυψης

$$\frac{\omega_{\mathsf{max}} T_s}{2} \leq 2\pi - \frac{\omega_{\mathsf{max}} T_s}{2}$$

ή

$$\omega_{\mathsf{max}} \leq \frac{2\pi}{T_s} \Longleftrightarrow F_s \geq 2 f_{\mathsf{max}}$$



Φασματική ανάλυση του δειγματοληπτημένου σήματος

Ανασύσταση σήματος

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\infty_{-\frac{\pi}{T_s}}^{\frac{\pi}{T_s}} X(\omega)e^{\jmath\omega t}d\omega$$

ή

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)sinc(\frac{t-nT_s}{T_s})$$

$$sinc(t) = \frac{sin(t)}{t}$$

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ

- Εύρεση της μέγιστης συχνότητας που περιέχει το σήμα, f_{max}
- Υπολογισμός της συχνότητας Nyquist, $F_N = 2f_{\mathsf{max}}$
- Υπολογισμός της συχνότητας δειγματοληψίας $F_s \approx F_N +$ 20%
- Σχεδίαση αντιπαραποιητικού φίλτου χαμηλών συχνοτήτων $[0, f_{\mathsf{max}}]$ με συχνότητα αποκοπής $f_{stop} = \dfrac{F_s}{2}$

- Παράδειγμα: Σχεδιάστε το σύστημα δειγματοληψίας για σήμα μουσικής με $f_{\mathsf{max}} = 20$ kHz.

$$f_{\mathsf{max}} = 20\ kHz \quad \Rightarrow F_N = 40\ kHz \quad \Rightarrow F_s = 44\ kHz$$

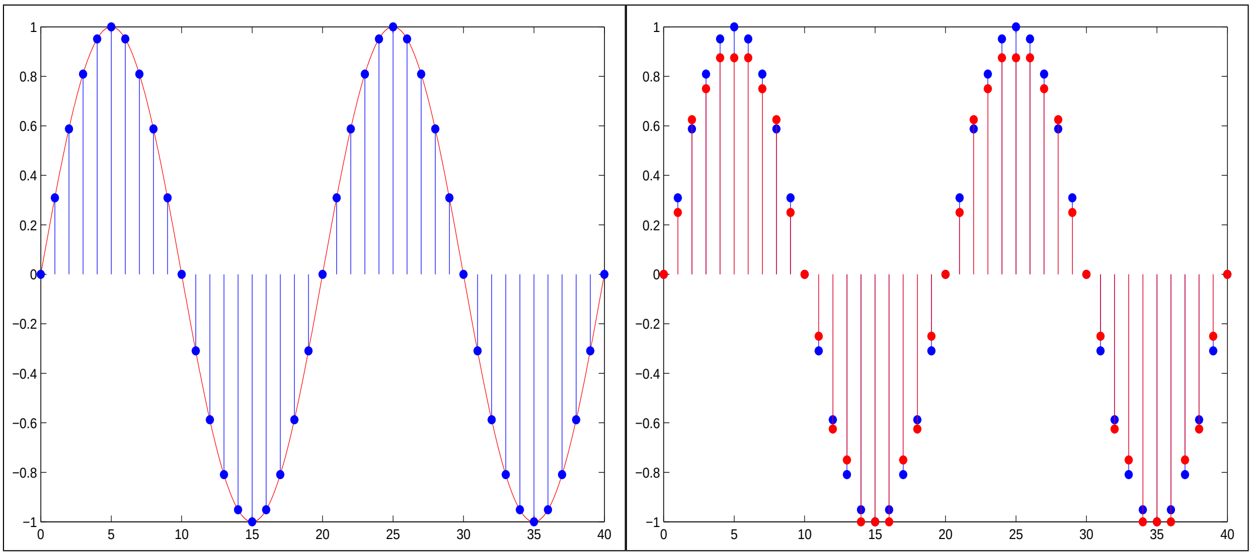
Προδιαγραφές αντιπαραποιητικού φίλτρου: LP $[0, 20]\ kHz$ με συχνότητα αποκοπής $f_{stop} = 22\ kHz$.

ΚΒΑΝΤΙΣΗ ΣΗΜΑΤΟΣ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

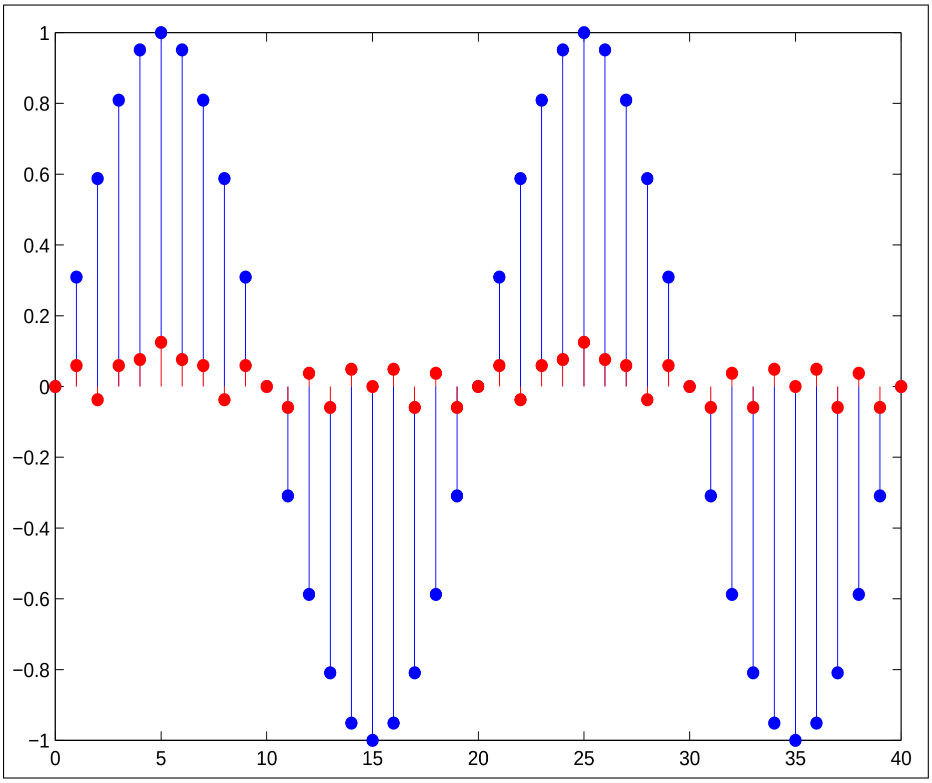
$$v_q(n) = \mathcal{Q}(v(n)$$

- Ψηφιοποίηση πλάτους
- Μετατροπή του αναλογικού πλάτους σε ψηφιακό αριθμό εύρους $B\ bits$
- Επίπεδα κβάντισης : $L = 2^B$
- Βήμα κβάντισης: $Q = \frac{A_{pp}}{L}$
- Το αναλογικό πλάτος αντιστοιχίζεται στο πλησιέστερο επίπεδο κβάντισης
- Η διαδικασία της κβάντισης ΄ αλλοιώνει ΄ το αναλογικό σήμα, η απώλεια πληροφορίας περιγράφεται με την εισαγωγή του σήματος θορύβου κβάντισης
- Θόρυβος κβάντισης = (Αναλογική τιμή σήματος) -(Κβαντισμένη τιμή σήματος)

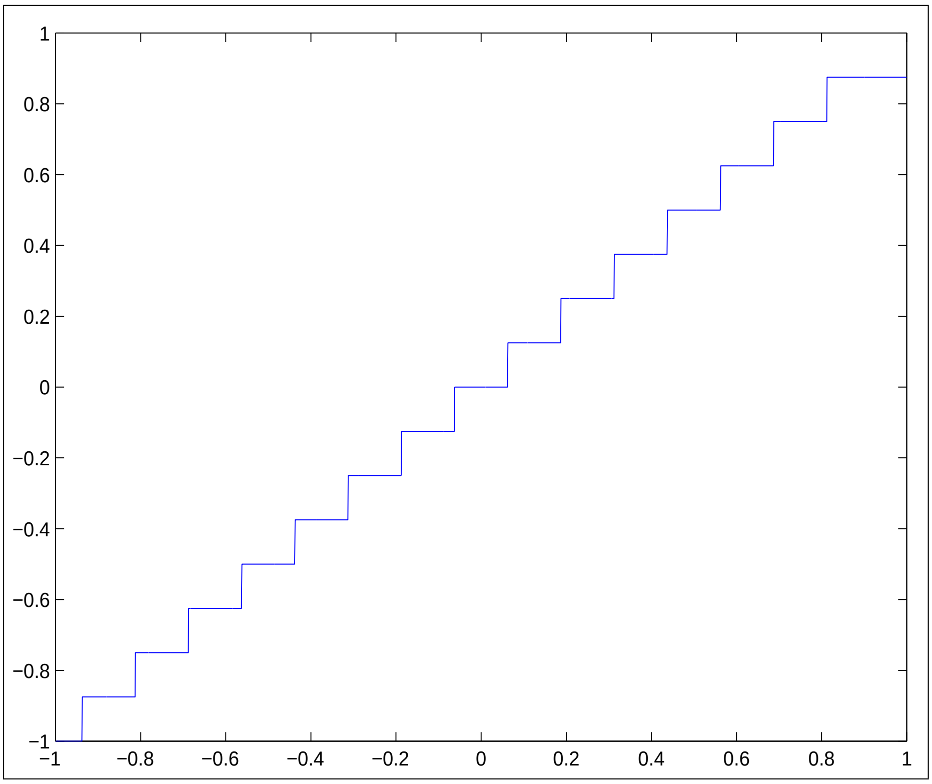
- Παράδειγμα
  - $x(t) = cos(2\pi t), \quad f_{\mathsf{max}} = 1\ Hz$
  - $F_s = 20\ Hz$
  - $B = 4, \quad L = 16, \quad Q = 0.125$



Δειγματοληπτημένο σήμα   Κβαντισμένο σήμα

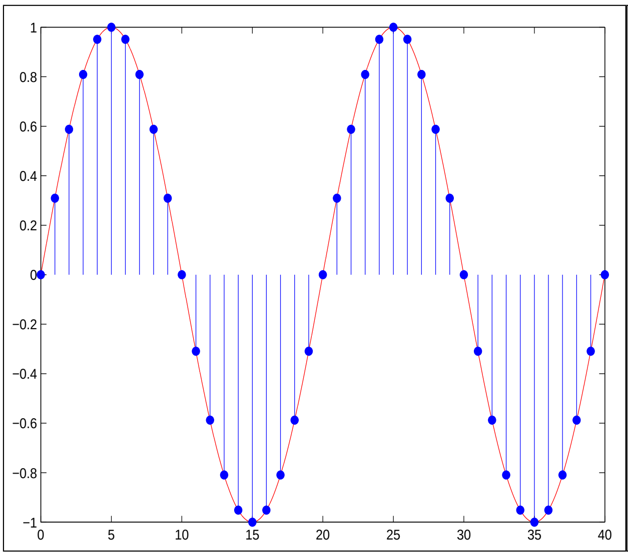


Θόρυβος κβάντισης

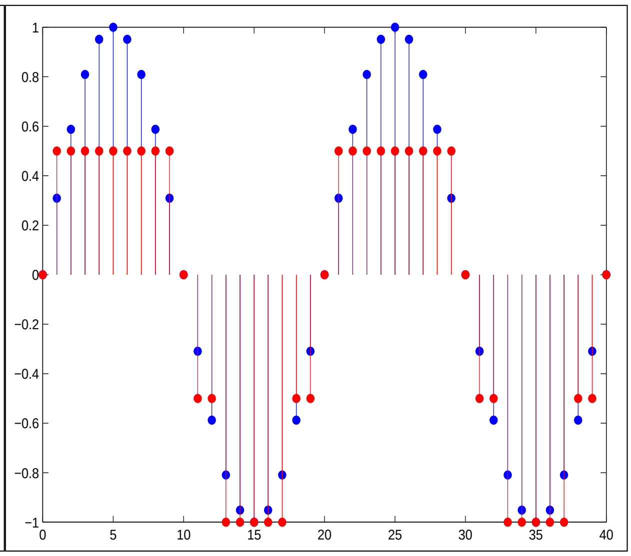


Συνάρτηση μεταφοράς κβαντιστή

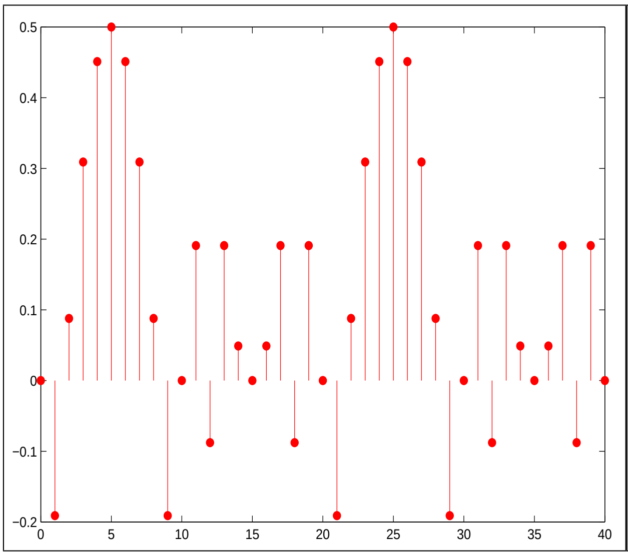
Κβάντιση $B = 2\ bits$



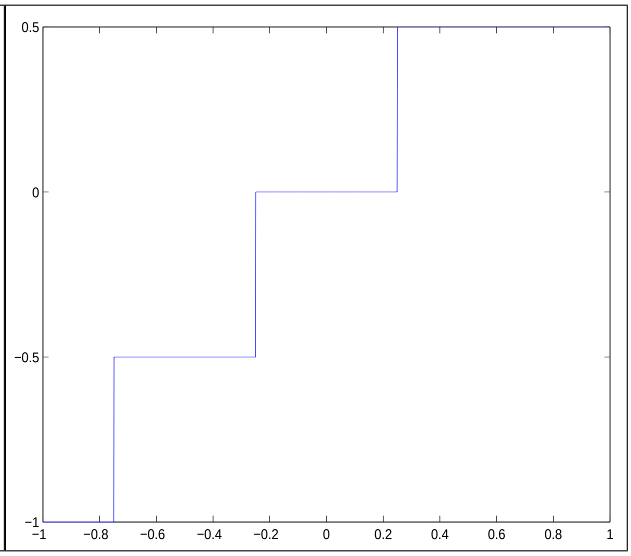
Δειγματοληπτημένο σήμα



Κβαντισμένο σήμα

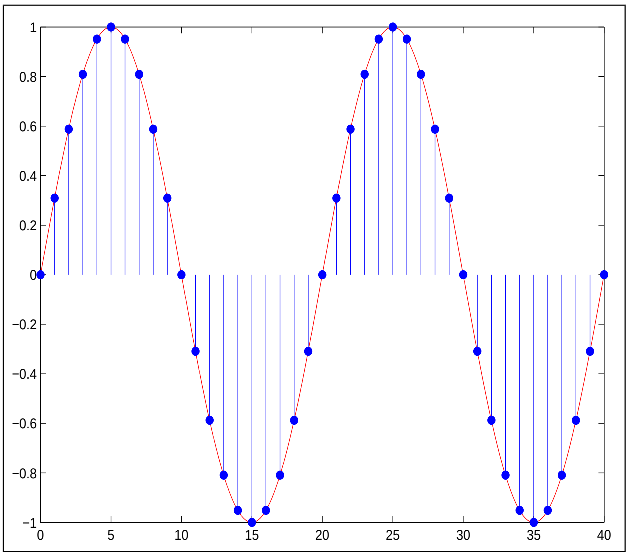


Θόρυβος κβάντισης

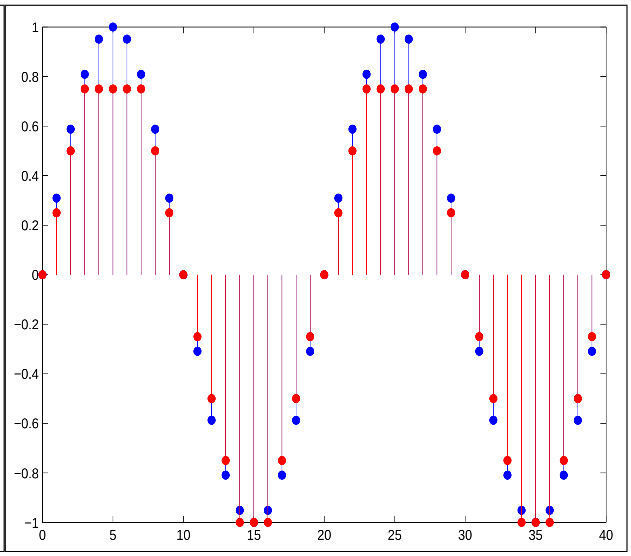


Συνάρτηση μεταφοράς κβαντιστή

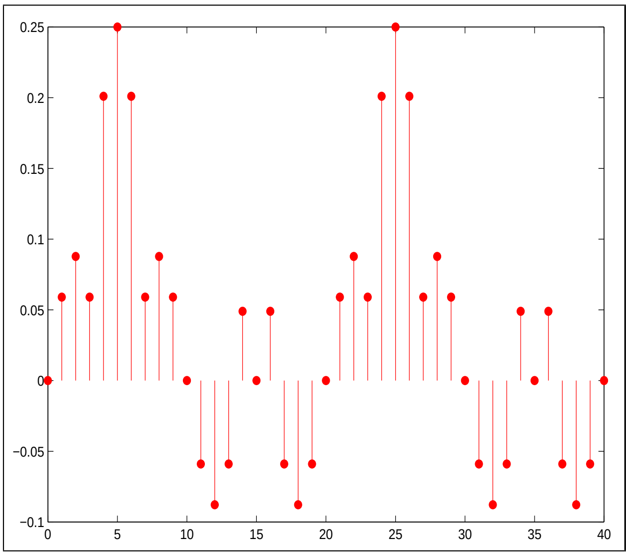
Κβάντιση $B = 3$ *bits*



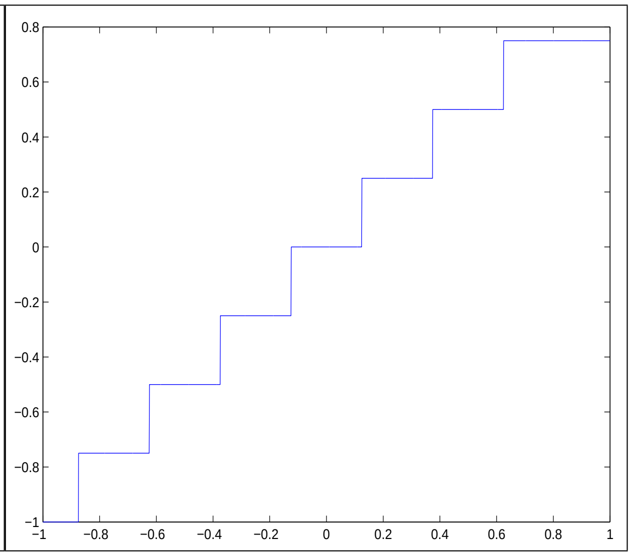
Δειγματοληπτημένο σήμα



Κβαντισμένο σήμα

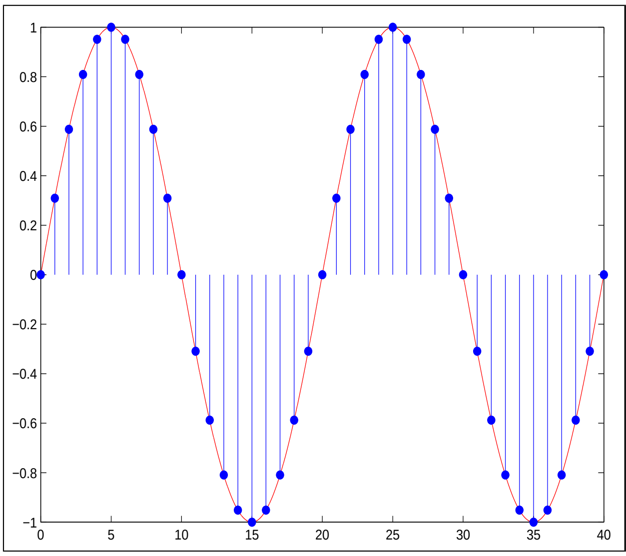


Θόρυβος κβάντισης

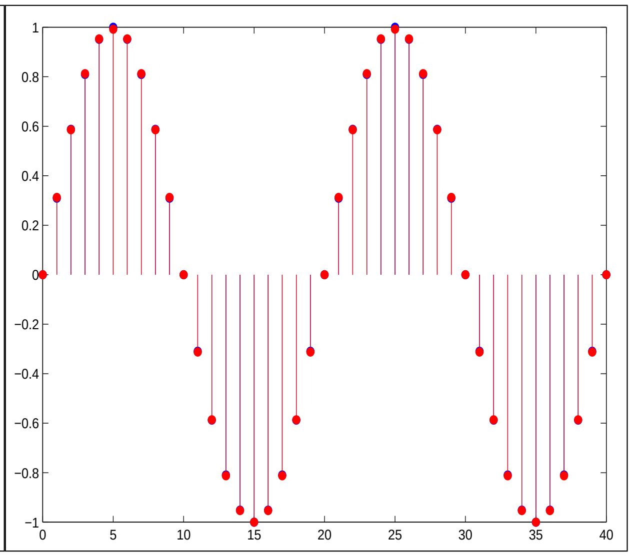


Συνάρτηση μεταφοράς κβαντιστή

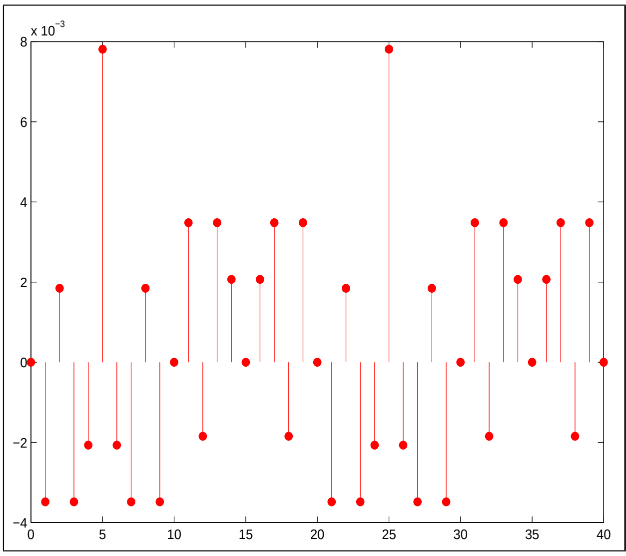
Κβάντιση $B = 8\ bits$



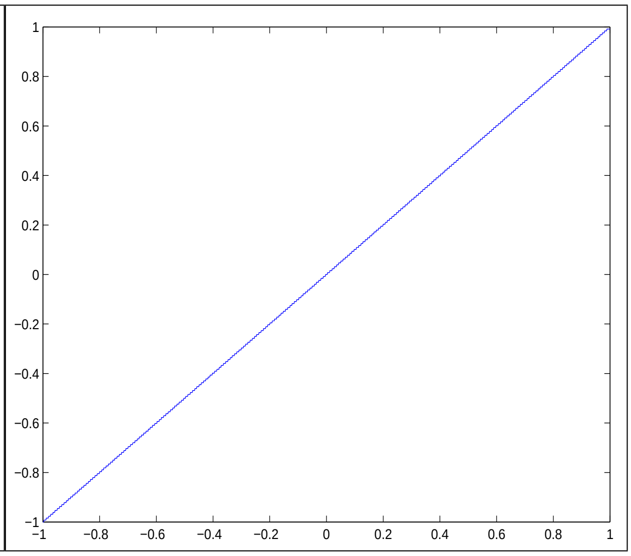
Δειγματοληπτημένο σήμα



Κβαντισμένο σήμα



Θόρυβος κβάντισης



Συνάρτηση μεταφοράς κβαντιστή

$v(n)$	$v_q(n)$			
	$B=2$	$B=3$	$B=4$	$B=8$
0	0	0	0	0
0.3090	0.5000	0.2500	0.2500	0.3125
0.5878	0.5000	0.5000	0.6250	0.5859
0.8090	0.5000	0.7500	0.7500	0.8125
0.9511	0.5000	0.7500	0.8750	0.9531
1.0000	0.5000	0.7500	0.8750	0.9922
0.9511	0.5000	0.7500	0.8750	0.9531
0.8090	0.5000	0.7500	0.7500	0.8125
0.5878	0.5000	0.5000	0.6250	0.5859
0.3090	0.5000	0.2500	0.2500	0.3125
0.0000	0	0	0	0
-0.3090	-0.5000	-0.2500	-0.2500	-0.3125
-0.5878	-0.5000	-0.5000	-0.6250	-0.5859
-0.8090	-1.0000	-0.7500	-0.7500	-0.8125
-0.9511	-1.0000	-1.0000	-1.0000	-0.9531
-1.0000	-1.0000	-1.0000	-1.0000	-1.0000
-0.9511	-1.0000	-1.0000	-1.0000	-0.9531
-0.8090	-1.0000	-0.7500	-0.7500	-0.8125
-0.5878	-0.5000	-0.5000	-0.6250	-0.5859
-0.3090	-0.5000	-0.2500	-0.2500	-0.3125

ΘΟΡΥΒΟΣ ΚΒΑΝΤΙΣΗΣ

$$v(n) = v_q(n) + e(n)$$

$e(n)$ Θόρυβος κβάντισης

$$e(n) \in (-\frac{Q}{2}, \frac{Q}{2})$$

- Παραδοχές
  - το σήμα $e(n)$ είναι στατική στοχαστική διαδικασία
  - τα σήματα $v(n)$ και $e(n)$ είναι στατιστικά ασυσχέτιστα
  - Ομοιόμορφη κατανομή συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας του $e(n)$, $(p(e) = 1/Q, e \in [-Q/2, Q/2])$

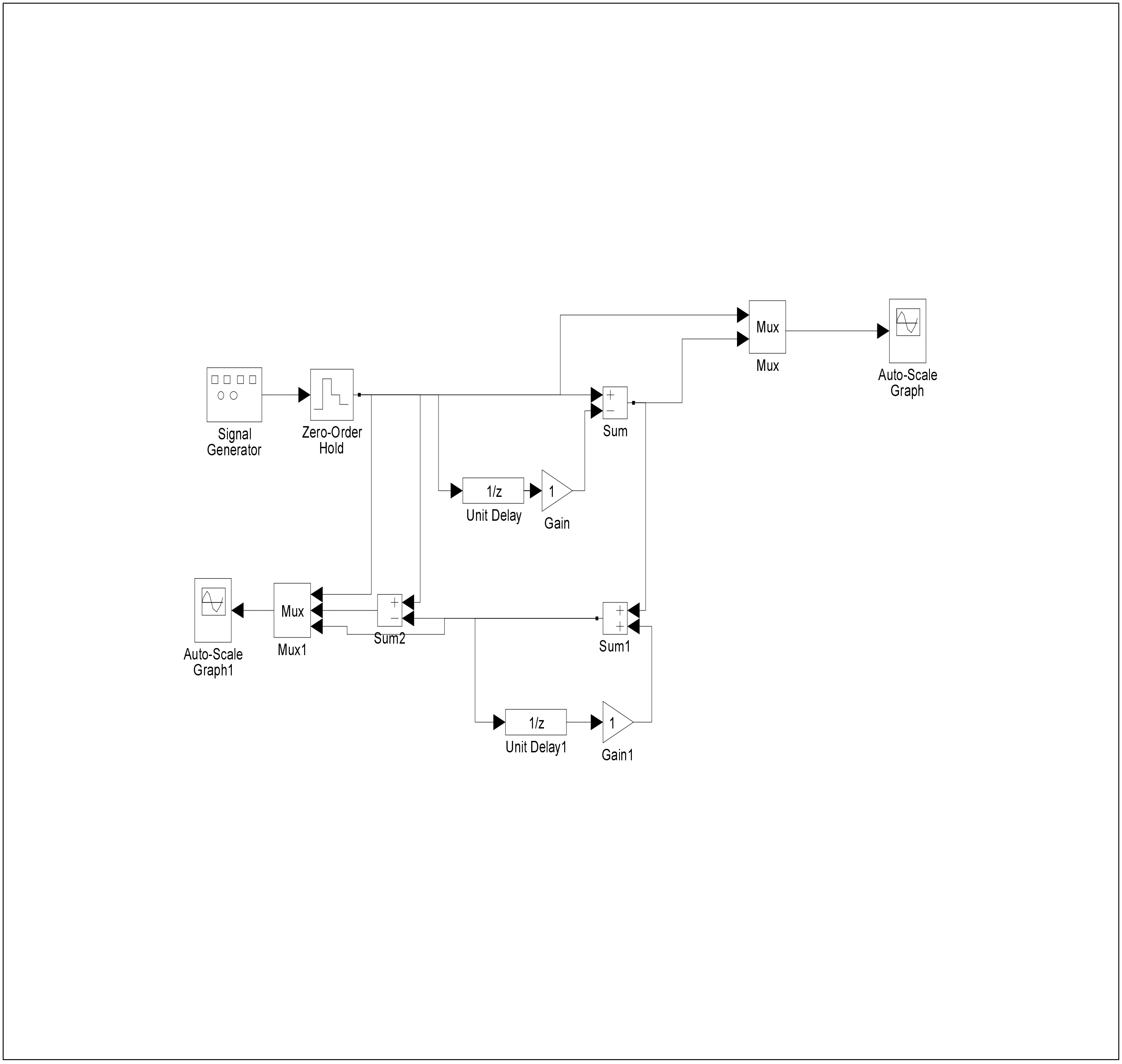
Ισχύς του σήματος θορύβου κβάντισης

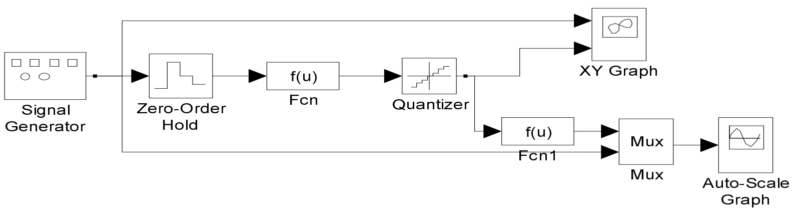
$$\sigma^2 = \mathcal{E}(e^2) = \frac{Q^2}{12}$$

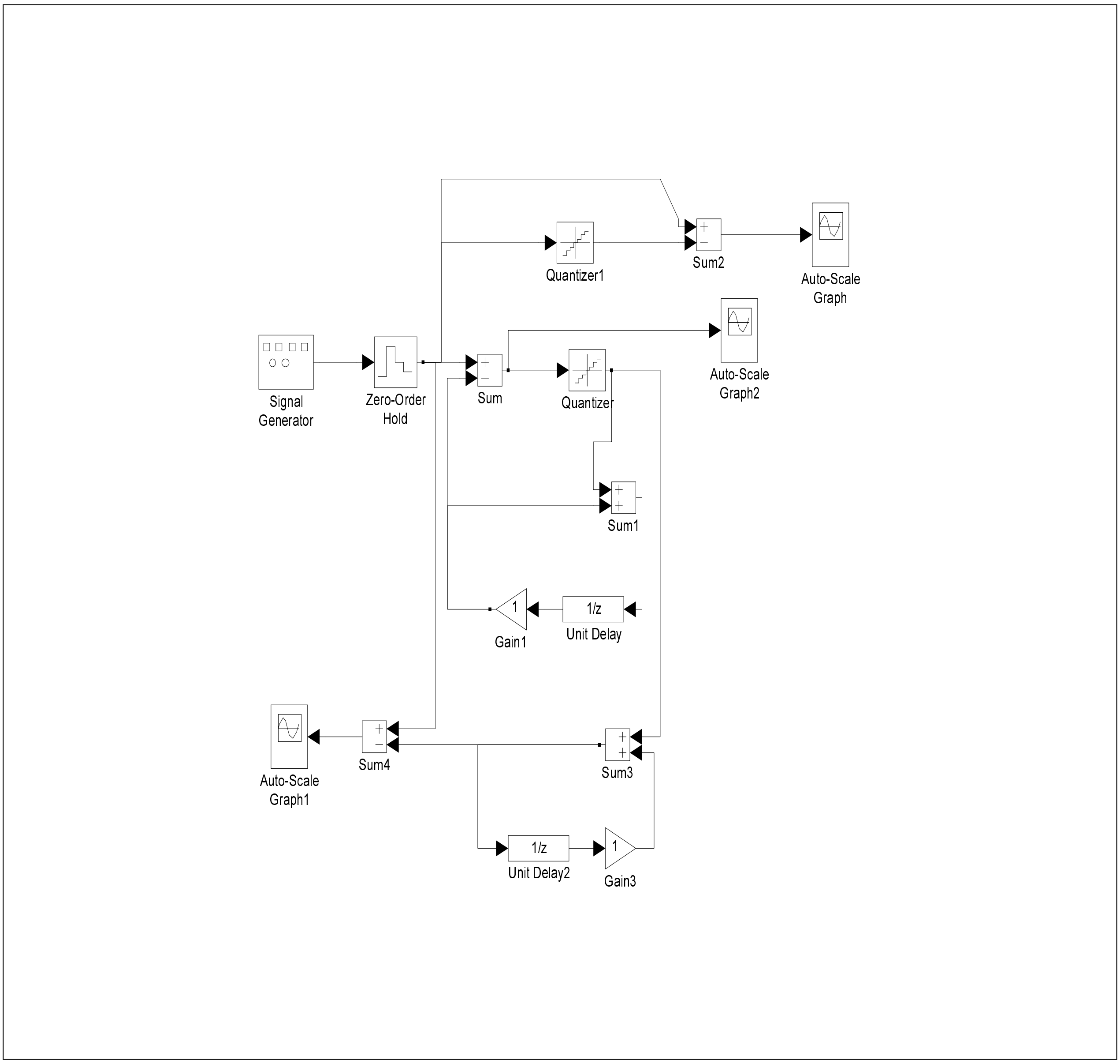
Λόγος ισχύος σήματος πρός θόρυβο κβάντισης σε dB

$$SNR_Q = 10 \log_{10} \frac{\sigma_v^2}{\sigma_e^2} = 6.02B + 10.8 \quad dB$$

Δειγματοληψία και κβάντιση στο SIMULINK




Signal
Generator
Zero-Order
Hold
f(u)
Fcn
Quantizer
XY Graph
f(u)
Fcn1
Mux
Mux
Auto-Scale
Graph


Quantizer1
Sum2
Auto-Scale
Graph
Auto-Scale
Graph2
Signal
Generator
Zero-Order
Hold
Sum
Quantizer
Sum1
1/z
Unit Delay
1
Gain1
Auto-Scale
Graph1
Sum4
Sum3
1/z
Unit Delay2
1
Gain3

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΚΑΙ ΣΥΜΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΣΤΟ **SIMULINK**

- Μέση τιμή σήματος

$$m_x = \mathcal{E}(x(k)), \to m_x(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x(i)$$

- Συμμεταβολή σήματος

$$v_x = \mathcal{E}((x(k) - m_x)^2) =$$

$$\mathcal{E}(x^2(k)) - m_x^2 \to v_x(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x^2(i) - m_x^2(n)$$

- Προσαρμοστική εκτίμηση

While $x(n)$

$$m_x(n) = m_x(n-1) + \beta(x(n) - m_x(n-1))$$

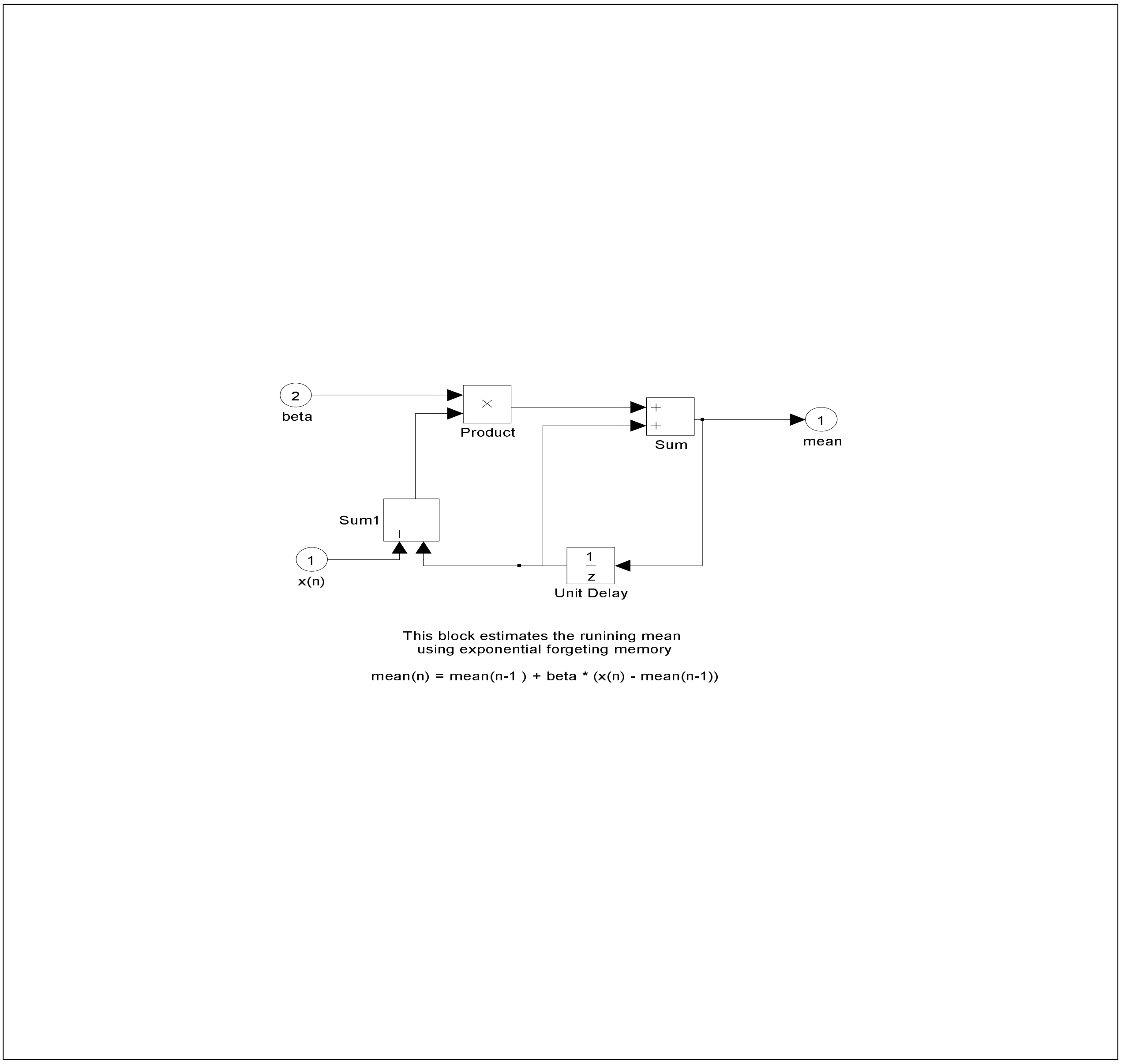
$$p_x(n) = p_x(n-1) + \beta(x^2(n) - p_x(n-1))$$

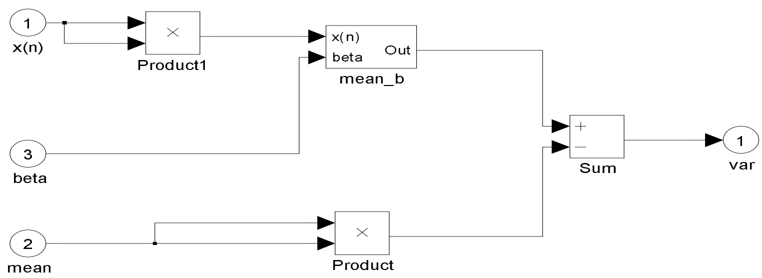
$$v_x(n) = p_x(n) - m_x^2(n)$$

End

$\beta > 0$.

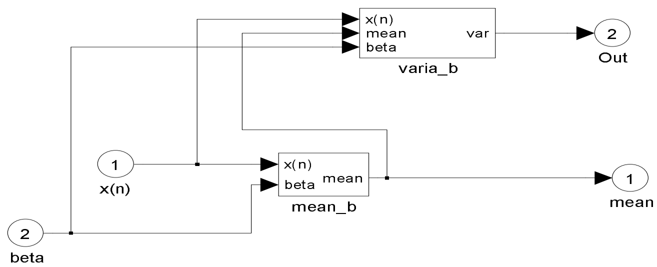
Σχηματικά SIMULINK





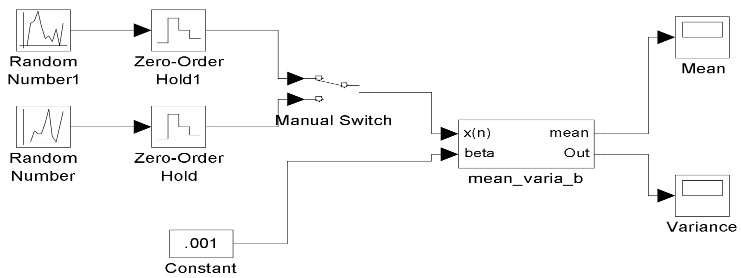
This block estimates the runining variance
using exponential forgeting memory

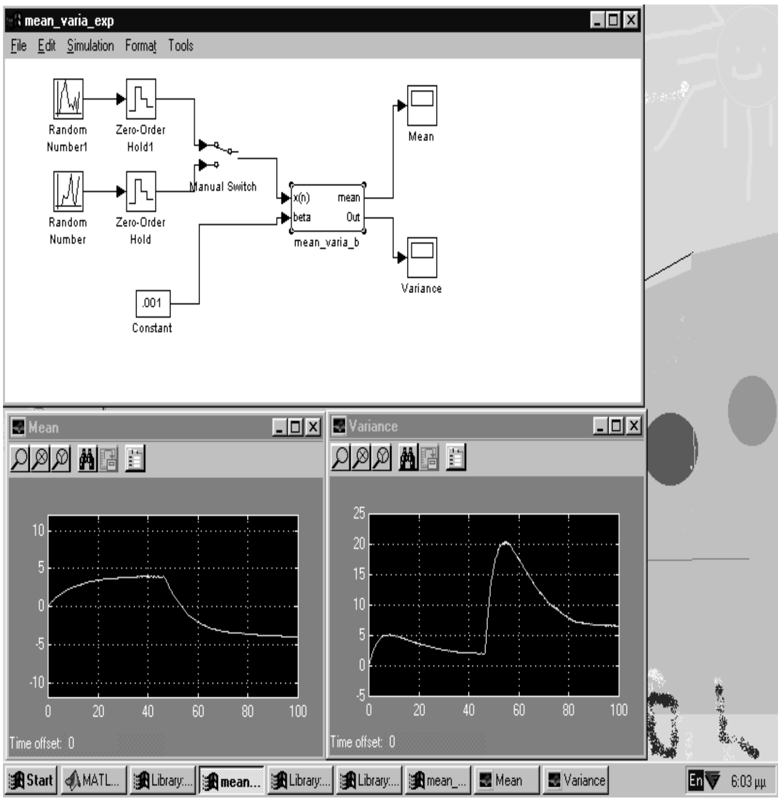
power(n) =power(n-1) + beta * (x(n)^2 - power(n-1))
var(n) = power(n) - mean(n)^2



This block estimates the runining variance
using exponential forgeting memory

subsystems called
varia_b and mean_b


Random
Number1
Zero-Order
Hold1
Random
Number
Zero-Order
Hold
Manual Switch
.001
Constant
x(n)
beta
mean
Out
mean_varia_b
Mean
Variance


mean_varia_exp
File Edit Simulation Format Tools
Random Number1
Zero-Order Hold1
Random Number
Zero-Order Hold
Manual Switch
x(n)
beta
mean
Out
mean_varia_b
Mean
Variance
.001
Constant
Mean
Time offset: 0
Variance
Time offset: 0
Start
MATL...
Library:...
mean...
mean_...
6:03 μμ