ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΟΣ Γ.Γλεντής

1. Εισαγωγή
2. Συστήματα Ψηφιακής Επεξεργασίας Σήματος
3. Σήματα και Συστήματα
4. Ψηφιοποίηση Αναλογικών Σημάτων
5. Γραμμικά Χρονικά Αναλλοίωτα Συστήματα
6. Ο Μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$
7. Το Πεδίο της Συχνότητας
8. Αναλογικά Φίλτρα
9. Ψηφιακά Φίλτρα
10. Διακριτοί Ορθογώνιοι Μετασχηματισμοί
11. Εφαρμογή στα Ψηφιακά Τηλ/κά Συστήματα
12. Εφαρμογή στις Κατευθυντικές Συστοιχίες Κεραιών

ΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

- Isaac Newton: ανάλυση λευκού φωτός σε χρωματικές δέσμες, το φάσμα
- J.B.J Fourier: χρήση τριγωνομετρικών σειρών στη μελέτη της διάδοσης και της κατανομής της θερμότητας σε στερεά σώματα

Ανάλυση σημάτων σε ημιτονικά (μιγαδικά) σήματα
Σύνθεση σημάτων από ημιτονικά (μιγαδικά) σήματα

- σειρές Fourier: περιοδικά σήματα συνεχούς χρόνου (Διακριτό φάσμα άπειρης έκτασης)
- μετασχηματισμός Fourier: μή περιοδικά σήματα συνέχούς χρόνου (Συνεχές φάσμα άπειρης έκτασης)
- διακριτές σειρές Fourier: περιοδικά σήματα διακριτού χρόνου (Διακριτό φάσμα άπειρης έκτασης, περιοδικό)
- διακριτός μετασχηματισμός Fourier: μή περιοδικά σήματα συνέχούς χρόνου (Συνεχές φάσμα άπειρης έκτασης, περιοδικό)

Σειρές **Fourier** σημάτων συνεχούς χρόνου

- $x(t) = x(t + T_0)$ περιοδικό σήμα συνεχούς χρόνου

Σύνθεση

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\jmath 2\pi f_0 k t}$$

Ανάλυση

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-\jmath \frac{2\pi}{T_0} k t} dt$$

- $f_0 = \frac{1}{T_0}$ Θεμελιώδης συχνότητα

Προϋποθέσεις: Συνθήκες Dirichlet

1. πεπερασμένο πλήθος ασυνεχειών σε κάθε περίοδο
2. πεπερασμένο πληθος μεγίστων/ελαχίστων σε κάθε περίοδο
3. $\int_{T_0} |x(n)| dt < \infty$

ΦΑΣΜΑ ΙΣΧΥΟΣ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ

- Ισχύς περιοδικού σήματος συνεχούς χρόνου

$$P = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt$$

- Θεώρημα Parseval

$$P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

  - (γραμμικό) φάσμα ισχύος $\quad c_k, -\infty < k < \infty$
  - μέτρο φάσματος ισχύος $\quad |c_k|^2, -\infty < k < \infty$
  - φάση φάσματος ισχύος $\quad \theta_k = \angle c_k, -\infty < k < \infty$

- Παράδειγμα

$$x(t) = cos(6\pi t)$$

$T_0 = 1/3 \quad F_0 = 3$

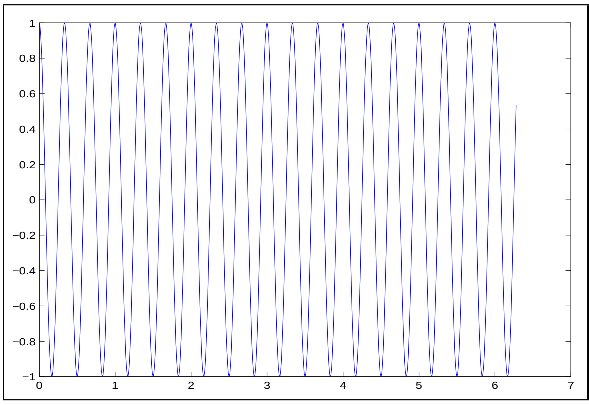
$$x(t) = \frac{1}{2}e^{\jmath 6\pi t} + \frac{1}{2}e^{-\jmath 6\pi t}$$

Συντελεστές Fourier (μή μηδενικοί)

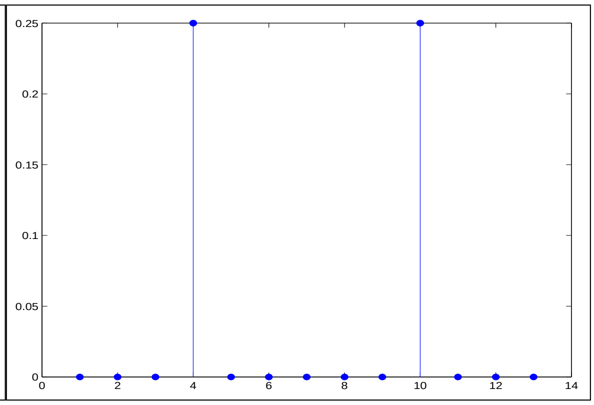
$$c_{-3} = \frac{1}{2}, \quad c_3 = \frac{1}{2}$$

Μέτρο φάσματος ισχύος

$$P(-3) = \frac{1}{4}, \quad P(3) = \frac{1}{4}$$



Περιοδικό Σήμα



Φάσμα Ισχύος

- Παράδειγμα $x(t)$ περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο T

$$x(t) = \begin{cases} A, & t \in [0, d) \\ 0, & t \in (d, T) \end{cases}$$

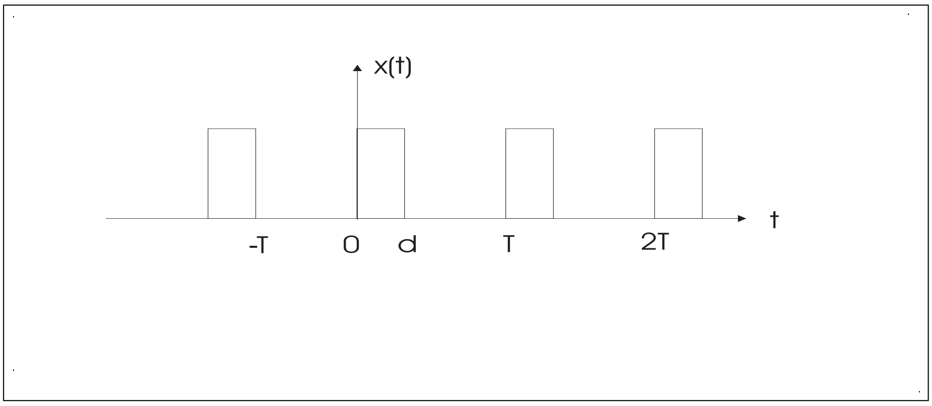
Συντελεστές Fourier

$$c_k = C_0 sinc(\frac{k\omega_0 d}{2}) e^{-\jmath \frac{k\omega_o}{2}}, -\infty < k < \infty$$

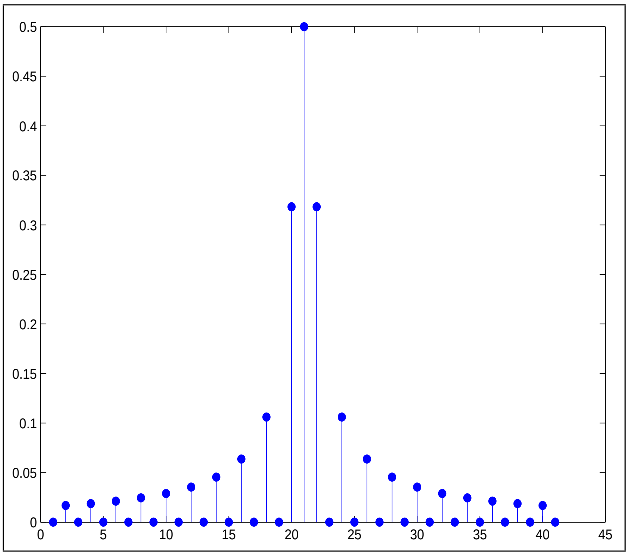
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad C_0 = A\frac{d}{T}, \quad sinc(\omega) = \frac{sin(\omega)}{\omega}$$

Μέτρο φάσματος ισχύος

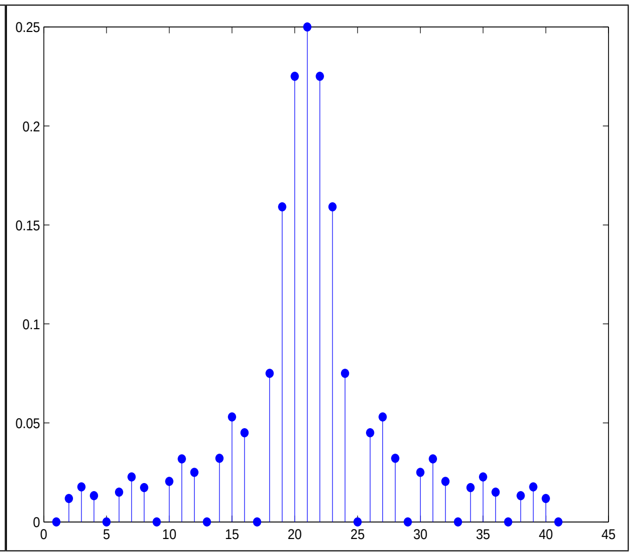
$$P(k) = |C_0| sinc(\frac{k\omega_0 d}{2})$$



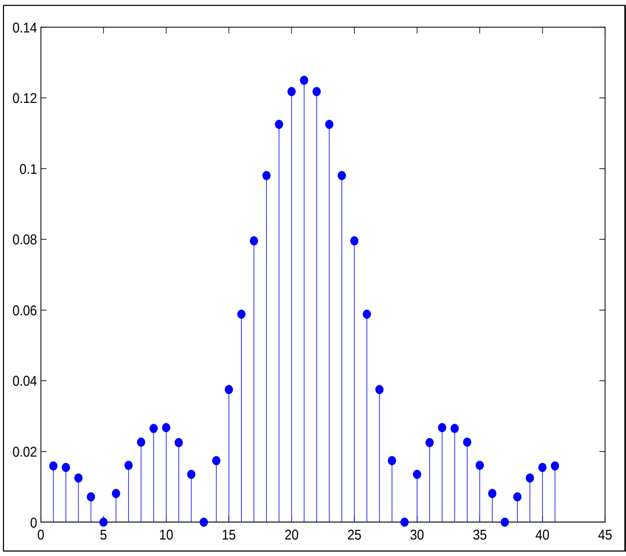
Ειδικές περιπτώσεις



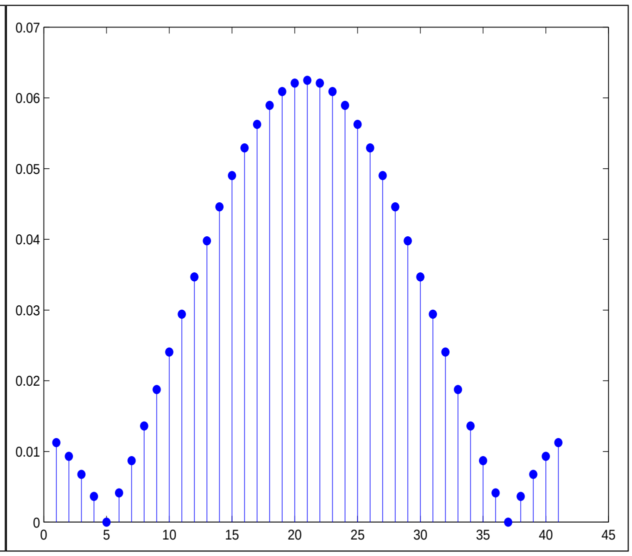
$d/T = 1/2$



$d/T = 1/4$



$d/T = 1/8$



$d/T = 1/16$

Μετασχηματισμός **Fourier** σημάτων συνεχούς χρόνου

- $x(t)$ μη-περιοδικό σήμα συνεχούς χρόνου

Σύνθεση

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

Ανάλυση

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

- f Συχνότητα

Προϋποθέσεις: Συνθήκες Dirichlet

1. πεπερασμένο πλήθος ασυνεχειών
2. πεπερασμένο πληθος μεγίστων/ελαχίστων
3. $\int_{-\infty}^{\infty} |x(n)| dt < \infty$

ΦΑΣΜΑ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ
ΜΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ

- Ενέργεια μη περιοδικού σήματος συνεχούς χρόνου

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

- Θεώρημα Parseval

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

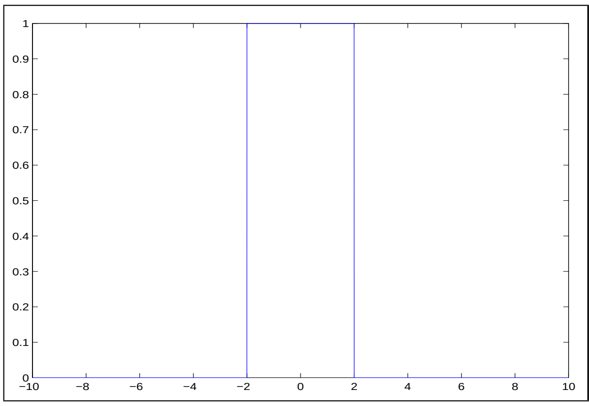
  - φάσμα ενέργειας $X(f), -\infty < f < \infty$
  - μέτρο φάσματος $|X(f)|^2, -\infty < f < \infty$
  - φάση φάσματος $\theta(f) = \angle X(f), -\infty < f < \infty$

Παράδειγμα: τετραγωνικός παλμός

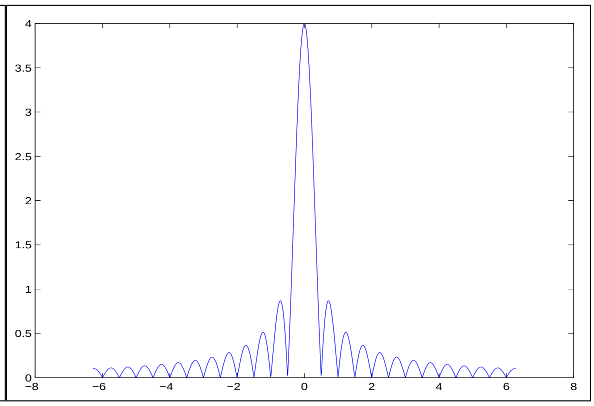
$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \tau, \\ 0, & |t| > \tau \end{cases}$$

Μετασχηματισμός Fourier

$$X(f) = 2\tau sinc(2\pi\tau f)$$



Σήμα



Φάσμα

ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ **FOURIER** ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ

- Γραμμικότητα

$$ax_1(t) + bx_2(t) \longleftrightarrow aX_1(\omega) + bX_2(\omega)$$

- Χρονική μετατόπιση

$$x(t - t_\circ) \longleftrightarrow e^{-\jmath t_\circ \omega} X(\omega)$$

- Μετατόπιση στο πεδίο συχνότητας (διαμόρφωση)

$$e^{\jmath t \omega_\circ} \longleftrightarrow X(\omega - \omega_\circ)$$

- Συγκερασμός

$$y(t) = h(t) \star x(t) \longleftrightarrow Y(\omega) = H(\omega) X(\omega)$$

ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ

- $y(t)$ γραμμικό σύστημα συνεχούς χρόνου

$$y(t) = h(t) \star x(t)$$

- είσοδος αρμονικό σήμα

$$x(t) = e^{\jmath\omega t}$$

- έξοδος

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) e^{\jmath\omega t} d\tau$$

ή

$$y(t) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{\jmath\omega t} dt \right) e^{\jmath\omega t}$$

- Απόκριση συχνότητας

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{\jmath\omega t} dt$$

άρα

$$h(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\Longleftrightarrow} H(\omega)$$

ΑΝΑΛΟΓΙΚΑ ΦΙΛΤΡΑ

Φίλτρο (Γραμμικό) Σύστημα που μεταβάλλει (περιορίζει) το (μέτρο) του φασματικόυ περιεχόμενου των σημάτων.

$$y(t) = h(t) \star x(t) \longleftrightarrow Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

- Φιλτράρισμα:

$$|Y(\omega)| = |H(\omega)||X(\omega)|$$

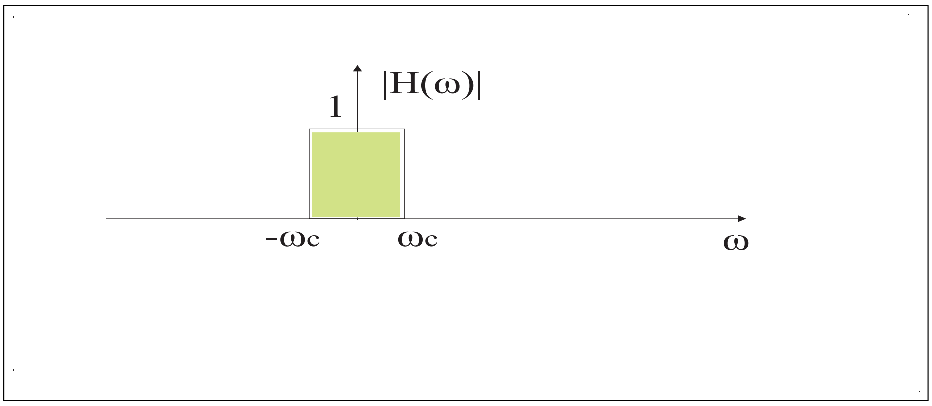
1. Επιλογή του μέτρου της απόκρισης συχνότητας του φίλτρου $H(\omega)$ κατά τον επιθυμητό τρόπο.

2. Γραμμική φάση $\Theta_H(\omega) = -\omega t_d$

Ιδανικό φίλτρο διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων (**LPF**)

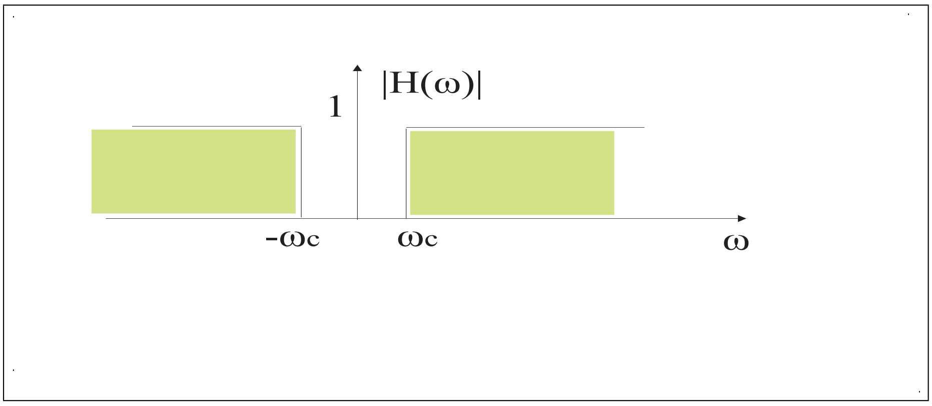
$$|H_{LP}(\omega)| = \begin{array}{ll} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{array}$$

- ω_c: Συχνότητα αποκοπής



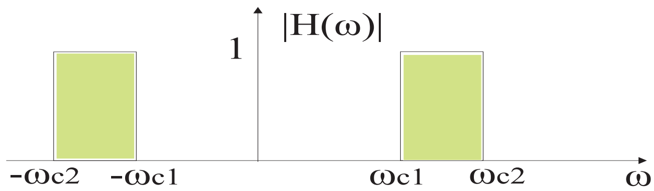
Ιδανικό φίλτρο διέλευσης υψηλών συχνοτήτων (**HPF**)

$$|H_{HP}(\omega)| = \begin{array}{ll} 0 & |\omega| < \omega_c \\ 1 & |\omega| > \omega_c \end{array}$$



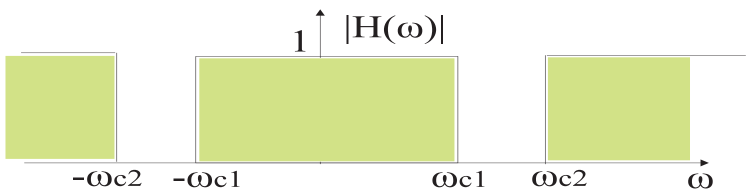
Ιδανικό φίλτρο διέλευσης ζώνης συχνοτήτων (**BPF**)

$$|H_{BP}(\omega)| = \begin{matrix} 0 & \omega_{c1} < |\omega| < \omega_{c2} \\ 1 & \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{matrix}$$



Ιδανικό φίλτρο αποκοπής ζώνης συχνοτήτων (**BSF**)

$$|H_{BS}(\omega)| = \begin{matrix} 0 & \alpha\lambda\lambda o\upsilon \\ 1 & \omega_{c1} < |\omega| < \omega_{c2} \end{matrix}$$



Σειρές **Fourier** σημάτων διακριτού χρόνου

- $x(n) = x(n+N)$ περιοδικό σήμα διακριτού χρόνου

Σύνθεση

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{\jmath 2\pi f_0 kn}$$

Ανάλυση

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(t) e^{-\jmath \frac{2\pi}{N} kn}$$

- $f_0 = \frac{1}{N}$ Θεμελιώδης συχνότητα

Προϋποθέσεις: -

ΦΑΣΜΑ ΙΣΧΥΟΣ
ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΤΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

- Ισχύς περιοδικού σήματος συνεχούς χρόνου

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$$

- Θεώρημα Parseval

$$P = \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2$$

  - (γραμμικό) φάσμα ισχύος $\quad c_k, 0 < k < N-1$
  - μέτρο φάσματος ισχύος $\quad |c_k|^2, 0 < k < N-1$
  - φάση φάσματος ισχύος $\quad \theta_k = \angle c_k, 0 < k < N-1$

Περιοδικότητα Φάσματος: $\quad c_{k+N} = c_k$

Μετασχηματισμός **Fourier** σημάτων διακριτού χρόνου

- $x(n)$ μή-περιοδικό σήμα διακριτού χρόνου

Σύνθεση

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

Ανάλυση

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n}$$

- $\Omega = 2\pi F$ (κυκλική) συχνότητα

Προϋποθέσεις: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$

ΦΑΣΜΑ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ
ΜΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

- Ενέργεια μη περιοδικού σήματος διακριτού χρόνου

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

- Θεώρημα Parseval

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega$$

  - φάσμα ενέργειας $X(\Omega), -\pi < \Omega < \Omega$
  - μέτρο φάσματος $|X(\Omega)|^2, -\pi < \Omega < \Omega$
  - φάση φάσματος $\theta(\Omega) = \angle X(\Omega), -\pi < \Omega < \pi$

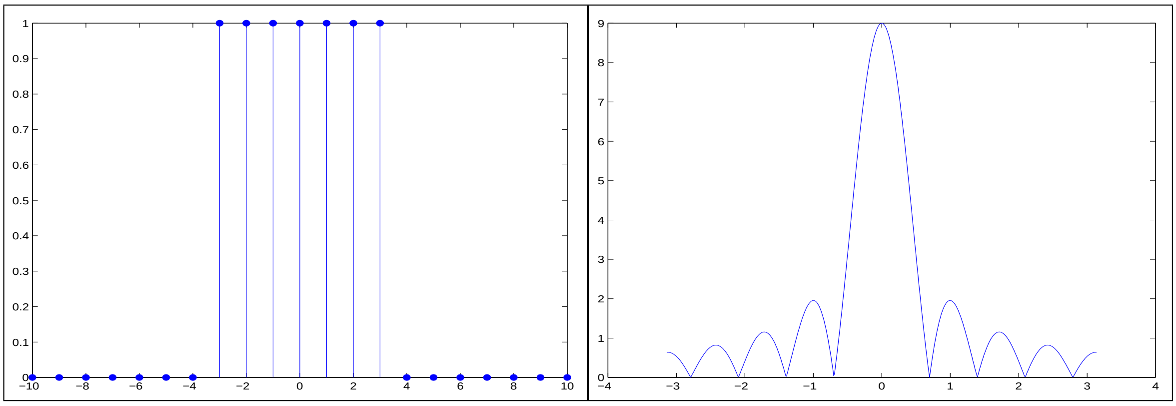
Περιοδικότητα Φάσματος: $X(\Omega + 2\pi) = X(\Omega)$

Παράδειγμα: τετραγωνικός παλμός

$$x(n) = \begin{cases} 1, & |n| < N, \\ 0, & |n| > N \end{cases}$$

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

$$X(\Omega) = \frac{\sin(\Omega(N + \frac{1}{2}))}{\sin(\frac{\Omega}{2})}$$



Σήμα Φάσμα

ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ **FOURIER**

- Γραμμικότητα

$$ax_1(n) + bx_2(n) \longleftrightarrow aX_1(\Omega) + bX_2(\Omega)$$

- Χρονική μετατόπιση

$$x(n - n_\circ) \longleftrightarrow e^{-\jmath n_\circ \Omega} X(\Omega)$$

- Μετατόπιση στο πεδίο συχνότητας (διαμόρφωση)

$$e^{\jmath n \Omega_\circ} \longleftrightarrow X(\Omega - \Omega_\circ)$$

- Συγκερασμός

$$y(n) = h(n) \star x(n) \longleftrightarrow Y(\Omega) = H(\Omega) X(\Omega)$$

- Περιοδικότητα

$$X(\Omega + 2\pi) = X(\Omega)$$