

1. Εισαγωγή
2. Συστήματα Ψηφιακής Επεξεργασίας Σήματος
3. Σήματα και Συστήματα
4. Ψηφιοποίηση Αναλογικών Σημάτων
5. Γραμμικά Χρονικά Αναλλοίωτα Συστήματα
6. Ο Μετασχηματισμός Z
7. Το Πεδίο της Συχνότητας
8. Αναλογικά Φίλτρα
9. Ψηφιακά Φίλτρα
10. Διακριτοί Ορθογώνιοι Μετασχηματισμοί
11. Εφαρμογή στα Ψηφιακά Τηλ./κά Συστήματα
12. Εφαρμογή στις Κατευθυντικές Συστοιχίες Κεραιών

## ΑΝΑΛΟΓΙΚΑ ΦΙΛΤΡΑ

**Φίλτρο** (Γραμμικό) Σύστημα που μεταβάλλει (περιορίζει) το (μέτρο) του φασματικού περιεχόμενου των σημάτων.

$$y(t) = h(t) \star x(t) \longleftrightarrow Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

- Φιλτράρισμα:

$$|Y(\omega)| = |H(\omega)||X(\omega)|$$

- Απόσβεση

$$\alpha = 20 \log (|H(\omega)|) \text{ dB}$$

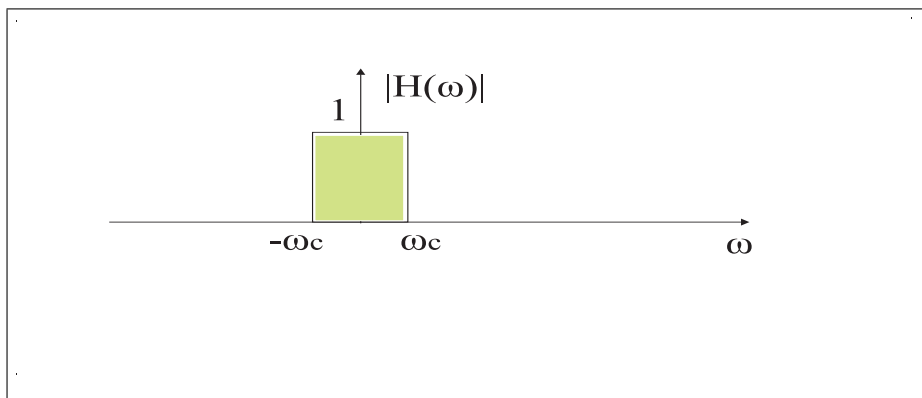
1. Επιλογή του μέτρου της απόκρισης συχνότητας του φίλτρου  $H(\omega)$  κατά τον επιθυμητό τρόπο.

2. Γραμμική φάση  $\Theta_H(\omega) = -\omega t_d$

Ιδανικό φίλτρο διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων (**LPF**)

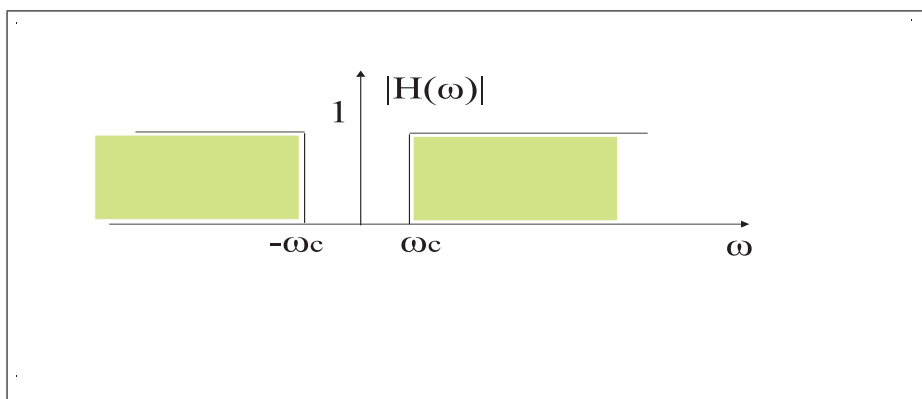
$$|H_{LP}(\omega)| = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

- $\omega_c$ : Συχνότητα αποκοπής



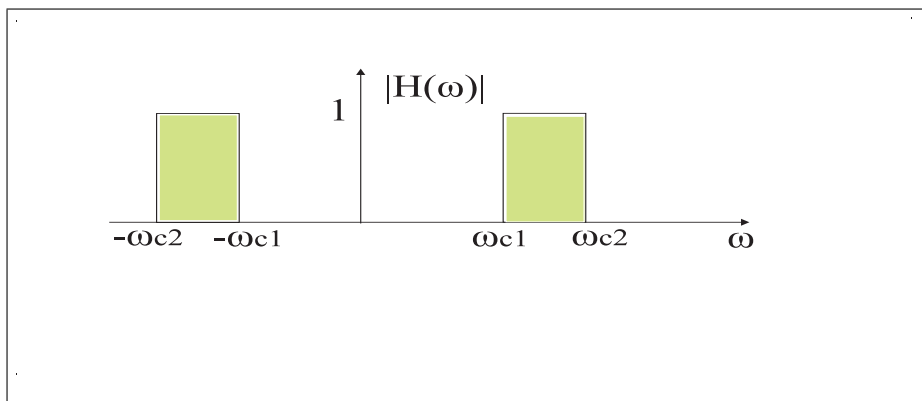
Ιδανικό φίλτρο διέλευσης υψηλών συχνοτήτων (**HPF**)

$$|H_{HP}(\omega)| = \begin{cases} 0 & |\omega| < \omega_c \\ 1 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$



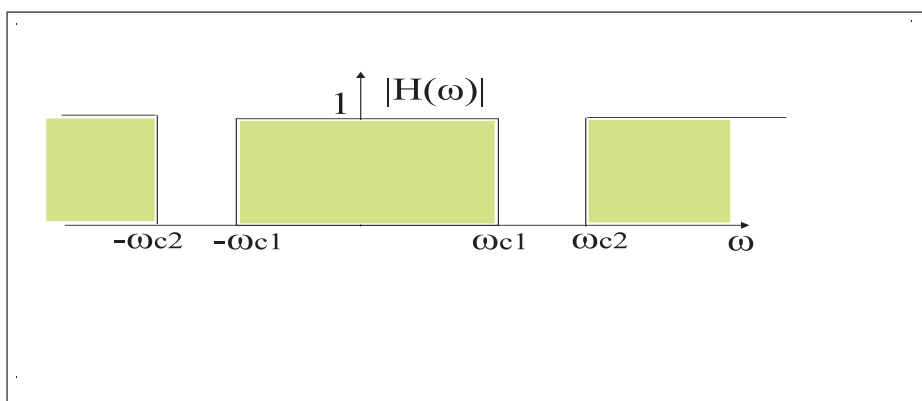
Ιδανικό φίλτρο διέλευσης ζώνης συχνοτήτων (**BPF**)

$$|H_{BP}(\omega)| = \begin{cases} 0 & \omega_{c1} < |\omega| < \omega_{c2} \\ 1 & \text{αλλου} \end{cases}$$

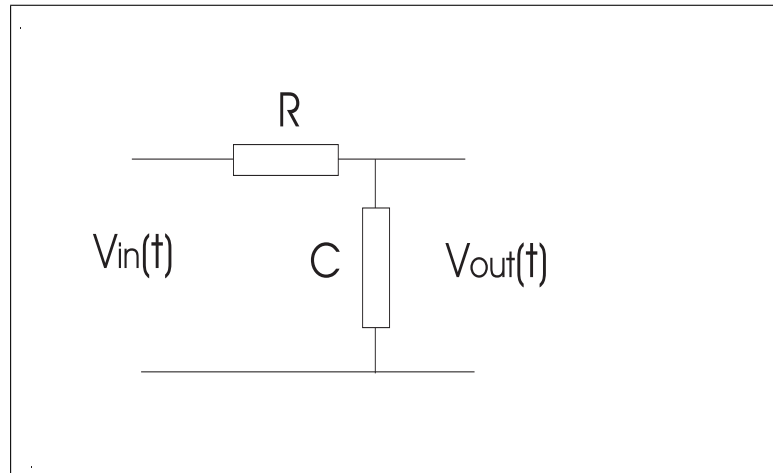


Ιδανικό φίλτρο αποκοπής ζώνης συχνοτήτων (**BSF**)

$$|H_{BS}(\omega)| = \begin{cases} 0 & \alpha\lambda\lambda\omicron\upsilon \\ 1 & \omega_{c1} < |\omega| < \omega_{c2} \end{cases}$$



## ΦΙΛΤΡΟ LP ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ RC



- εξίσωση κυκλώματος

$$RC \frac{d}{dt} v_{out}(t) + v_{out}(t) = v_{in}(t)$$

- συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{1}{1 + RCs}$$

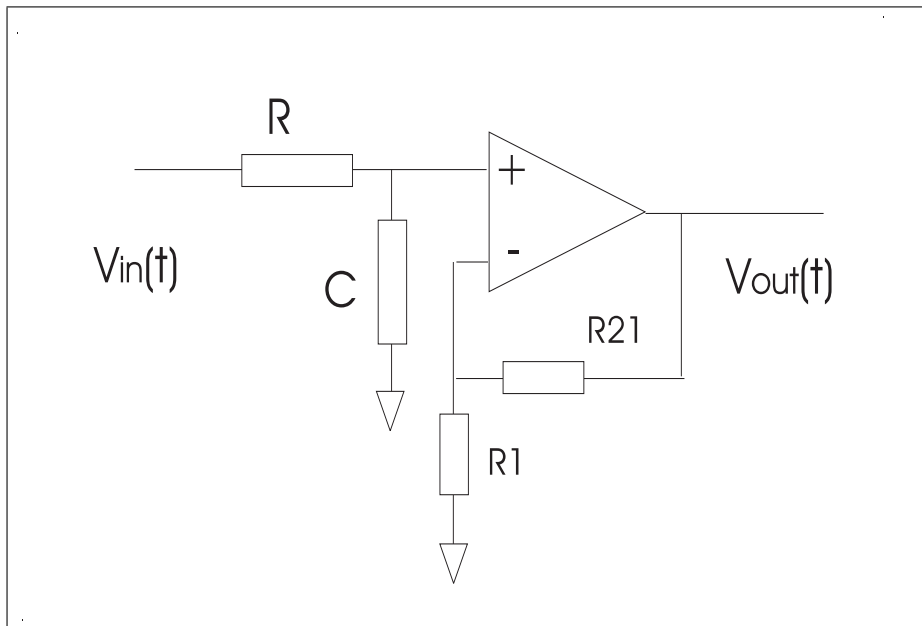
- μέτρο απόκρισης συχνότητας

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

- Εύρος συχνοτήτων 3 db

$$|H(\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \leftrightarrow \omega_{3 \text{ db}} = \omega_0$$

## ΦΙΛΤΡΟ LP ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ Amp



- συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{K}{1 + RCs}$$

- $K$  Κέρδος ενίσχυσης

$$K = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

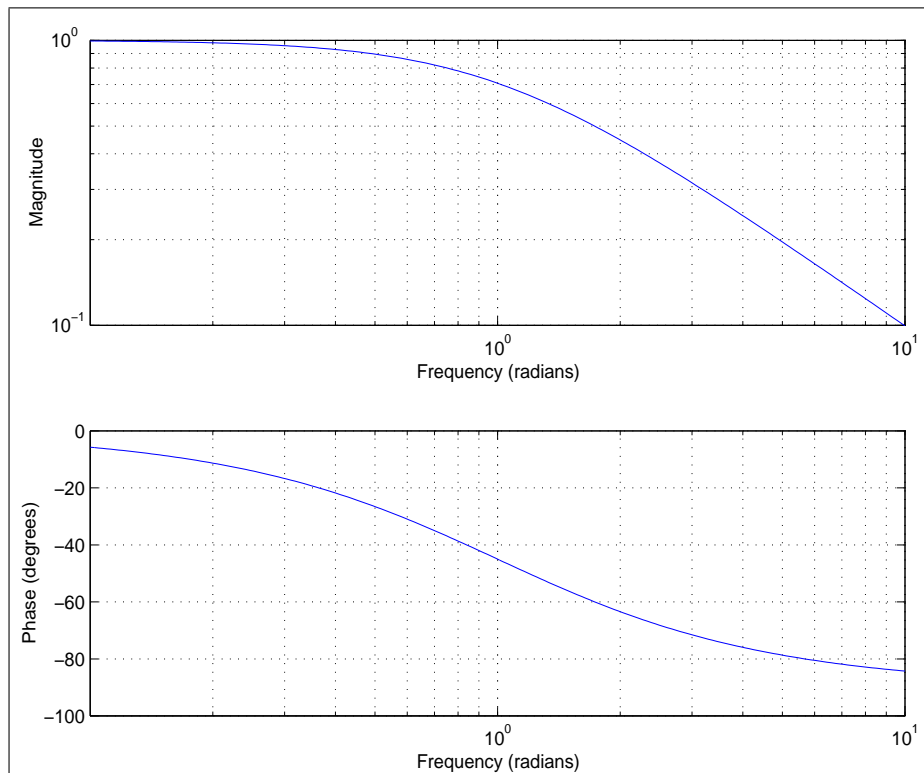
# MATLAB

$$H(s) = \frac{1}{1+s} \implies |H(\omega)| = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

b=1;

a=[1 1];

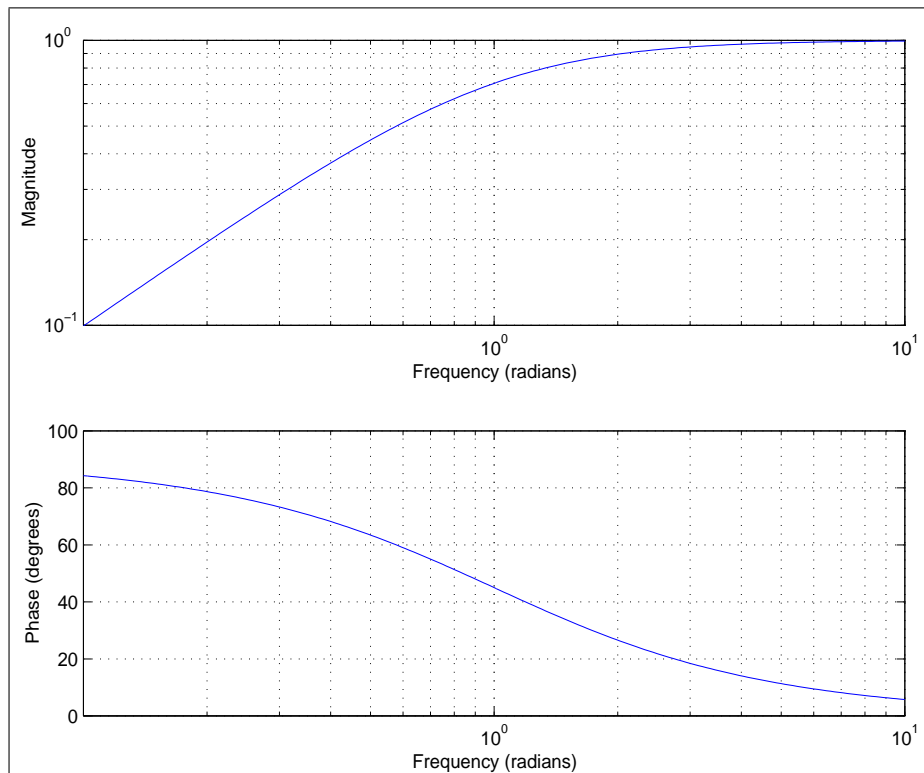
freqs(b,a)



# MATLAB

$$H(s) = \frac{s}{1+s} \implies |H(\omega)| = \frac{\frac{\omega}{\omega_o}}{\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

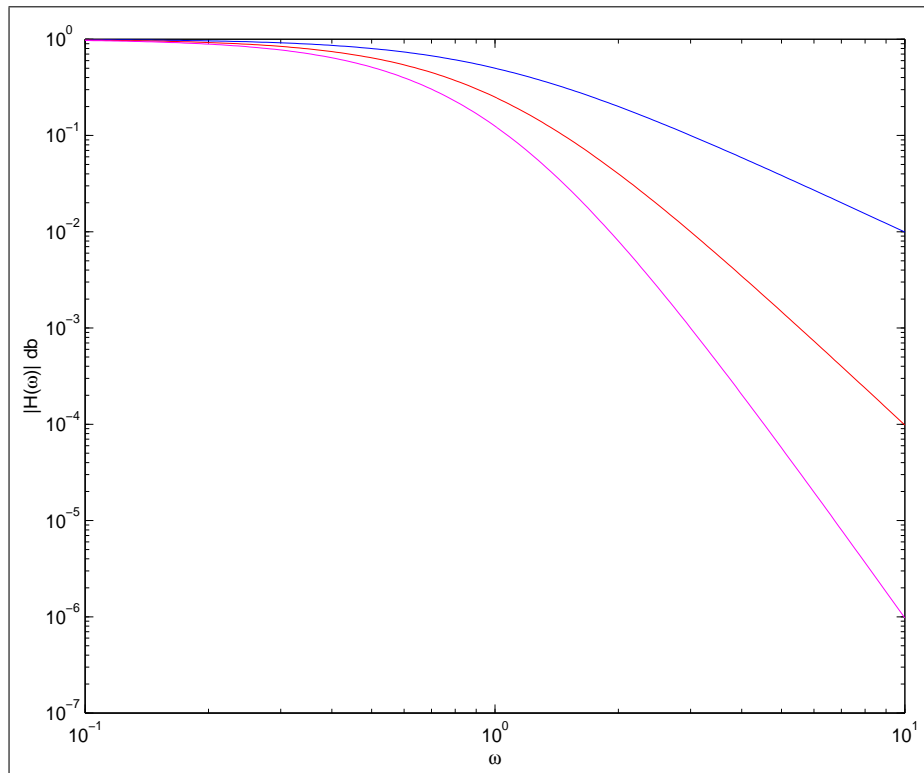
```
b=[1 0];  
a=[1 1];  
freqs(b,a)
```





## Φίλτρο **LP** 3ης τάξης

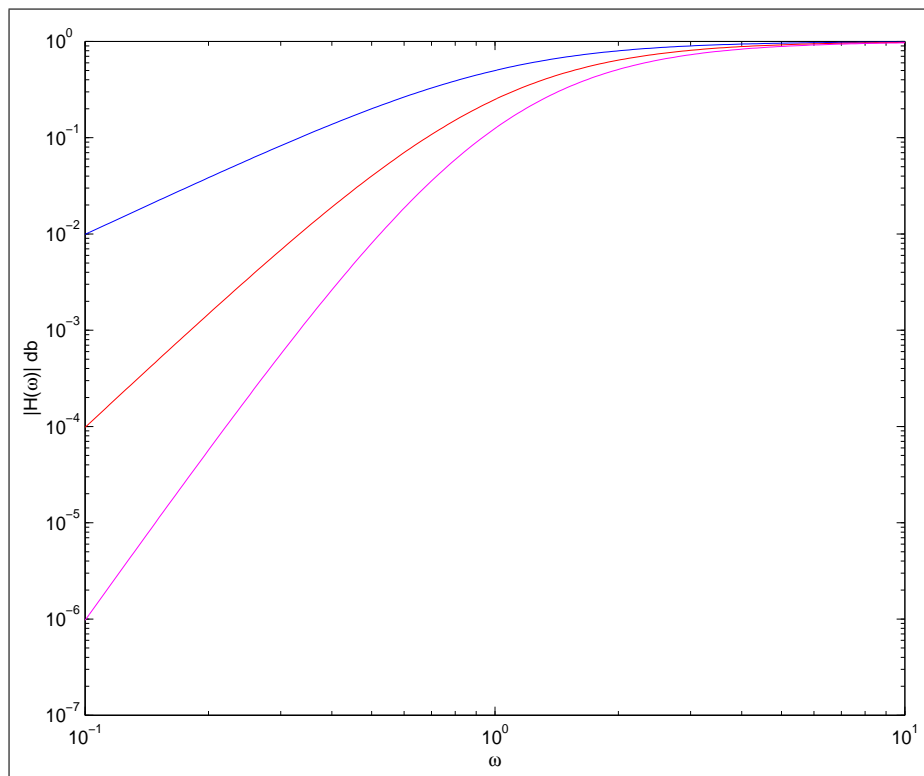
$$H(s) = \left( \frac{1}{1+s} \right)^3 \leftarrow |H(\omega)| = \frac{1}{\left( 1 + \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right)^{3/2}}$$



$f_{3\text{ db}} = ? \dots$

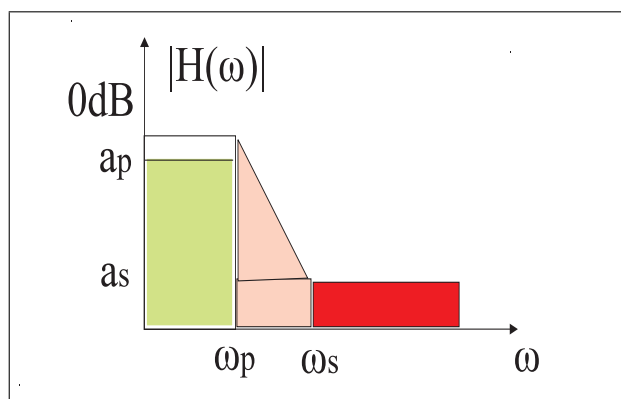
## Φίλτρο **HP** 3ης τάξης

$$H(s) = \left( \frac{s}{1+s} \right)^3 \leftarrow |H(\omega)| = \frac{\frac{\omega}{\omega_0}^{\frac{3}{2}}}{\left( 1 + \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}$$



$f_{3\text{ db}} = ?$

## Σχεδίαση Αναλογικών Φίλτρων



### Προδιαγραφές

- ζώνη διέλευσης  $0 < \omega < \omega_p$
- ζώνη αποκοπής  $\omega_p < \omega < \infty$
- ζώνη μετάβασης  $\omega_p < \omega < \omega_s$
- συχνότητα διέλευσης  $\omega_p$
- συχνότητα αποκοπής  $\omega_s$
- κυμάτωση στη ζώνη διέλευσης  $\alpha_p = 20 \log \left( \frac{V_0}{V_1} \right) \text{ dB}$
- απόσβεση στη ζώνη αποκοπής  $\alpha_s = 20 \log \left( \frac{V_0}{V_2} \right) \text{ dB}$

## Στόχοι σχεδίασης

- μικρή κυμάτωση στη ζώνη διέλευσης
- μεγάλη απόσβεση στη ζώνη αποκοπής
- μικρό εύρος μεταβατικής ζώνης
- απλή κυκλωματική υλοποίηση

## Μέθοδοι σχεδίασης

- Φίλτρα Butterworth
- Φίλτρα Chebychev I, II
- Ελλειπτικά Φίλτρα
- ...

## Φίλτρα **Butterworth**

$$|H(\omega)| = \sqrt{\frac{1}{1 + (\frac{\omega}{\omega_o})^{2n}}}$$

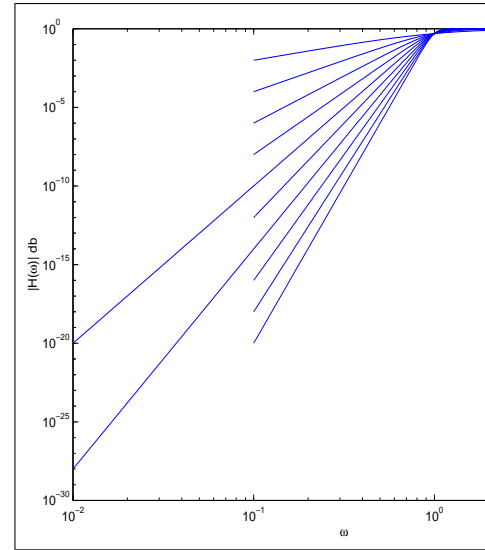
$$|H(\omega)|_{\max} = |H(0)| = 1$$

$$\alpha \approx 20n \log\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)$$

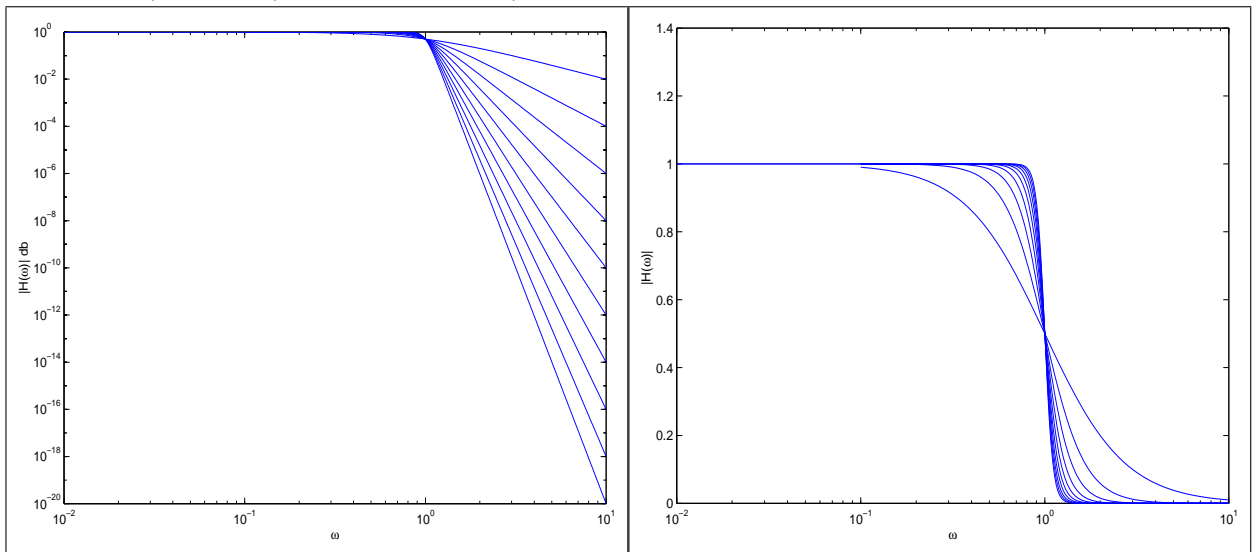
$$\omega_{3 \text{ dB}} = \omega_o$$

### Κανονικοποιημένο φίλτρο **Butterworth**

- LP [b,a]= butter(N,Wn,'s')
- HP [b,a]= butter(N,Wn,'high','s')
- BP [b,a]= butter(N,Wn,'s'), Wn=[W1 W2]
- BS [b,a]= butter(N,Wn,'stop','s'), Wn=[W1 W2]



Απόκριση συχνότητας κανονικοποιημένου φίλτρου διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων, τάξεως  $n = 1, 2 \dots 10$ .



Απόκριση συχνότητας κανονικοποιημένου φίλτρου Butterworth διέλευσης υψηλών συχνοτήτων, τάξεως  $n = 1, 2 \dots 10$ .

## Φίλτρα **Chebyshev**

$$|H(\omega)| = \sqrt{\frac{1}{1 + \epsilon^2 C_n^2\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)}}$$

$$C_n(\omega) = \cos(n \cos^{-1}(\omega))$$

$$|H(\omega)|_{\max} = |H(0)| = \begin{cases} 1 & n = 2k \\ \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}} & n = 2k + 1 \end{cases}$$

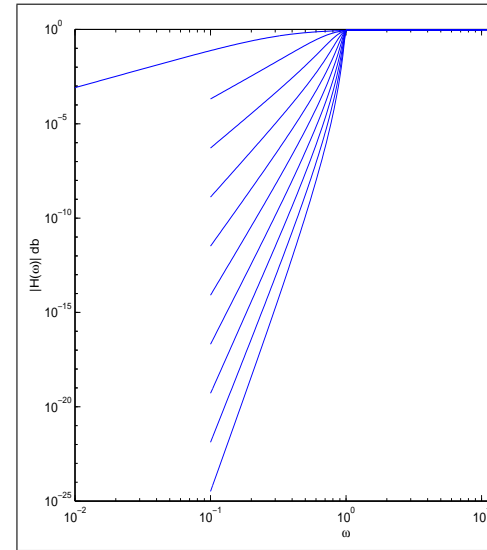
$$\alpha \approx 20n \log\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right) + (20 \log(\epsilon) + 20(n-1) \log(2))$$

$$\omega_{3 \text{ dB}} = \omega_o$$

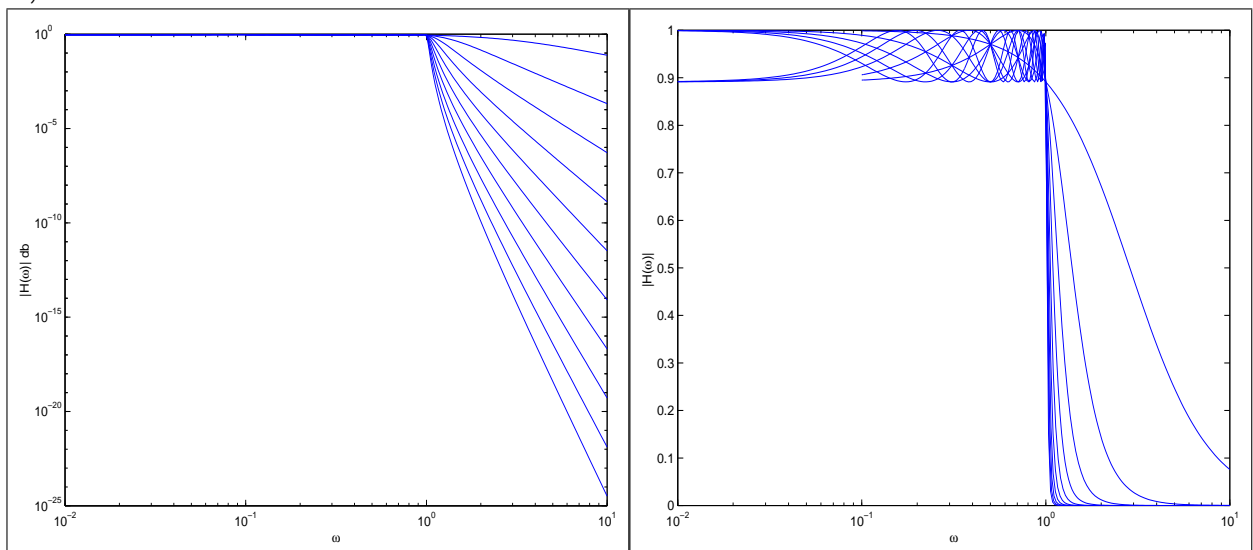
### Κανονικοποιημένο φίλτρο **Chebyshev**

- LP [b,a]= cheby1(N,R,Wn,'s')
- HP [b,a]= cheby1(N,R,Wn,'high','s')
- BP [b,a]= cheby1(N,R,Wn,'s'), Wn=[W1 W2]
- BS [b,a]= cheby1(N,R,Wn,'stop','s'), Wn=[W1 W2]

Όμοια για cheby2(.).

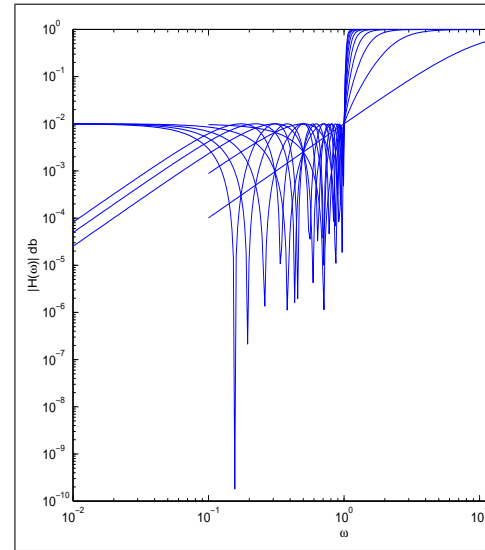


Απόκριση συχνότητας κανονικοποιημένου φίλτρου I,  $\alpha_p = 0.5$  dB, διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων, τάξεως  $n = 1, 2 \dots 10$ .

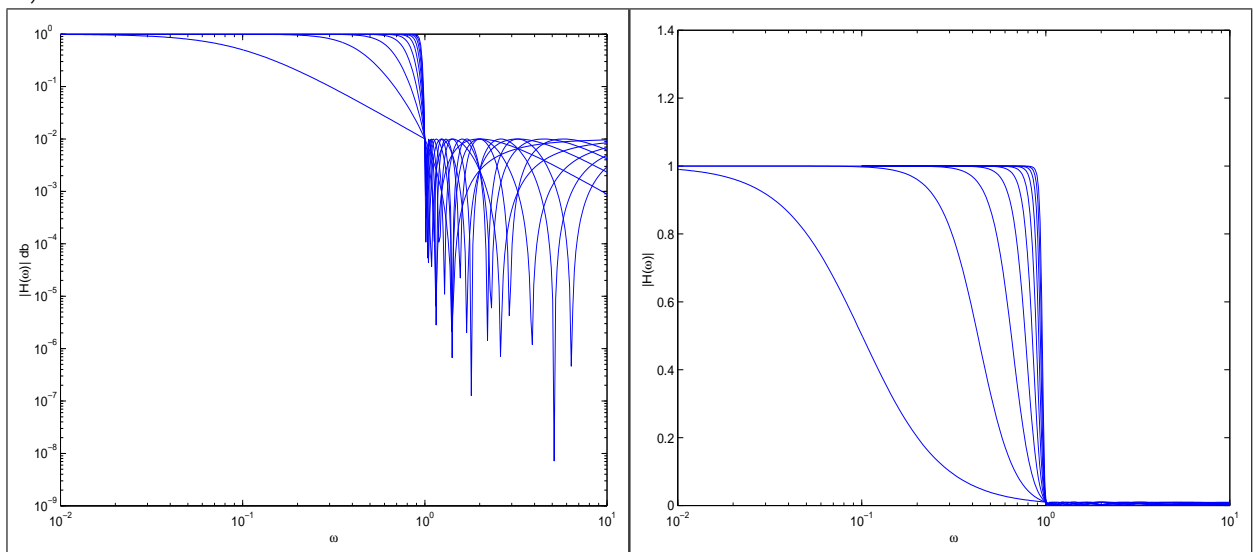


Απόκριση συχνότητας κανονικοποιημένου φίλτρου Chebychev-I,  $\alpha_p = 0.5$  dB, διέλευσης υψηλών συχνοτήτων, τάξεως  $n = 1, 2 \dots 10$ .



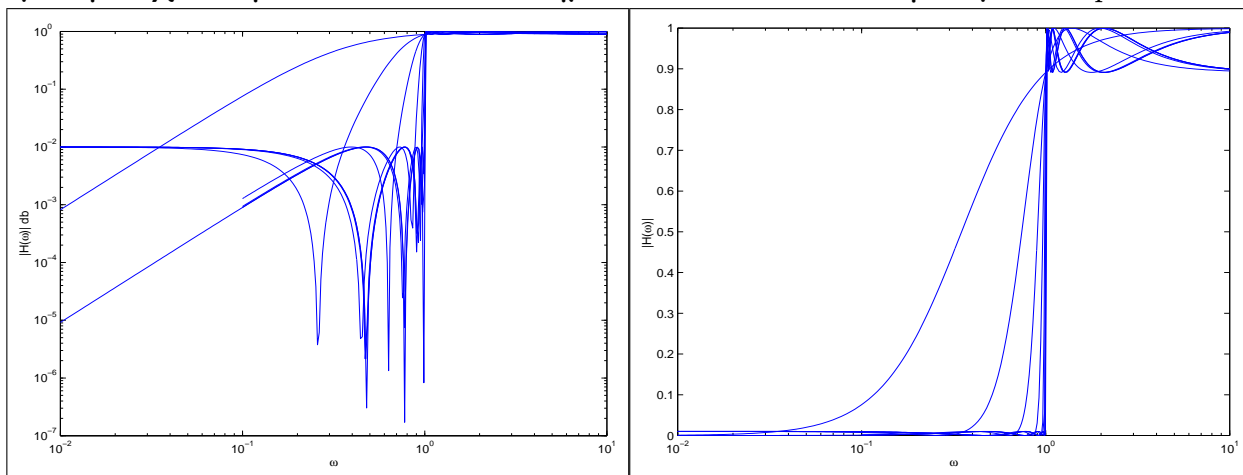


Απόκριση συχνότητας κανονικοποιημένου φίλτρου  
 Π,  $\alpha_p = 0.5$  dB, διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων, τάξεως  $n = 1, 2 \dots 10$ .



Απόκριση συχνότητας κανονικοποιημένου φίλτρου Chebyshev-II,  
 $\alpha_p = 0.5$  dB, διέλευσης υψηλών συχνοτήτων, τάξεως  $n = 1, 2 \dots 10$ .

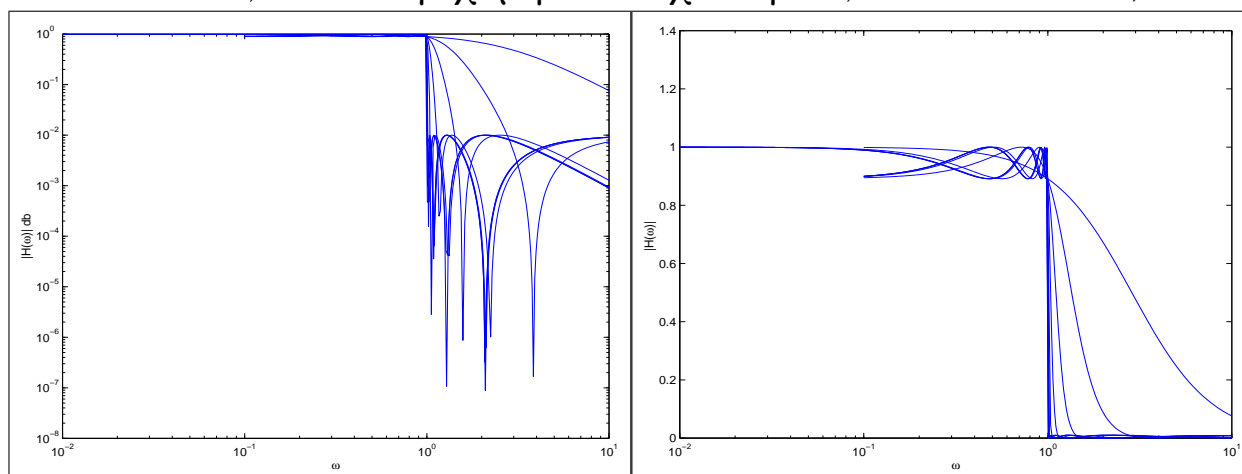
Απόκριση συχνότητας κανονικοποιημένου ελλειπτικού φίλτρου,  $\alpha_p =$



0.5

dB

$\alpha_s = 20$  dB, διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων, τάξεως  $n = 1, 2 \dots 10$ .



Απόκριση συχνότητας κανονικοποιημένου ελλειπτικού φίλτρου,  $\alpha_p = 0.5$  dB,  $\alpha_s = 20$  dB, διέλευσης υψηλών συχνοτήτων, τάξεως  $n = 1, 2 \dots 10$ .

### Μετασχηματισμοί Φίλτρων

- $H_{LP}(s)$  κανονικοποιημένο φίλτρο διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων,  $\omega_o = 1$
- $H_D(S)$  φίλτρο επιθυμητών χαρακτηριστικών

$$H_D(S) = H_{LP}(s)|_{s=g(S)}$$

LP	$s = \omega_o S$
HP	$s = \frac{\omega_o}{S}$
BP	$s = \frac{S^2 + \omega^2}{S}$
BS	$s = \frac{(\omega_2 - \omega_1)S}{S^2 + \omega^2}$

Να σχεδιαστεί φίλτρο Butterworth *LP* με προδιαγραφές  
 $\omega_p = 3.5 \text{ KHz}$ ,  $\omega_s = 4.0 \text{ KHz}$ ,  $\alpha_p = 1$ ,  $\alpha_s = 20 \text{ dB}$ .

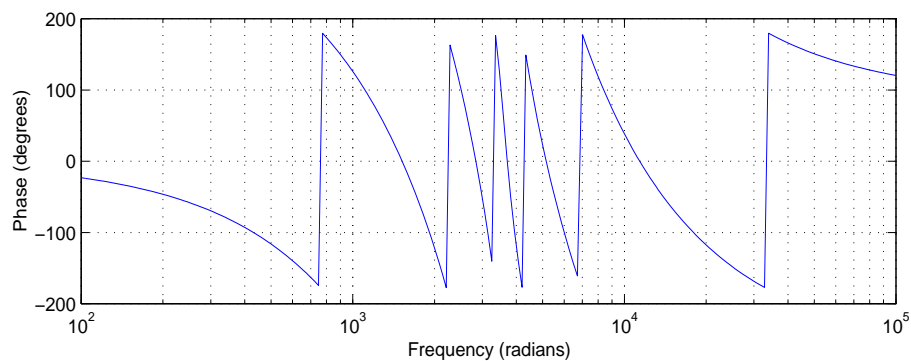
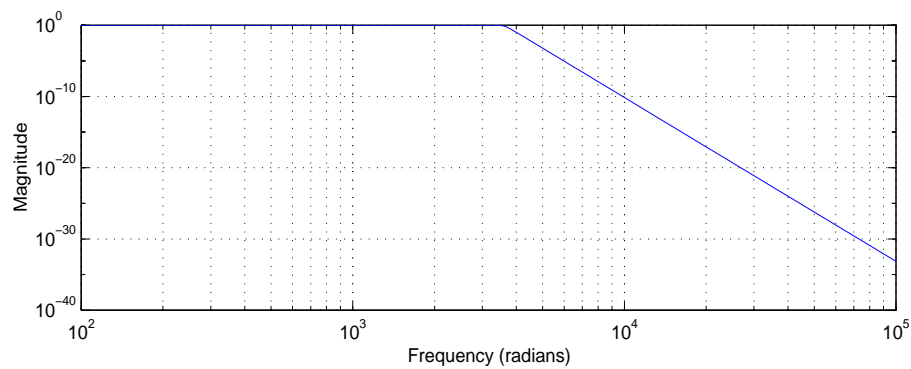
`w1=3500;`

`w2=4000;`

`[n,wo]=buttord(w1,w2,1,20,'s')`

`[b,a]=butter(n,wo,'s')`

`freqs(b,a)`



Να σχεδιασθει φίλτρο Butterworth *HP* με προδιαγραφές

$\omega_s = 3.5 \text{ KHz}$ ,  $\omega_p = 4.0 \text{ KHz}$ ,  $\alpha_p = 1$ ,  $\alpha_s = 20 \text{ dB}$ .

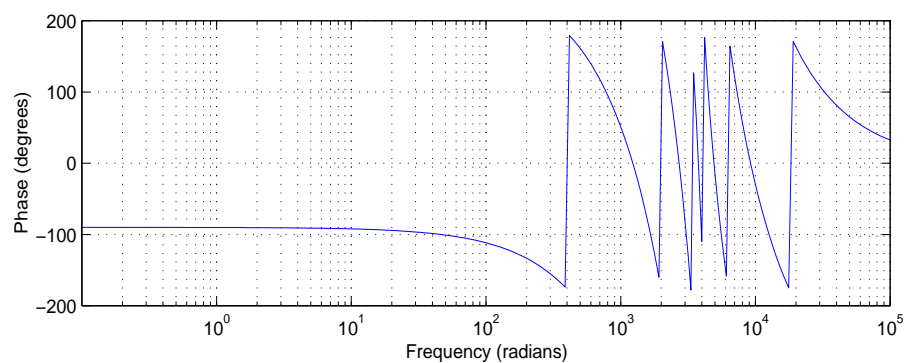
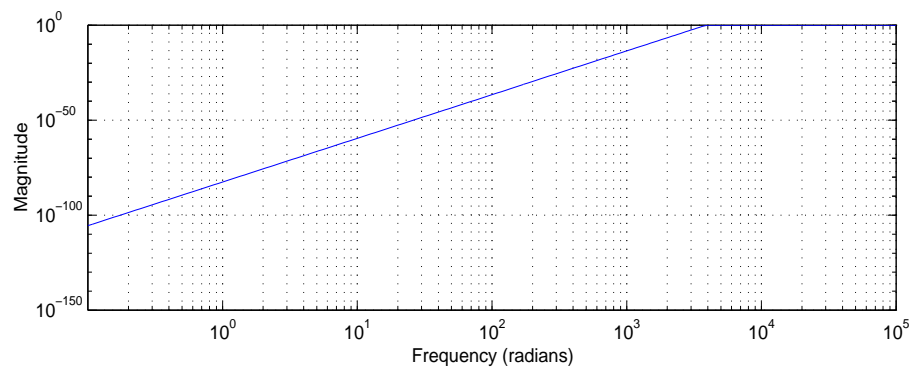
```
w1=4000;
```

```
w2=3500;
```

```
[n,wo]=buttord(w1,w2,1,20,'s')
```

```
[b,a]=butter(n,wo,'s')
```

```
freqs(b,a)
```



Να σχεδιαστεί φίλτρο Butterworth *BP* με προδιαγραφές

$\omega_p = [4, 8] \text{ KHz}$ ,  $\omega_s = [3.5, 8.5] \text{ KHz}$ ,  $\alpha_p = 1$ ,  $\alpha_s = 20 \text{ dB}$ .

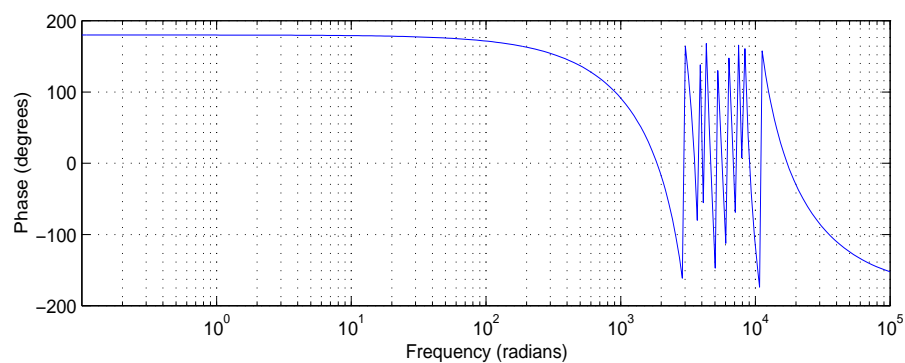
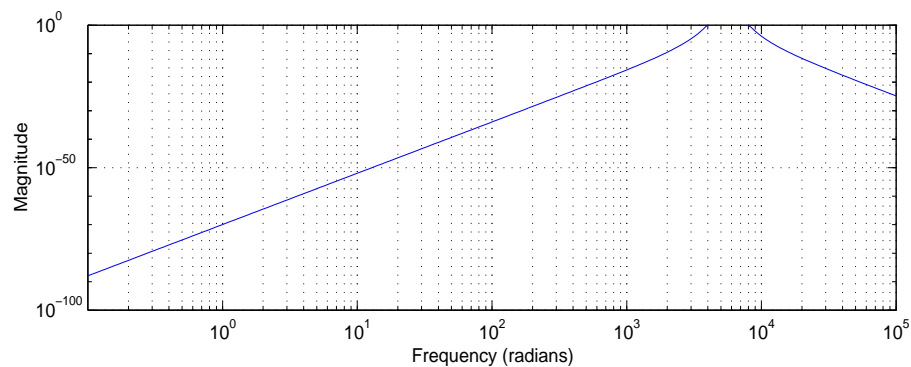
`w1=4000;`

`w2=3500;`

`[n,wo]=buttord(w1,w2,1,20,'s')`

`[b,a]=butter(n,wo,'s')`

`freqs(b,a)`



Να σχεδιαστεί φίλτρο Butterworth *BS* με προδιαγραφές

$\omega_s = [4, 8] \text{ KHz}$ ,  $\omega_p = [3.5, 8.5] \text{ KHz}$ ,  $\alpha_p = 1$ ,  $\alpha_s = 20 \text{ dB}$ .

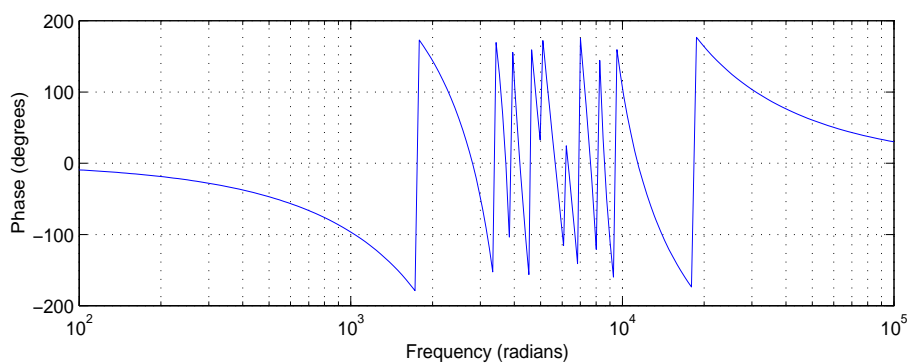
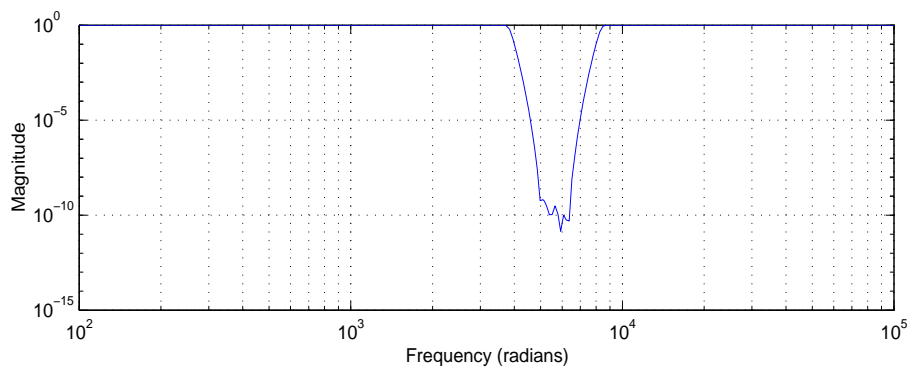
`w1=4000;`

`w2=3500;`

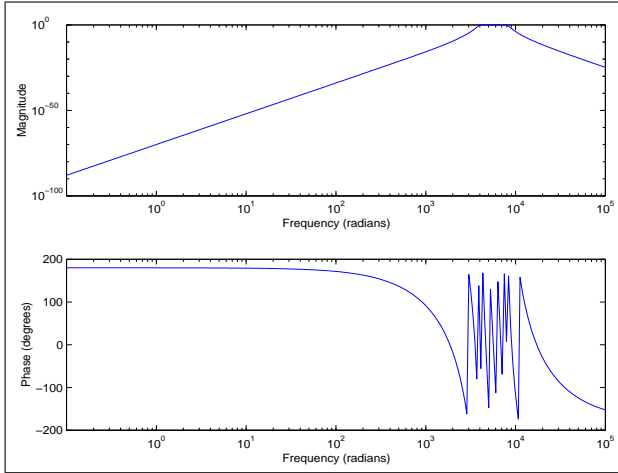
`[n,wo]=buttord(w2,w1,1,20,'s')`

`[b,a]=butter(n,wo,'stop','s')`

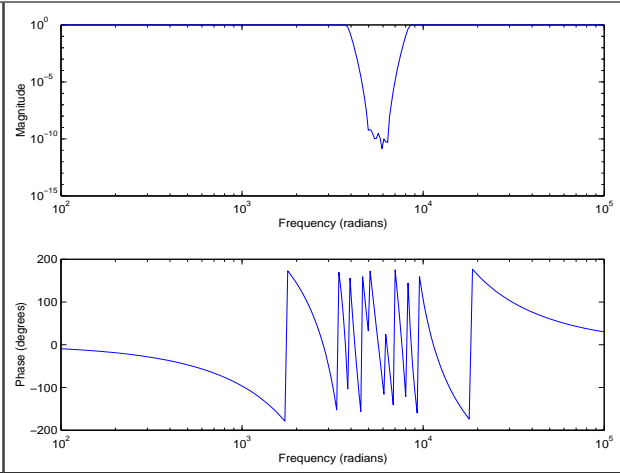
`freqs(b,a)`



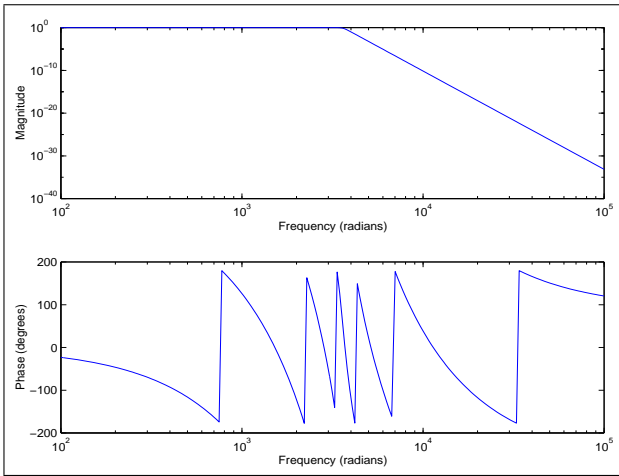
Φίλτρα *BP*



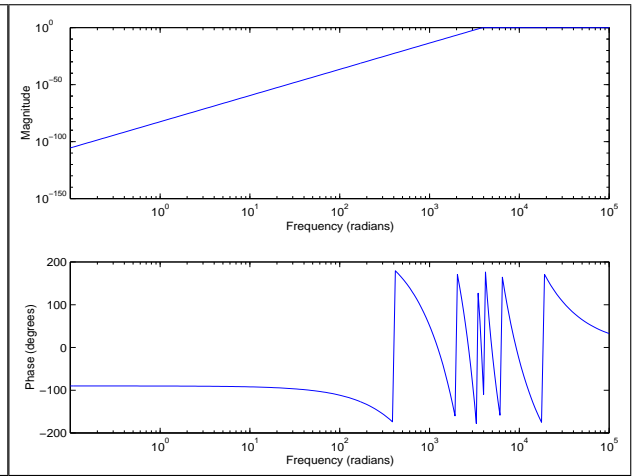
*BS*



Butterwo

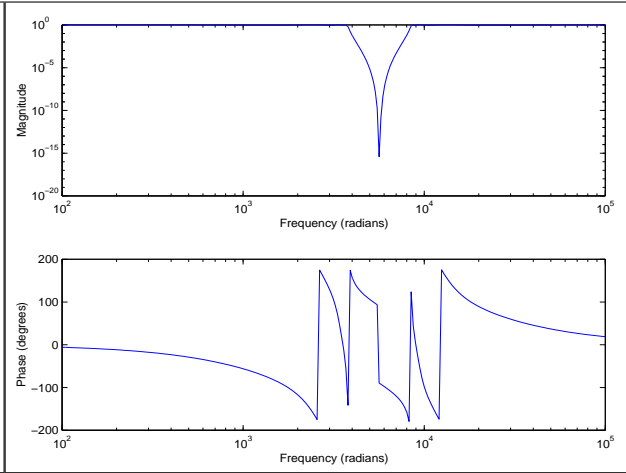
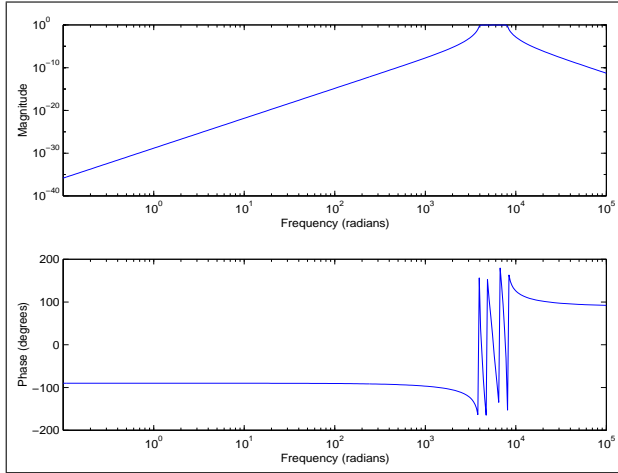


*LP*



*HP*

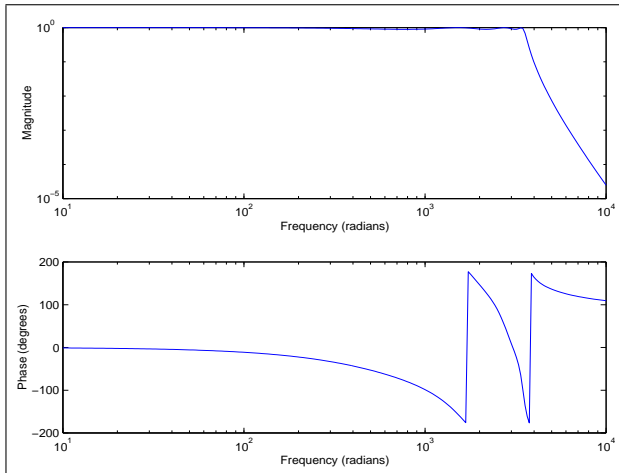




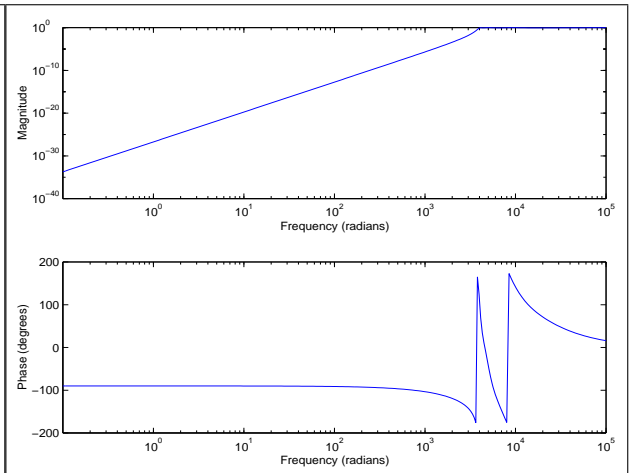
Φίλτρα *BP*

*BS*

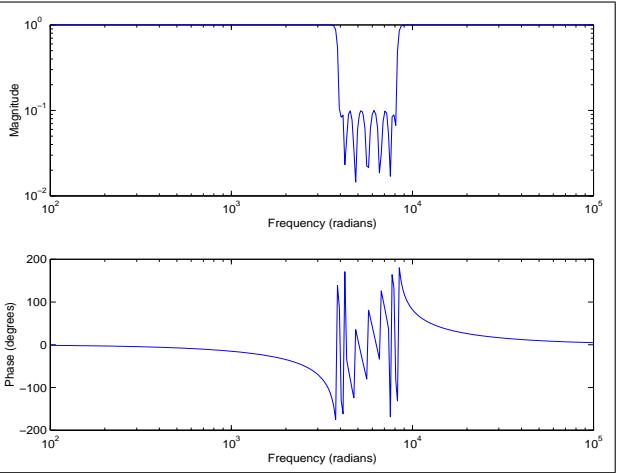
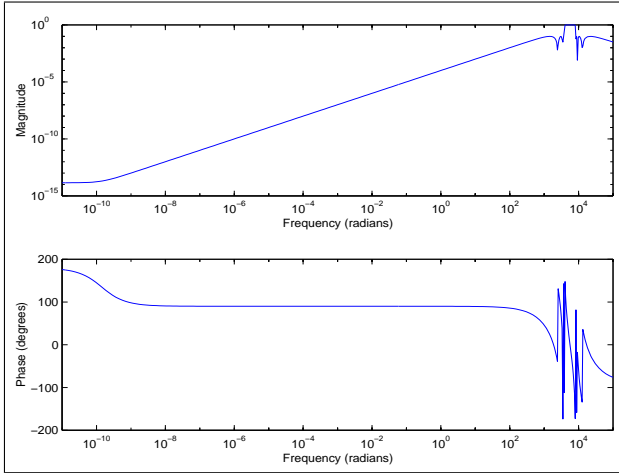
Chebysche



*LP*



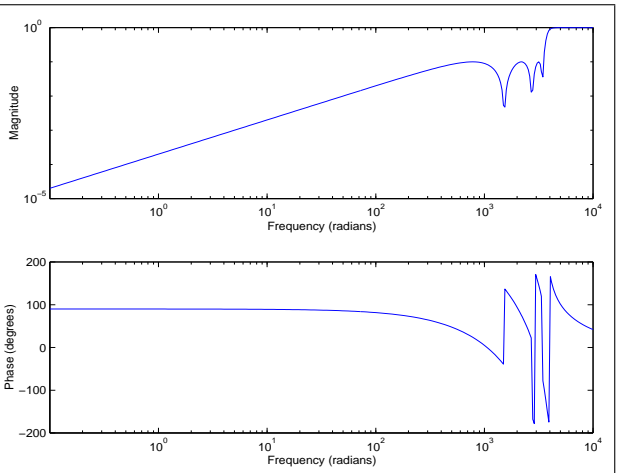
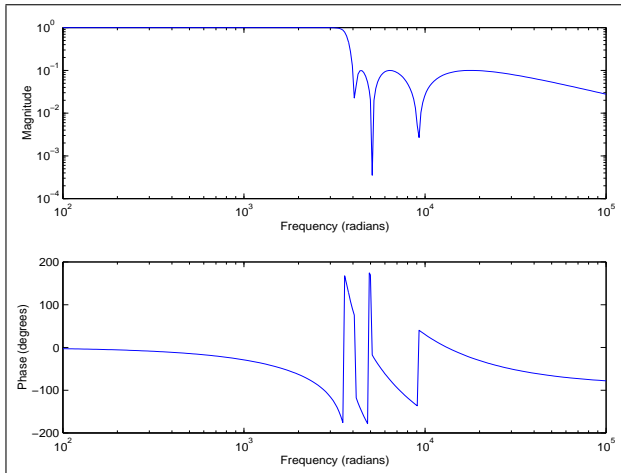
*HP*



ίλτρα *BP*

*BS*

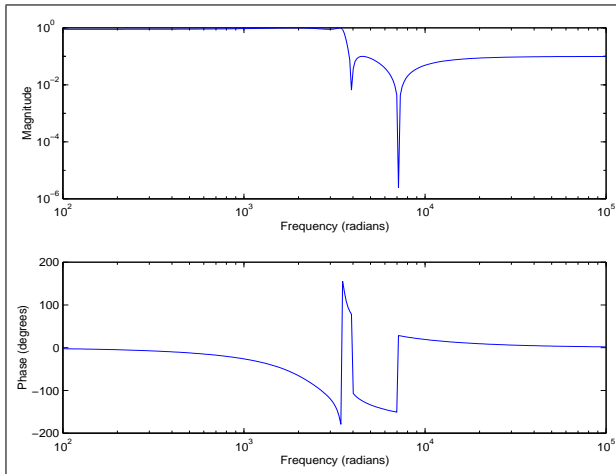
Chebyche



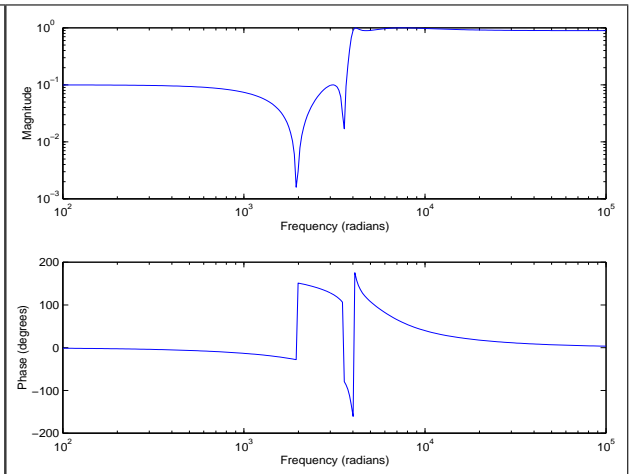
*LP*

*HP*

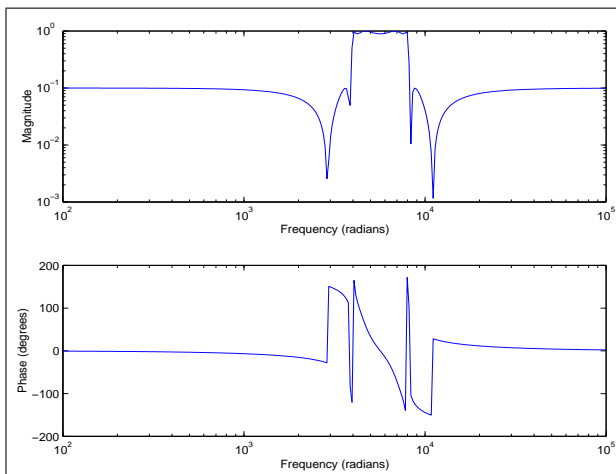
## Φίλτρα Ελλειπτικά



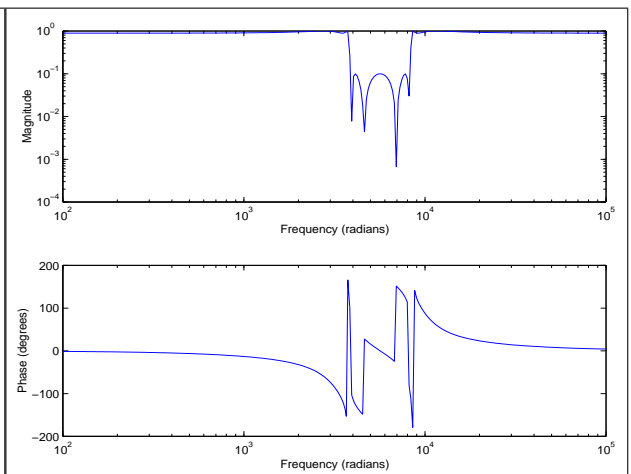
*LP*



*HP*



*BP*



*BS*

## Σύγκριση

- Τάξη  $n$  του φίλτρου

	$B$	$C - I$	$C - II$	$EL$
$LP$	23	7	7	4
$HP$	23	7	7	4
$BP$	18	7	7	4
$BS$	18	7	7	4