ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

1. ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

Τα δειγματικά σημεία (στοιχειώδη ενδεχόμενα) ενός δειγματικού χώρου στοχαστικού (τυχαίου) πειράματος (ή φαινομένου) δύνανται να είναι αριθμοί, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση που εκφράζουν ποσοτικό χαρακτηριστικό του στοχαστικού πειράματος, ή συμβολικές εκφράσεις με γράμματα του αλφαβήτου, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση που περιγράφουν ποιοτικό χαρακτηριστικό του στοχαστικού πειράματος. Οι περιπτώσεις αυτές αντιμετωπίζονται ενιαία με την αντιστοίχηση σε κάθε δειγματικό σημείο ενός πραγματικού αριθμού. Επιπλέον, σε ένα στοχαστικό (τυχαίο) πείραμα (ή φαινόμενο) το ενδιαφέρον και από πρακτική άποψη εστιάζεται στην πραγματοποίηση ή μη αριθμητικών μεγεθών τα οποία αντιστοιχούν σε δειγματικά σημεία. Σχετικά θέτουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.1. *Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός στοχαστικού (τυχαίου) πειράματος. Μια πραγματική συνάρτηση X που ορίζεται στο δειγματικό χώρο Ω καλείται τυχαία μεταβλητή (τ.μ.). Η συνάρτηση αυτή αντιστοιχεί σε κάθε δειγματικό σημείο $\omega \in \Omega$ έναν πραγματικό αριθμό $x = X(\omega)$.*

Σημειώνουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές συμβολίζονται με τα κεφαλαία γράμματα χωρίς δείκτες X, Y, Z, W ή με δείκτες $X_1, X_2, ..., X_\kappa$ και οι τιμές τους με τα αντίστοιχα μικρά γράμματα x, y, z, w ή $x_1, x_2, ..., x_\kappa$.

Το σύνολο $R_X \subseteq R$ των τιμών της τυχαίας μεταβλητής X αποτελεί το νέο δειγματικό χώρο του στοχαστικού (τυχαίου) πειράματος (ή φαινομένου). Το διάστημα $(-\infty, x]$ είναι βασικό ενδεχόμενο στο νέο αυτόν δειγματικό χώρο. Οποιοδήποτε άλλο ενδεχόμενο $B \subseteq R_X$ δύναται να εκφρασθεί συναρτήσει του διαστήματος αυτού. Είναι επομένως χρήσιμη η εισαγωγή της ακόλουθης συνάρτησης.

Ορισμός 1.2. *Η συνάρτηση*

$$F(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}), \; -\infty < x < \infty$$

καλείται συνάρτηση κατανομής (σ.κ.) ή αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.) της τ.μ. X.

Στις περιπτώσεις που υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X συμβολίζεται με F_X και η τιμή της στο x με $F_X(x)$.

Σημειώνουμε ότι η συνάρτηση κατανομής, ως πιθανότητα, λαμβάνει τιμές στο διάστημα $[0,1]$:

$$0 \leq F(x) \leq 1, \; -\infty < x < \infty.$$

Επίσης είναι αύξουσα συνάρτηση,

$$F(x_1) \le F(x_2)\,,\ -\infty < x_1 < x_2 < \infty\,,$$

εφ' όσον $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x_1\} \subseteq \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x_2\}$ και

$$F(-\infty) \equiv \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0\,,\ F(+\infty) \equiv \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1\,,$$

εφ' όσον $\lim_{x\to-\infty}\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\} = \varnothing$, $\lim_{x\to+\infty}\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\} = \Omega$.

Η πιθανότητα όπως μια τυχαία μεταβλητή βρίσκεται σε συγκεκριμένο διάστημα των πραγματικών αριθμών δύναται να εκφρασθεί συναρτήσει της συνάρτησης κατανομής της. Σχετικά αποδεικνύουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.1. *Έστω F η συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής X. Τότε*

$$P(\alpha < X \le \beta) = F(\beta) - F(\alpha) \tag{1.2}$$

για κάθε πραγματικούς αριθμούς α και β με $\alpha < \beta$.

Απόδειξη. Το ενδεχόμενο $\{\omega \in \Omega : \alpha < X \le \beta\}$ δύναται να εκφρασθεί ως διαφορά δύο ενδεχομένων ως εξής:

$$\{\omega \in \Omega : \alpha < X \le \beta\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le \beta\} - \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le \alpha\}$$

με $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le \alpha\} \subseteq \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le \beta\}$, εφ' όσον $\alpha < \beta$. Επομένως, χρησιμοποιώντας την (6.5) του Κεφ. 1, συνάγουμε, σύμφωνα με τη (2.1), τη σχέση (2.2).

Παράδειγμα 1.1. Ας θεωρήσουμε δύο διαδοχικές ρίψεις ενός συνήθους νομίσματος. Ένας κατάλληλος δειγματικός χώρος για τη μελέτη του τυχαίου αυτού πειράματος είναι το σύνολο

$$\Omega = \{(\gamma,\gamma), (\gamma,\kappa), (\kappa,\gamma), (\kappa,\kappa)\}\,,$$

όπου σημειώνεται με *κ* η όψη κεφαλή και με *γ* η όψη γράμματα. Η συνάρτηση

$$X(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega = (\kappa,\kappa) \\ 1, & \omega \in \{(\gamma,\kappa),\ (\kappa,\gamma)\} \\ 2, & \omega = (\gamma,\gamma) \end{cases}$$

η οποία ορίζεται στο δειγματικό χώρο *Ω* και παίρνει τιμές στο σύνολο

$$R_X = \{0,1,2\}$$

είναι τυχαία μεταβλητή και εκφράζει τον αριθμό εμφανίσεων της όψης γράμματα.

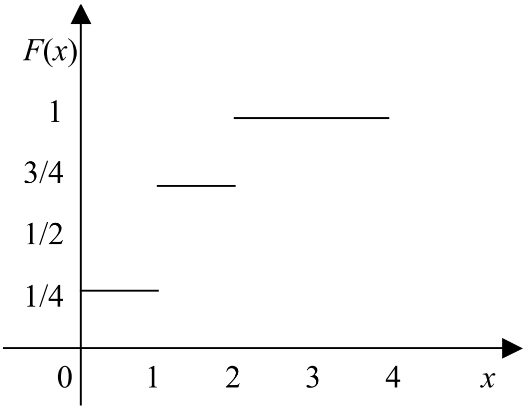
Η συνάρτηση κατανομής *F* της τ.μ. *X* υπολογίζεται ως εξής: Παρατηρούμε ότι

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\} = \begin{cases} \varnothing\ , & -\infty < x < 0 \\ \{0\}\ , & 0 \le x < 1 \\ \{0,1\}, & 1 \le x < 2 \\ \Omega\ , & 2 \le x < \infty \end{cases}$$

και σύμφωνα με τον ορισμό 1.2,

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0\ , & -\infty < x < 0 \\ 1/4, & 0 \le x < 1 \\ 3/4, & 1 \le x < 2 \\ 1\ , & 2 \le x < \infty. \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της $F(x)$ δίδεται στο Σχήμα 1.1. Παρατηρούμε ότι αυτή είναι σκαλωτή συνάρτηση με άλματα στα σημεία $x = 0,1,2$ μεγέθους 1/4, 1/2, 1/4 αντίστοιχα.



Σχήμα 1.1. Η συνάρτηση κατανομής $F(x)$.

Παράδειγμα 1.2. Ας θεωρήσουμε το τυχαίο πείραμα της ρίψης ενός συνήθους κύβου. Καταγράφοντας την ένδειξη της επάνω έδρας του κύβου ο δειγματικός χώρος του τυχαίου αυτού πειράματος είναι το σύνολο

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}.$$

Έστω X το αποτέλεσμα της ρίψης (η ένδειξη της επάνω έδρας) του κύβου.

Η ταυτοτική αυτή συνάρτηση

$$X(\omega) = \omega\,,\ \omega \in \Omega$$

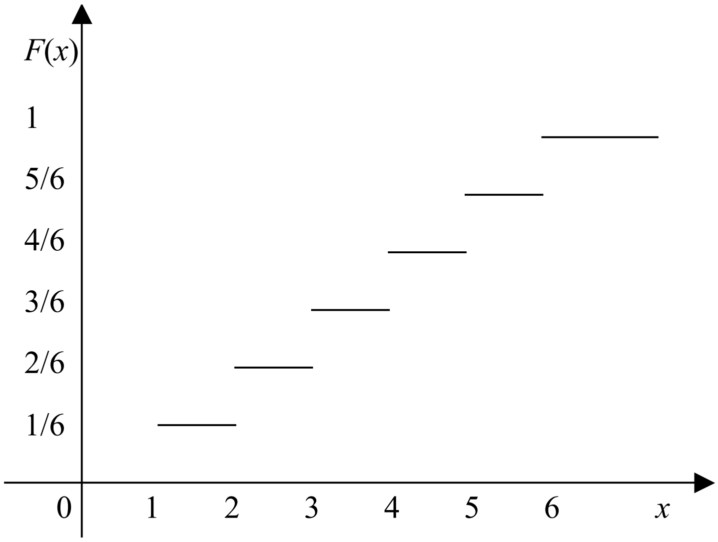
είναι μια τυχαία μεταβλητή. Η συνάρτηση κατανομής F της X υπολογίζεται ως εξής: Παρατηρούμε ότι

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\} = \begin{cases} \varnothing, & -\infty < x < 1 \\ \{1\}, & 1 \le x < 2 \\ \{1,2\}, & 2 \le x < 3 \\ \{1,2,3\}, & 3 \le x < 4 \\ \{1,2,3,4\}, & 4 \le x < 5 \\ (1,2,3,4,5\}, & 5 \le x < 6 \\ \Omega, & 6 \le x < \infty \end{cases}$$

και σύμφωνα με τον ορισμό 1.2,

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 1 \\ 1/6, & 1 \le x < 2 \\ 2/6, & 2 \le x < 3 \\ 3/6, & 3 \le x < 4 \\ 4/6, & 4 \le x < 5 \\ 5/6, & 5 \le x < 6 \\ 1, & 6 \le x < \infty \end{cases}.$$

Η γραφική παράσταση της $F(x)$ δίδεται στο Σχήμα 1.2. Παρατηρούμε ότι αυτή είναι σκαλωτή συνάρτηση με άλματα στα σημεία $x = 1,2,3,4,5,6$ μεγέθους 1/6 το καθ' ένα.



Σχήμα 1.2. Η συνάρτηση κατανομής $F(x)$

Παράδειγμα 1.3. Ας θεωρήσουμε μία τυχαία μεταβλητή X με τιμές x στο διάστημα $[0,1]$ και ας υποθέσουμε ότι η συνολική πιθανότητα $P(0 \le X \le 1) = 1$ κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα $[0,1]$ (κατά το ανάλογο της ομοιόμορφης κατανομής της μάζας μιας ράβδου με άκρα τα σημεία 0 και 1). Σύμφωνα με την υπόθεση αυτή η πιθανότητα η X να βρίσκεται στο διάστημα $(x_1, x_2]$ με $0 \le x_1 \le x_2 \le 1$ είναι ανάλογη του μήκους του: $P(x_1 < X \le x_2) = c(x_2 - x_1)$, όπου η c είναι η σταθερή αναλογίας. Επιπλέον έχουμε $P(-\infty < X < 0) = 0$, $P(1 < X < \infty) = 0$.

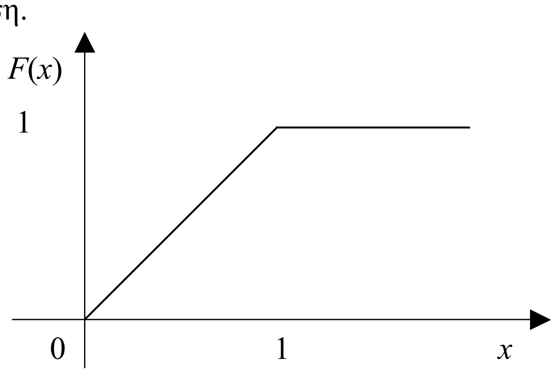
Η σταθερή c υπολογίζεται αν θέσουμε $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$, οπότε

$$P(0 < X \le 1) = c$$

και επειδή $P(0 < X \le 1) = 1$ είναι $c = 1$. Η συνάρτηση κατανομής F της X είναι τότε η

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ x, & 0 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x < \infty. \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της $F(x)$ δίδεται στο Σχήμα 1.3. Παρατηρούμε ότι αυτή είναι μια συνεχής συνάρτηση.



Σχήμα 1.3. Η συνάρτηση κατανομής $F(x)$

2. ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

Η μελέτη πολλών σημαντικών εννοιών που συνδέονται με τις τυχαίες μεταβλητές διευκολύνεται με το διαχωρισμό των δύο βασικών κατηγοριών: των διακριτών και των συνεχών τυχαίων μεταβλητών. Σχετικά θέτουμε τους ακόλουθους ορισμούς.

Ορισμός 2.1. *Μία τυχαία μεταβλητή X καλείται διακριτή (ή απαριθμητή) αν παίρνει, με πιθανότητα* 1*, αριθμήσιμο (πεπερασμένο ή αριθμησίμως άπειρο) σύνολο τιμών* $R_X = \{x_0, x_1, ..., x_\nu, ...\}$*. Η συνάρτηση f η οποία σε κάθε σημείο* x_κ*,* $\kappa = 0,1,...$*, εκχωρεί την πιθανότητά του*

$$f(x_\kappa) = P(X = x_\kappa) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_\kappa\}),\ \kappa = 0,1,..., \tag{2.1}$$

καλείται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ή απλώς συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X.

Στις περιπτώσεις που υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης η συνάρτηση πυκνότητας της τ.μ. X συμβολίζεται με f_X και η τιμή της στο x_κ με $f_X(x_\kappa)$. Σημειώνουμε ότι, χρησιμοποιώντας την παράσταση $R_X = \{x_0\} + \{x_1\} + \cdots + \{x_\nu\} + \cdots$, η συνθήκη $P(X \in R_X)$ δύναται να γραφεί στη μορφή

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} P(X = x_\kappa) = 1.$$

Επίσης η συνάρτηση πιθανότητας, όπως προκύπτει άμεσα από τον ορισμό της, είναι μη αρνητική

$$f(x_\kappa) \geq 0,\ \kappa = 0,1,... \text{ και } f(x) = 0,\ x \notin R_X \tag{2.2}$$

και

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} f(x_\kappa) = 1. \tag{2.3}$$

Στην περίπτωση που το σύνολο των τιμών της τυχαίας μεταβλητής X είναι πεπερασμένο, $R_X = \{x_0, x_1, ..., x_\nu\}$, η σειρά (2.3) γίνεται ένα πεπερασμένο άθροισμα

$$\sum_{\kappa=0}^{\nu} f(x_\kappa) = 1.$$

Η συνάρτηση πιθανότητας $f(x_\kappa) = P(X = x_\kappa)$, $\kappa = 0,1,...$ μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής συνδέεται με τη συνάρτηση κατανομής αυτής $F(x) = P(X \leq x)$, $-\infty < x < \infty$. Συγκεκριμένα, στη μερική περίπτωση που $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$, ισχύουν οι σχέσεις

$$F(x) = \sum_{\kappa=0}^{r} f(x_\kappa),\ x_r \leq x < x_{r+1},\ r = 0,1,..., \tag{2.4}$$

με $F(x) = 0$ για $-\infty < x < x_0$ και

$$f(x_\kappa) = F(x_\kappa) - F(x_{\kappa-1}),\ \kappa = 1,2,... \tag{2.5}$$

με $f(x_0) = F(x_0)$. Γενικότερα ισχύει η σχέση

$$F(x) = \sum_{x_\kappa \leq x} f(x_\kappa),\ -\infty < x < \infty, \tag{2.6}$$

όπου η άθροιση εκτείνεται σε όλα τα x_κ τα οποία είναι μικρότερα ή ίσα του x.

Ορισμός 2.2. *Μία τυχαία μεταβλητή X καλείται συνεχής αν υπάρχει μη αρνητική συνάρτηση,*

$$f(x) \geq 0, \; -\infty < x < \infty, \tag{2.7}$$

με

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1, \tag{2.8}$$

τέτοια ώστε για κάθε πραγματικούς αριθμούς α και β με $\alpha < \beta$ *να ισχύει*

$$P(\alpha < X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx. \tag{2.9}$$

Η $f(x)$ *καλείται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ή απλώς συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής X.*

Άμεση συνέπεια των ορισμών της συνάρτησης κατανομής $F(x)$ και της συνάρτησης πυκνότητας $f(x)$ μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X είναι η σχέση

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \; -\infty < x < \infty. \tag{2.10}$$

Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο σημείο x τότε παραγωγίζοντας τη σχέση αυτή παίρνουμε την

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x). \tag{2.11}$$

Σημειώνουμε ότι οι σχέσεις (2.10) και (2.11) είναι οι αντίστοιχες των (2.4) και (2.5) για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές. Η συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$, σε αντίθεση με τη συνάρτηση πιθανότητας, δεν παριστάνει την πιθανότητα κάποιου ενδεχομένου. Η πιθανότητα $P(X = x_0) = 0$ και επομένως η $f(x_0)$ δεν παριστάνει βέβαια αυτή την πιθανότητα. Μόνον όταν η συνάρτηση αυτή ολοκληρώνεται μεταξύ δύο σημείων, όπως στην (2.9), δίδει κάποια πιθανότητα. Κατά προσέγγιση για μικρό $h > 0$ έχουμε

$$P(x < X \leq x + h) \cong f(x)h.$$

Παράδειγμα 2.1. Ας επανέλθουμε στο τυχαίο πείραμα, του παραδείγματος 1.1, των δύο διαδοχικών ρίψεων ενός συνήθους κύβου. Ο αριθμός X των εμφανίσεων της όψης γράμματα είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή εφ' όσον το σύνολο των τιμών της $R_X = \{0, 1, 2\}$ είναι διακριτό (απαριθμητό). Η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X υπολογίζεται ως εξής:

$$f(0) = P(X = 0) = P[(\kappa, \kappa)] = \frac{1}{4},$$

$$f(1) = P(X = 1) = P[(\gamma, \kappa), (\kappa, \gamma)] = \frac{1}{2},$$

$$f(2) = P(X = 2) = P[(\gamma, \gamma)] = \frac{1}{4}.$$

Σημειώνουμε ότι

$$\sum_{x=0}^{2} f(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1,$$

όπως απαιτείται από τον ορισμό μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής.

Παράδειγμα 2.2. Ας θεωρήσουμε μια τυχαία μεταβλητή X με τιμές x στο διάστημα $[0,1]$ και ας υποθέσουμε ότι η συνολική πιθανότητα κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα αυτό (βλ. Παράδειγμα 1.3). Να προσδιορισθεί η συνάρτηση πυκνότητας της X.

Η συνάρτηση κατανομής της X έχει υπολογισθεί στο Παράδειγμα 1.3 και είναι η

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ x, & 0 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x < \infty. \end{cases}$$

Παραγωγίζοντας αυτή συνάγουμε, σύμφωνα με τη (2.10), τη συνάρτηση πυκνότητας της τ.μ. X

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x < 0 \text{ ή } x > 1. \end{cases}$$

Παράδειγμα 2.3. Έστω ότι ο χρόνος απορρόφησης ενός φαρμάκου μετρούμενος σε ώρες είναι μία συνεχής τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \frac{2(\theta - x)}{\theta^2},\ 0 \le x \le \theta,$$

όπου $\theta > 0$ είναι παράμετρος της κατανομής. Να υπολογισθούν η συνάρτηση κατανομής $F(x)$, $-\infty < x < \infty$, και οι πιθανότητες $P(\alpha < X \le \beta)$, $P(X > \alpha)$ με $\alpha < \beta \le \theta$.

Η συνάρτηση κατανομής για $0 \le x \le \theta$ είναι

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt = \frac{2}{\theta^2}\int_{0}^{x} (\theta - t)dt = -\left[\frac{(\theta - t)^2}{\theta^2}\right]_0^x$$

$$= 1 - \frac{(\theta - x)^2}{\theta^2}.$$

Επίσης $F(x) = 0$, $-\infty < x < 0$ και $F(x) = 1$, $\theta \le x < \infty$.

Χρησιμοποιώντας την (1.2) και τη συνάρτηση κατανομής οι ζητούμενες πιθανότητες υπολογίζονται ως

$$P(\alpha < X \le \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \frac{(\theta - \alpha)^2 - (\theta - \beta)^2}{\theta^2}$$

και

$$P(X > \alpha) = 1 - P(X \le \alpha) = 1 - F(\alpha) = \frac{(\theta - \alpha)^2}{\theta^2}.$$

3. ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Στην πιθανοθεωρητική μελέτη ενός στοχαστικού (τυχαίου) πειράματος (ή φαινομένου), όπως επίσης και στη στατιστική συμπερασματολογία, αναφύεται συχνά η ανάγκη προσδιορισμού της κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής $Y = g(X)$, η οποία είναι συνάρτηση μιας άλλης τυχαίας μεταβλητής X με γνωστή κατανομή. Συνήθως το ενδιαφέρον αφορά την περίπτωση που τόσο η τυχαία μεταβλητή X όσο και η τυχαία μεταβλητή Y είναι συνεχείς. Στην περίπτωση αυτή ο προσδιορισμός της κατανομής της Y επιτυγχάνεται ευκολότερα με την εύρεση, αρχικά, της συνάρτησης κατανομής. Η συνάρτηση πυκνότητας της Y προσδιορίζεται με παραγώγιση της συνάρτησης κατανομής. Η έκφραση της συνάρτησης κατανομής της τυχαίας μεταβλητής $Y = g(X)$,

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P[g(X) \leq y],$$

συναρτήσει της συνάρτησης κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X απαιτεί τον προσδιορισμό του συνόλου $\{x : g(x) \leq y\}$. Τούτο επιτυγχάνεται εύκολα αν ο μετασχηματισμός $y = g(x)$ είναι ένα προς ένα από το σύνολο R_X των τιμών της X επί του συνόλου R_Y των τιμών της Y και μονότονος. Τότε υπάρχει ο αντίστροφος μετασχηματισμός $x = g^{-1}(y)$ και είναι μονότονος. Στην περίπτωση αυτή η σχέση $g(x) \leq y$ είναι ισοδύναμη με τη σχέση $x \leq g^{-1}(y)$, αν η $y = g(x)$ είναι αύξουσα και με τη σχέση $x \geq g^{-1}(y)$, αν η $y = g(x)$ είναι φθίνουσα και επομένως

$$F_Y(y) = P[X \leq g^{-1}(y)] = F_X(g^{-1}(y)),$$

αν η $y = g(x)$ είναι αύξουσα και

$$F_Y(y) = P[X \geq g^{-1}(y)] = 1 - P[X < g^{-1}(y)] = 1 - F_X(g^{-1}(y)),$$

αν η $y = g(x)$ είναι φθίνουσα. Αν η αντίστροφη συνάρτηση $x = g^{-1}(y)$ παραγωγίζεται και η παράγωγος $dg^{-1}(y)/dy$ είναι συνεχής για κάθε y στο R_Y, τότε παραγωγίζοντας την ανωτέρω έκφραση της συνάρτησης κατανομής $F_Y(y)$, σύμφωνα με τον κανόνα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης , συνάγουμε τη σχέση

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\frac{dg^{-1}(y)}{dy},$$

αν η $y = g(x)$ είναι αύξουσα και τη σχέση

$$f_Y(y) = -f_X(g^{-1}(y))\frac{dg^{-1}(y)}{dy},$$

αν η $y = g(x)$ είναι φθίνουσα. Επομένως

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|.$$

Τα αποτελέσματα αυτά συνοψίζονται στο ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα 3.1. *Έστω ότι η X είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας $f_X(x)$, $x \in R_X$. Αν ο μετασχηματισμός $Y = g(X)$ είναι ένα προς ένα από το σύνολο R_X επί του συνόλου $R_Y = g(R_X)$ και υπάρχει η παράγωγος $dg^{-1}(y)/dy$ και είναι συνεχής για κάθε y στο R_Y, τότε η τυχαία μεταβλητή $Y = g(X)$ είναι συνεχής με συνάρτηση πυκνότητας*

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|, \ y \in R_Y. \tag{3.1}$$

Στη μερική περίπτωση που $y = g(x) = \alpha x + \beta$, όπου α και β πραγματικές σταθερές με $\alpha \neq 0$, ο αντίστροφος μετασχηματισμός είναι ο $x = g^{-1}(y) = (y-\beta)/\alpha$ και $dg^{-1}(y)/dy = 1/\alpha$. Έτσι συνάγουμε από το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 3.1. *Έστω ότι η X είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας $f_X(x)$, $x \in R_X$. Τότε η $Y = \alpha X + \beta$, $\alpha \neq 0$, είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας*

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)\frac{1}{|\alpha|}, \ y \in R_Y. \tag{3.2}$$

Παράδειγμα 3.1. Ας θεωρήσουμε μια συνεχή τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \ -\infty < x < \infty,$$

όπου $-\infty < \mu < \infty$ και $0 < \sigma < \infty$ είναι παράμετροι της κατανομής. Σημειώνουμε ότι αυτή είναι η συνάρτηση πυκνότητας της κανονικής κατανομής. Να προσδιορισθεί η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής $Y = \alpha X + \beta$.

Χρησιμοποιώντας την (3.2) παίρνουμε

$$f_Y(y) = \frac{1}{|\alpha|\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(y-\alpha\mu-\beta)^2}{2(\alpha\sigma)^2}\right], \ -\infty < y < \infty.$$

Θέτοντας

$$\mu_Y = \alpha\mu + \beta, \ \sigma_Y = |\alpha|\sigma,$$

η πυκνότητα αυτή γράφεται στη μορφή

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(y-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right], \ -\infty < y < \infty,$$

η οποία είναι η συνάρτηση πυκνότητας της κανονικής κατανομής με παραμέτρους $\mu_Y = \alpha\mu + \beta$ και $\sigma_Y = |\alpha|\sigma$.

Ειδικά για $\alpha = 1/\sigma$ και $\beta = -\mu/\sigma$, οπότε $\mu_Y = 0$ και $\sigma_Y = 1$, η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής

$$Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

παίρνει τη μορφή

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2},\ -\infty < y < \infty,$$

η οποία είναι η γνωστή ως τυποποιημένη κανονική πυκνότητα.

Η περίπτωση που ο μετασχηματισμός $y = g(x)$ δεν είναι ένα προς ένα από το σύνολο R_X των τιμών της X επί του συνόλου R_Y των τιμών της Y δύναται να αντιμετωπισθεί με τον προσδιορισμό του συνόλου $\{x : g(x) \le y\}$ και την εύρεση, αρχικά, της συνάρτησης κατανομής της τυχαίας μεταβλητής Y. Μια τέτοια περίπτωση εξετάζεται στα επόμενα παραδείγματα.

Παράδειγμα 3.2. Ας θεωρήσουμε μια συνεχή τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας $f_X(x)$, $x \in R_X$ και συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$, $x \in R$. (α) Να προσδιορισθεί η συνάρτηση πυκνότητας $f_Y(y)$, $y \in R_Y$ της τυχαίας μεταβλητής $Y = X^2$. (β) Στη μερική περίπτωση που η τυχαία μεταβλητή X έχει την τυποποιημένη συνάρτηση πυκνότητας

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2},\ -\infty < x < \infty,$$

να προσδιορισθεί η συνάρτηση πυκνότητας $f_Y(y)$, $y \in R_Y$ της $Y = X^2$.

(α) Η τυχαία μεταβλητή Y δεν μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές και έτσι $F_Y(y) = 0$ για $-\infty < y \le 0$, ενώ

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y) = P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) = F_Y(\sqrt{y}) - F_Y(-\sqrt{y})$$

για $0 < y < \infty$. Παραγωγίζοντας τη συνάρτηση αυτή, σύμφωνα με τον κανόνα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης, συνάγουμε τη συνάρτηση πυκνότητας

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \{f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})\},\ 0 < y < \infty.$$

(β) Παρατηρούμε ότι η $f_X(x)$ είναι άρτια συνάρτηση, $f_X(-x) = f_X(x)$, και έτσι η ανωτέρω έκφραση της $f_Y(y)$ συναρτήσει της $f_X(x)$ γίνεται

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}),\ 0 < y < \infty.$$

Επομένως

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2},\ 0 < y < \infty.$$

Παράδειγμα 3.3. Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας $f_X(x)$, $x \in R_X$ και συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$, $x \in R$. (α) Να προσδιορισθεί η συνάρτηση πυκνότητας $f_Y(y)$, $y \in R_Y$ της τυχαίας μεταβλητής $Y = |X|$. (β) Αν

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2},\ -\infty < x < \infty,$$

να προσδιορισθεί η συνάρτηση πυκνότητας $f_Y(y)$, $y \in R_Y$ της $Y = |X|$.

(α) Η τυχαία μεταβλητή Y δεν μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές και έτσι $F_Y(y) = 0$ για $-\infty < y < 0$, ενώ

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(|X| \le y) = P(-y \le X \le y) = F_Y(y) - F_Y(-y),$$

για $0 \le y < \infty$. Παραγωγίζοντας τη συνάρτηση αυτή, σύμφωνα με τον κανόνα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης, συνάγουμε τη συνάρτηση πυκνότητας

$$f_Y(y) = f_X(y) + f_X(-y),\ 0 \le y < \infty.$$

(β) Παρατηρούμε ότι η $f_X(x)$ είναι άρτια συνάρτηση, $f_X(-x) = f_X(x)$, και έτσι η ανωτέρω έκφραση της $f_Y(y)$ συναρτήσει της $f_X(x)$ γίνεται

$$f_Y(y) = 2f_X(y),\ 0 \le y < \infty.$$

Επομένως

$$f_Y(y) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{-y/2},\ 0 \le y < \infty.$$

4. ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΣΠΟΡΑ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Η κατανομή πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής, όπως έχουμε ήδη παρατηρήσει, δύναται να εκφρασθεί είτε από τη συνάρτηση κατανομής είτε από τη συνάρτηση πιθανότητας ή πυκνότητας αυτής. Μια περιληπτική περιγραφή της πιθανοθεωρητικής συμπεριφοράς μιας τυχαίας μεταβλητής παρέχεται από τη θεώρηση και μελέτη μερικών βασικών παραμέτρων της κατανομής της. Η μέση τιμή που αποτελεί μέτρο θέσης ή κεντρικής τάσης και η διασπορά που αποτελεί μέτρο συγκεντρωτικότητας ή μεταβλητότητας είναι οι πιο βασικές παράμετροι της κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής. Στο εδάφιο αυτό εισάγονται διαδοχικά και μελετώνται η μέση τιμή και η διασπορά μιας τυχαίας μεταβλητής.

Η μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής αποτελεί γενίκευση του αριθμητικού μέσου μιας ακολουθίας τιμών. Συγκεκριμένα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 4.1. (α) *Έστω ότι η X είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας $f(x_\kappa) = P(X = x_\kappa)$, $\kappa = 0,1,\ldots$. Τότε η μέση τιμή αυτής, συμβολιζόμενη με $E(X)$ ή μ_X ή απλώς μ αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, ορίζεται από τη σχέση*

$$\mu \equiv E(X) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} x_\kappa f(x_\kappa). \tag{4.1}$$

(β) *Έστω ότι η X είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$, $-\infty < x < \infty$. Τότε η μέση τιμή αυτής ορίζεται από τη σχέση*

$$\mu \equiv E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \tag{4.2}$$

Αξίζει να σημειωθεί η αναλογία μεταξύ της μέσης τιμής μιας τυχαίας μεταβλητής και του κέντρου βάρους μάζας στη μηχανική. Αν μια μονάδα μάζας κατανέμεται στα σημεία $x_0, x_1, \ldots$ μιας ευθείας και $f(x_\kappa)$ είναι η μάζα στο σημείο x_κ, $\kappa = 0,1,\ldots$ τότε η (4.1) παριστάνει το κέντρο βάρους (περί την αρχή). Κατά τον ίδιο τρόπο αν η μονάδα μάζας έχει συνεχή κατανομή σε μια ευθεία και αν η $f(x)$ παριστάνει την πυκνότητα μάζας στο x τότε η (4.2) ορίζει και πάλιν το κέντρο βάρους. Με την έννοια αυτή η μέση τιμή θεωρείται ως το κέντρο της κατανομής πιθανότητας.

Παράδειγμα 4.1. Έστω X ο αριθμός της επάνω έδρας στο τυχαίο πείραμα της ρίψης ενός συνήθους κύβου (βλ. Παράδειγμα 1.2). Να υπολογισθεί η μέση τιμή $E(X)$.

Η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X δίδεται από την

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{6},\ x = 1,2,...,6\,.$$

Επομένως, σύμφωνα με τον ορισμό 4.1 (α),

$$\mu = E(X) = \frac{1}{6}\sum_{x=1}^{6} x = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}\,.$$

Σημειώνουμε ότι, όπως φαίνεται και από το απλό αυτό παράδειγμα, η μέση τιμή μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής δεν είναι κατ' ανάγκη μια από τις δυνατές τιμές της.

Παράδειγμα 4.2. Ας θεωρήσουμε μια συνεχή τυχαία μεταβλητή X η οποία κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα $[-\theta, \theta]$. Να υπολογισθεί η μέση τιμή $E(X)$.

Η συνάρτηση πυκνότητας της τ.μ. X δίδεται από την

$$f(x) = \frac{1}{2\theta},\ -\theta \le x \le \theta\,.$$

Επομένως, σύμφωνα με τον ορισμό 4.1 (β),

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{2\theta}\int_{-\theta}^{\theta} x dx = \left[\frac{x^2}{4\theta}\right]_{-\theta}^{\theta} = 0\,.$$

Σημειώνουμε ότι η μέση τιμή της X είναι $E(X) = 0$, ανεξάρτητη της παραμέτρου θ. Στην κατανομή αυτή η παράμετρος θ καθορίζει τη συγκεντρωτικότητα των τιμών της X περί τη μέση τιμή. Όσο πιο μικρό είναι το θ τόσο πιο μεγάλη είναι η συγκεντρωτικότητα.

Ας θεωρήσουμε μια τυχαία μεταβλητή X, διακριτή με συνάρτηση πιθανότητας $f_X(x_\kappa) = P(X = x_\kappa)$, $\kappa = 0,1,...$ ή συνεχή με συνάρτηση πυκνότητας $f_X(x)$, $-\infty < x < \infty$. Σημειώνουμε ότι μια συνάρτηση αυτής $Y = g(X)$ είναι επίσης τυχαία μεταβλητή και η συνάρτηση πιθανότητας $f_Y(y_r) = P(Y = y_r)$, $r = 0,1,...$ ή πυκνότητας $f_Y(y)$, $-\infty < y < \infty$ αυτής προσδιορίζεαι μέσω της συνάρτησης πιθανότητας $f_X(x_\kappa)$, $\kappa = 0,1,...$ ή πυκνότητας $f_X(x)$ της τυχαίας μεταβλητής X. Είναι επομένως ενδιαφέρον και έχει έννοια ο υπολογισμός της μέσης τιμής της $Y = g(X)$. Ο υπολογισμός αυτός δύναται να γίνει, σύμφωνα με τον ορισμό 4.1, αφού πρώτα υπολογισθεί η συνάρτηση πιθανότητας ή πυκνότητας της Y. Τούτο δεν είναι αναγκαίο να γίνεται σε κάθε μερική περίπτωση. Σχετικά ισχύει η ακόλουθη έκφραση

$$E(Y) \equiv E[g(X)] = \sum_{\kappa=0}^{\infty} g(x_\kappa) f_X(x_\kappa)\,, \tag{4.3}$$

αν η X είναι διακριτή και η έκφραση

$$E(Y) \equiv E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx\,, \tag{4.4}$$

αν η X είναι συνεχής.

Η διασπορά μιας τυχαίας μεταβλητής αποτελεί ένα μέτρο της συγκεντρωτικότητας ή μεταβλητότητας της κατανομής της. Η ύπαρξη κατανομών οι οποίες έχουν την ίδια μέση τιμή και των οποίων οι τιμές είναι περισσότερο ή λιγότερο διασπαρμένες (βλ. Παράδειγμα 4.2) καθιστά αναγκαία την εισαγωγή ενός τέτοιου μέτρου. Η διασπορά, η οποία δύναται να χρησιμοποιηθεί για τη διάκριση των κατανομών αυτών, είναι η μέση τιμή του τετραγώνου της απόκλισης $g(X) = (X - \mu)^2$, της τυχαίας μεταβλητής X από τη μέση της τιμή $\mu = E(X)$ και υπολογίζεται με τη χρησιμοποίηση των (4.3) και (4.4) ανάλογα με το αν X είναι διακριτή ή συνεχής τυχαία μεταβλητή.

Ορισμός 4.2. *Έστω X μια τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή $\mu = E(X)$. Τότε η διασπορά ή διακύμανση της X, συμβολιζόμενη με $V(X)$ ή σ_X^2 ή απλώς σ^2 αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, ορίζεται από τη σχέση*

$$\sigma^2 \equiv V(X) = E[(X-\mu)^2]. \tag{4.5}$$

Η θετική τετραγωνική ρίζα της διασποράς $V(X)$,

$$\sigma \equiv \sigma_X = \sqrt{V(X)} \tag{4.6}$$

καλείται τυπική απόκλιση της τυχαίας μεταβλητής X.

Σύμφωνα με τις (4.3) και (4.4), αν η X είναι μια διακριτή τ.μ. με συνάρτηση πιθανότητας $f(x_\kappa) = P(X = x_\kappa)$, $\kappa = 0,1,\ldots$, τότε

$$V(X) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} (x_\kappa - \mu)^2 f(x_\kappa)$$

και αν η X είναι μια συνεχής τ.μ. με συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$, τότε

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx.$$

Σημειώνουμε ότι η αναλογία που υπάρχει μεταξύ της μέσης τιμής μιας τυχαίας μεταβλητής και του κέντρου βάρους μάζας στη μηχανική επεκτείνεται και μεταξύ της διασποράς και της ροπής αδρανείας περί το κέντρο βάρους.

Στο επόμενο θεώρημα αποδεικνύουμε βασικές ιδιότητες της μέσης τιμής και της διασποράς.

Θεώρημα 4.1. *Έστω X μια τυχαία μεταβλητή και α, β σταθερές. Τότε*

$$E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta, \tag{4.7}$$

$$E[g(X) + h(X)] = E[g(X)] + E[h(X)], \tag{4.8}$$

και

$$V(\alpha X + \beta) = \alpha^2 V(X), \tag{4.9}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2. \tag{4.10}$$

Απόδειξη. Έστω ότι η X είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας $f(x_\kappa) = P(X = x_\kappa)$, $\kappa = 0,1,\ldots$. Τότε σύμφωνα με την (4.3) παίρνουμε

$$E(\alpha X + \beta) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} (\alpha x_\kappa + \beta) f(x_\kappa) = \alpha \sum_{\kappa=0}^{\infty} x_\kappa f(x_\kappa) + \beta \sum_{\kappa=0}^{\infty} f(x_\kappa) = \alpha E(X) + \beta$$

και

$$E[g(X)+h(X)] = \sum_{\kappa=0}^{\infty}[g(x_\kappa)+h(x_\kappa)]f(x_\kappa) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} g(x_\kappa)f(x_\kappa) + \sum_{\kappa=0}^{\infty} h(x_\kappa)f(x_\kappa)$$

$$= E[g(X)] + E[h(X)].$$

Στην περίπτωση που η X είναι συνεχής, χρησιμοποιώντας την (4.4), συνάγουμε κατά τον ίδιο τρόπο τις (4.7) και (4.8).

Σύμφωνα με τον ορισμό 4.2 της διασποράς και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.7) και (4.8) συνάγουμε τη σχέση

$$V(\alpha X+\beta) = E([\alpha X+\beta) - E(\alpha X+\beta)]^2 = E([\alpha X+\beta-\alpha E(X)-\beta]^2)$$

$$= E(\alpha^2[X-E(X)]^2) = \alpha^2 E[(X-\mu)^2] = \alpha^2 V(X).$$

Αναπτύσσοντας το τετράγωνο $(X-\mu)^2$, της απόκλισης της τ.μ. X από τη μέση τιμή $\mu = E(X)$, κατά το διώνυμο του Νεύτωνα , και χρησιμοποιώντας τις (4.7) και (4.8) παίρνουμε

$$V(X) = E[(X-\mu)^2] = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = E(X^2) - E(2\mu X - \mu^2)$$

$$= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Παρατήρηση 4.1. *Τυποποιημένη τυχαία μεταβλητή.* Αν X είναι μια τυχαία μεταβλητή με $E(X)=\mu$ και $V(X)=\sigma^2$ τότε η τυχαία μεταβλητή

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \tag{4.11}$$

έχει μέση τιμή, σύμφωνα με την (4.7),

$$E(Z) = E[(X-\mu)/\sigma] = [E(X)-\mu]/\sigma = 0$$

και διασπορά, σύμφωνα με την (4.9),

$$V(Z) = V[(X-\mu)/\sigma] = V(X)/\sigma^2 = 1.$$

Η τυχαία μεταβλητή Z που ορίζεται από την (4.11) καλείται τυποποιημένη τυχαία μεταβλητή που αντιστοιχεί στη X.

Παρατήρηση 4.2. *Παραγοντικές ροπές.* Η έκφραση (4.10) διευκολύνει τον υπολογισμό της διασποράς μιας τυχαίας μεταβλητής X, ιδιαίτερα στην περίπτωση που αυτή είναι συνεχής. Αν η τυχαία μεταβλητή X είναι διακριτή τότε η διασπορά αυτής υπολογίζεται ευκολότερα με τη χρησιμοποίηση της *παραγοντικής ροπής* δεύτερης τάξης,

$$\mu_{(2)} = E[(X)_2],$$

όπου $(X)_2 = X(X-1)$. Συγκεκριμένα έχουμε

$$V(X) = E[(X)_2] + E(X) - [E(X)]^2. \tag{4.12}$$

Η σχέση αυτή συνάγεται άμεσα από την (4.10) και την

$$\mu_{(2)} = E[(X)_2] = E[X(X-1)] = E(X^2 - X) = E(X^2) - E(X).$$

Παράδειγμα 4.3. Έστω X ο αριθμός της επάνω έδρας στο τυχαίο πείραμα της ρίψης ενός συνήθους κύβου. Να υπολογισθεί η διασπορά $V(X)$.

Η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X δίδεται από την

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{6},\ x = 1, 2, ..., 6 .$$

Επομένως, σύμφωνα με την (4.3)

$$E(X^2) = \frac{1}{6}\sum_{x=1}^{6} x^2 = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6} .$$

Χρησιμοποιώντας την (4.10) και το ότι (βλ. Παράδειγμα 4.1)

$$E(X) = \frac{7}{2}$$

παίρνουμε

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12} .$$

Παράδειγμα 4.4. Ας θεωρήσουμε μια ακολουθία ρίψεων ενός συνήθους νομίσματος η οποία τερματίζεται όταν εμφανισθεί για πρώτη φορά η όψη γράμματα. Έστω X ο αριθμός των απαιτουμένων προς τούτο ρίψεων. Η συνάρτηση πιθανότητας της διακριτής τυχαίας μεταβλητής X δίδεται από την

$$f(x) = P(X = x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x,\ x = 1, 2, ...$$

Να υπολογισθούν ο αναμενόμενος αριθμός των ρίψεων $E(X)$ και η διασπορά του αριθμού των ρίψεων $V(X)$.

Παρατηρούμε ότι παραγωγίζοντας διαδοχικά τη γεωμετρική σειρά

$$\sum_{x=0}^{\infty} t^x = (1-t)^{-1},\ -1 < t < 1$$

συνάγουμε τις σχέσεις

$$\sum_{x=1}^{\infty} x t^{x-1} = (1-t)^{-2},\ \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1) t^{x-2} = 2(1-t)^{-3},\ -1 < t < 1 .$$

Επομένως

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x f(x) = \frac{1}{2}\sum_{x=1}^{\infty} x \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-2} = 2 ,$$

$$E[(X)_2] = \sum_{x=2}^{\infty} (x)_2 f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-3} = 4$$

και σύμφωνα με την (4.12)

$$V(X) = E[(X)_2] + E(X) - [E(X)]^2 = 4 + 2 - 2^2 = 2 .$$

Παράδειγμα 4.5. Να υπολογισθεί η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής X με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \frac{1}{2\theta},\ -\theta \le x \le \theta .$$

Χρησιμοποιώντας την (4.4) παίρνουμε

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \frac{1}{2\theta}\int_{-\theta}^{\theta} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{6\theta}\right]_{-\theta}^{\theta} = \frac{\theta^2}{3}$$

και σύμφωνα με την (4.10) και επειδή (βλ.Παράδειγμα 4.2)

$$E(X) = 0$$

συμπεραίνουμε ότι

$$V(X) = E(X^2) = \frac{\theta^2}{3}.$$

Παράδειγμα 4.6. Έστω ότι ο χρόνος απορρόφησης ενός φαρμάκου μετρούμενος σε ώρες είναι μια συνεχής μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \frac{2(\theta - x)}{\theta^2},\ 0 \le x \le \theta,$$

όπου $\theta > 0$ είναι παράμετρος της κατανομής (βλ. Παράδειγμα 2.3). Να υπολογισθούν ο μέσος χρόνος απορρόφησης του φαρμάκου $E(X)$ και η διασπορά του χρόνου απορρόφησης $V(X)$.

Η μέση τιμή $E(X)$, σύμφωνα με τον ορισμό 4.1, δίδεται από την

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{2}{\theta^2}\int_{0}^{\theta} x(\theta - x)dx = \left[\frac{x^2}{\theta} - \frac{2x^3}{3\theta^2}\right]_0^{\theta} = \frac{\theta}{3}.$$

Επίσης χρησιμοποιώντας την (4.4), παίρνουμε

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \frac{2}{\theta^2}\int_{0}^{\theta} x^2(\theta - x)dx = \left[\frac{2x^3}{3\theta} - \frac{x^4}{2\theta^2}\right]_0^{\theta} = \frac{\theta^2}{6}$$

και έτσι

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{\theta^2}{6} - \frac{\theta^2}{9} = \frac{\theta^2}{18}.$$

Παράδειγμα 4.7. Έστω ότι η ταχύτητα X του ανέμου (σε χιλιόμετρα ανά ώρα) είναι μια συνεχής ομοιόμορφη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \frac{1}{\theta},\ 0 \le x \le \theta.$$

Η πίεση Y (ατμόσφαιρες) που ασκείται στην επιφάνεια των πτερύγων ενός αεροσκάφους δίδεται από τη σχέση $Y = aX^2$. Να υπολογισθούν η μέση πίεση $E(X)$ και η διασπορά της πίεσης $V(X)$.

Χρησιμοποιώντας την (4.4) παίρνουμε

$$E(Y) = \alpha E(X^2) = \alpha\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \frac{\alpha}{\theta}\int_{0}^{\theta} x^2 dx = \frac{\alpha}{\theta}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\theta} = \frac{\alpha\theta^2}{3}$$

και

$$E(Y^2) = \alpha^2 E(X^4) = \alpha^2\int_{-\infty}^{\infty} x^4 f(x)dx = \frac{\alpha^2}{\theta}\int_{-\infty}^{\infty} x^4 dx = \frac{\alpha^2}{\theta}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^{\theta} = \frac{\alpha^2\theta^4}{5},$$

οπότε

$$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{\alpha^2\theta^4}{5} - \frac{\alpha^2\theta^4}{9} = \frac{4\alpha^2\theta^4}{45}.$$

5. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0, \\ \frac{1}{5}, & 0 \le x < 1, \\ \frac{13}{25}, & 1 \le x < 2, \\ \frac{19}{25}, & 2 \le x < 3, \\ \frac{23}{25}, & 3 \le x < 4, \\ 1, & 4 \le x < \infty. \end{cases}$$

Να υπολογισθούν (α) οι πιθανότητες $P(1 < X \le 3)$, $P(X > 2)$ και (β) η συνάρτηση πιθανότητας $f(x) = P(X = x)$, $x = 0,1,2,3,4$.

2. Έστω ότι ο χρόνος αναμονής X σε λεπτά σε συγκεκριμένο σταθμό του υπογείου σιδηροδρόμου είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0, \\ \frac{x}{2}, & 0 \le x < 1, \\ \frac{1}{2}, & 1 \le x < 2, \\ \frac{x}{4}, & 2 \le x < 4, \\ 1, & 4 \le x < \infty. \end{cases}$$

Να υπολογισθούν (α) οι πιθανότητες $P(X \le 2)$, $P(1 < X \le 3)$, $P(X > 3)$ και (β) η συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$.

3. Ας θεωρήσουμε το τυχαίο πείραμα της ρίψης δύο διακεκριμένων κύβων και έστω X η τυχαία μεταβλητή η οποία στο σημείο (i, j) του δειγματικού χώρου αντιστοιχεί το σημείο $i + j - 2$, $i = 1,2,...,6$, $j = 1,2,...,6$. Να υπολογισθούν η συνάρτηση πιθανότητας $f_X(x) = P(X = x)$, $x = 0,1,...,10$ και η συνάρτηση κατανομής $F_X(x) = P(X \le x)$, $-\infty < x < \infty$ της τυχαίας μεταβλητής X.

4. (Συνέχεια). Έστω Y η απόλυτη τιμή της διαφοράς των εμφανιζομένων εδρών. Να υπολογισθούν η συνάρτηση πιθανότητας $f_Y(y) = P(Y = y)$, $y = 0,1,...,5$ και η συνάρτηση κατανομής $F_Y(y) = P(Y \le y)$, $-\infty < y < \infty$ της τυχαίας μεταβλητής Y.

5. Έστω ότι η X είναι μια μη αρνητική ακέραιη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} 4p^3, & x = 0, \\ 5p(1-3p), & x = 1, \\ 2p(p+3)-1, & x = 2, \\ 0, & x \neq 0,1,2. \end{cases}$$

Να υπολογισθούν οι πιθανότητες $p,\ P(X \leq 1)$ και $P(0 < X \leq 2)$.

6. Έστω ότι η X είναι μια μη αρνητική ακέραιη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = c\binom{x-1}{k-1},\ x = \kappa, \kappa+1, \ldots, \nu .$$

Χρησιμοποιώντας το τρίγωνο του Pascal,

$$\binom{x}{\kappa} = \binom{x-1}{\kappa} + \binom{x-1}{\kappa-1}$$

υπολογίστε τη σταθερή c και τη συνάρτηση κατανομής $F(x)$, $-\infty < x < \infty$.

7. Έστω ότι η X είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = c - |x|,\ |x| \leq c ,$$

όπου $c > 0$. Να υπολογισθούν (α) η σταθερή c, (β) η συνάρτηση κατανομής $F(x)$, $-\infty < x < \infty$ και (γ) η πιθανότητα $P(|X| \leq 3/4)$.

8. Η ποσότητα βενζίνης X (σε χιλιόλιτρα) που πωλεί πρατήριο βενζίνης σε μια μέρα είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} cx, & 0 \leq x < 1, \\ c, & 1 \leq x < 2, \\ c(3-x), & 2 \leq x < 3, \\ 0, & 3 \leq x < \infty. \end{cases}$$

Να υπολογισθούν (α) η σταθερή c και (β) οι πιθανότητες $P(X \leq 3/4)$, $P(1/2 < X \leq 5/2)$, $P(X > 9/4)$ και (γ) η μέση τιμή $E(X)$ και η διασπορά $V(X)$.

9. Η εκατοστιαία περιεκτικότητα σε οινόπνευμα ενός παρασκευάσματος είναι μια συνεχής μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = cx^3(1-x),\ 0 < x < 1 .$$

(α) Να υπολογισθούν η σταθερή c και οι πιθανότητες $p_1 = P(0 < X \leq 1/3)$ και $p_2 = P(1/3 < X \leq 2/3)$. (β) Αν το παρασκεύασμα πωλείται προς $4j$ ευρώ το λίτρο όταν η περιεκτικότητα σε οινόπνευμα είναι $(j-1)/3 < X \leq j/3$, ενώ κοστίζει $3j$ ευρώ, $j = 1,2,3$, να υπολογισθεί το μέσο κέρδος ανά λίτρο και η διασπορά του κέρδους.

10. Έστω ότι ετήσιο εισόδημα μισθωτού *X*, μετρούμενο σε χιλιάδες ευρώ, είναι μία συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_X(x) = \frac{4 \cdot 10^4}{x^5}, \; 10 \le x < \infty .$$

Να υπολογισθούν (α) η συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$, $-\infty < x < \infty$ και (β) το μέσο εισόδημα $E(X)$ και η διασπορά του εισοδήματος $V(X)$.

11. (*Συνέχεια*). Ο συντελεστής φορολογίας (ποσοστό) *Y* αυξάνεται κλιμακωτά συναρτήσει του εισοδήματος *X*. Έστω ότι $Y = g(X)$, όπου

$$g(x) = \begin{cases} 0, & 10 \le x < 20, \\ \frac{1}{10}, & 20 \le x < 40, \\ \frac{2}{10}, & 20 \le x < 60, \\ \frac{3}{10}, & 60 \le x < \infty. \end{cases}$$

Να υπολογισθούν (α) η συνάρτηση πιθανότητας $f_Y(y)$, $y = 0,\ 1/10,\ 2/10,\ 3/10$ και (β) ο μέσος συντελεστής φορολογίας $E(Y)$.

12. (*Συνέχεια*). Ο φόρος εισοδήματος *Z* εκφράζεται συναρτήσει του εισοδήματος *X* από την $Z = h(X)$, όπου

$$h(x) = \begin{cases} 0, & 10 \le x < 20, \\ \frac{x-20}{10}, & 20 \le x < 40, \\ \frac{2(x-30)}{10}, & 20 \le x < 60, \\ \frac{3(x-40)}{10}, & 60 \le x < \infty. \end{cases}$$

Να υπολογισθούν (α) η συνάρτηση κατανομής $F_Z(z)$, $-\infty < z < \infty$ (β) η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_z(z)$, $-\infty < z < \infty$, και (γ) ο μέσος φόρος εισοδήματος $E(Z)$.

13. Ο χρόνος πέψης *X*, μετρούμενος σε ώρες, μιας μονάδας τροφής είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \theta^2 x e^{-\theta x}, \; 0 < x < \infty, \; (0 < \theta < \infty).$$

Να υπολογισθούν (α) η συνάρτηση κατανομής $F(x)$, $-\infty < x < \infty$, (β) η πιθανότητα όπως για την πέψη μιας μονάδας τροφής απαιτηθεί περισσότερο από μια ώρα και (γ) ο μέσος χρόνος πέψης μιας μονάδας τροφής $E(X)$.

14. Έστω ότι *X* μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = \frac{1}{2\nu}, \; x = \pm 1, \pm 2, ..., \pm \nu .$$

Να υπολογισθούν η μέση τιμή $E(X)$ και η διασπορά $V(X)$.

15. Έστω ότι X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_X(x) = 1/3\,,\ -1 \le x \le 2\,.$$

Να προσδιορισθεί η συνάρτηση πυκνότητας $f_Y(y)$ της $Y = |X|$.

16. Η διακύμανση ηλεκτρικού ρεύματος μπορεί να θεωρηθεί ως μια συνεχής τυχαία μεταβλητή X η οποία κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα $[10, 12]$. Αν το ρεύμα αυτό διέρχεται από αντίσταση 2 ohm, να προσδιορισθεί η συνάρτηση πυκνότητας της τάσης $Y = 2X^2$.