ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

ΜΕΡΟΣ 1$^{\text{Ο}}$ ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Στο εργαστήριο αυτό θα ασχοληθούμε με την προσομοίωση της ρίψεως ενός δίκαιου νομίσματος. Το μοντέλο το οποίο θα πρέπει να πραγματοποιήσουμε θα πρέπει να υπολογίζει την πιθανότητα σε Ν επαναλήψεις του πειράματος (ρίψεις) να έχουμε Κ επιτυχίες. Με επιτυχία από εδώ και στο εξής θα αναφερόμαστε στο ενδεχόμενο το αποτέλεσμα του πειράματος να είναι Κορώνα .

Όπως είναι γνωστό από την θεωρία η κατανομή που περιγράφει αυτή την πιθανότητα είναι η διωνυμική και πιο συγκεκριμένα

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$$, οπού p+q=1

και n οι επαναλήψεις του πειράματος ,κ οι επιτυχίες , p η πιθανότητα επιτυχούς αποτελέσματος σε ένα πείραμα και q η πιθανότητα αποτυχίας. Δεδομένου ότι το νόμισμα θεωρείται δίκαιο ποία είναι η τιμή για τα p και q ;

Το πρώτο πράγμα που θα πρέπει να κάνουμε είναι να φτιάξουμε την διωνυμική κατανομή . Η διωνυμική κατανομή θα κατασκευαστεί με την βοήθεια της ομοιόμορφης κατανομής. Η ομοιόμορφη κατανομή σε αντίθεση με την δυωνυμική είναι μια συνεχής κατανομή και ορίζεται ως εξής

$$p(x)=\frac{1}{b-a}, a<x<b$$
$$p(x)=0$$, αλλού

Εάν το α=0 και το β=1 τότε

$$p(x)=1, 0<x<1$$
$$p(x)=0$$, αλλού

Τότε λέμε ότι η p(x) είναι η ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα (0 1) και η τυχαία μεταβλητή $X \sim p(x)=U(0,1)$ δηλαδή το x μπορεί ισοπίθανα να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο διάστημα (0 1)

Έτσι η πιθανότητα το x να πάρει μια τιμή μεταξύ 0 και 0.60 είναι ίση με 0.6. Πράγματι

$$P(0<x<0.60)=\int_0^{0.60} p(x)dx=\int_0^{0.60} 1*dx=0.6$$

Έτσι εάν θεωρήσουμε επιτυχία το ενδεχόμενο το x να παίρνει τιμή μικρότερη του 0.60 με πιθανότητα p =0.6 και αποτυχία να παίρνει τιμή μεγαλύτερη του 0.60 με πιθανότητα q=1-p=0.4 έχουμε ανάγει την γέννηση ενός τυχαίου αριθμού στο διάστημα (0 1) στο πρόβλημα που έχουμε προς επίλυση δηλαδή την επαναλαμβανόμενη ρίψη ενός νομίσματος.

Το matlab μας παρέχει έτοιμη την συνάρτηση rand η οποία παράγει τυχαία αριθμούς ομοιόμορφα κατανεμημένους στο διάστημα (0 1)

Έτσι ο ψευδοκώδικας θα έχει την μορφή :

```
For  i =1 to N            % N = number of  coin tosses
        Generate a number u ~ U (0,1)
        If   u <= p       % p = success probability
                Success =1
                k=k+1            %   k = number of successes
        Else
                Success =0
```

Στο Matlab για να κατασκευάσουμε ένα ιστόγραμμα χρησιμοποιούμε την συνάρτηση hist(x,k) πού x το διάνυσμα των τυχαίων αριθμών και κ ο αριθμός των υποδιαστήματων του ιστογράμματος

ΖΗΤΟΥΜΕΝΑ

1α) Υπολογίστε θεωρητικά την πιθανότητα να έχουμε σε 10 πειράματα 5 επιτυχίες (δηλ. σε 10 ρίψεις του δικαίου νομίσματος να έχουμε 5 φορές Κορώνα.), τη μέση τιμή καθώς και τη διασπορά της κατανομής .

1β) Υπολογίστε θεωρητικά την πιθανότητα να έχουμε σε 10 πειράματα από 4 έως και 6 επιτυχίες.

1γ) Φτιάξτε το πρόγραμμα και τρέξτε την προσομοίωση μια φορά για ένα δίκαιο νόμισμα και μία φορά για ένα νόμισμα οπού η πιθανότητα να έρθει κορώνα (επιτυχία)είναι 0.8.Τι παρατηρείται ;

1δ) Τρέξτε την προσομοίωση για το προηγούμενο πείραμα 100 φορές αποθηκεύοντας κάθε φόρα τον αριθμό των επιτυχιών. Σχεδιάστε το ιστόγραμμα (το ιστόγραμμα κατασκευάζεται στο matlab με την εντολή hist (x,k) οπού x θα είναι το διάνυσμα των επιτυχιών και κ ο αριθμός των υποδιαστήματων του ιστογράμματος)
Στο τέλος βγάλτε ένα μέσο όρο επιτυχιών. Είναι αναμενόμενος ;Τι παρατηρείται σε σχέση με το ερώτημα 1γ;

1ε) Τρέξτε την προσομοίωση 100 φορές για το δίκαιο νόμισμα με παραμέτρους n= 100 και p=0.5. Σχεδιάστε το ιστόγραμμα. Τι διαφορά υπάρχει σε σχέση με το ερώτημα 1δ ; Βγάλτε ένα μέσο όρο επιτυχιών. Είναι αναμενόμενος ; Βρείτε προσεγγιστικά (από τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων) την πιθανότητα σε 100 ρίψεις δίκαιου ζαριού να έχουμε από 40 εώς 60 επιτυχίες.

ΜΕΡΟΣ 2^{O}
ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΚΑΙ ΚΕΝΤΡΙΚΟ ΟΡΙΑΚΟ ΘΕΏΡΗΜΑ

Όπως είναι γνωστό από την θεωρία η κανονική κατανομή ορίζεται από

$$f(x) = N(m,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}$$

όπου m η μέση τιμή της κατανομής και σ^2 η διασπορά.
Έτσι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής ή αλλιώς η πιθανότητα η τυχαία μας μεταβλητή X να είναι μικρότερη κάποιας συγκεκριμένης τιμής x ισούται με το ολοκλήρωμα κάτω από την καμπύλη της f(x)

$$P(X < x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

και

$$P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

όπου τα Φ(b) και Φ(α) βρίσκονται απευθείας από έτοιμους πίνακες.

Όταν m =0 σ =1 τότε λέμε ότι ακολουθούμε την τυποποιημένη κανονική κατανομή
Το Matlab παρέχει έτοιμη συνάρτηση την randn για να παράγει τυχαίους αριθμούς που ακολουθούν την τυποποιημένη κανονική κατανομή. Ο τρόπος για να παραχθούν τυχαίοι αριθμοί που ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέση τιμή m και διασπορά σ είναι

x = m + σ * randn ;

Σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα η διωνυμική κατανομή μπορεί για αρκετά μεγάλο n (θεωρητικά όταν $n \to \infty$, πρακτικά για n > 50) να προσεγγιστεί αρκετά ικανοποιητικά από την κανονική με παραμέτρους m = np και $\sigma = \sqrt{npq}$.

Δηλαδή έχουμε

$$Bin(n,p) \Leftrightarrow N(np, \sqrt{npq}) \quad , n \to \infty$$

Πιο συγκεκριμένα για μια τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί την διωνυμική κατανομή ($X \sim Bin(n,p)$) ισχύει

$$P(a < X < b) = \Phi(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}) - \Phi(\frac{a-np}{\sqrt{npq}})$$

όπου Φ(.) η αθροιστική συνάρτηση κατανομής που δίδεται απευθείας από έτοιμους πίνακες

ΖΗΤΟΥΜΕΝΑ

2α) Υπολογίστε θεωρητικά την πιθανότητα σε 100 ρίψεις δίκαιου ζαριού να έχουμε από 45 εώς 55 επιτυχίες .

Υπολογίστε θεωρητικά την πιθανότητα σε 100 ρίψεις δίκαιου ζαριού να έχουμε από 40 εώς 60 επιτυχίες και συγκρίνεται με το 1ε

Τέλος υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της κατανομής και συγκρίνεται με το 1ε .

2β) Προσομοιώστε 100 φορές το πείραμα της ρίψης ζαριού με παραμέτρους n= 100 , p =0.5 και σημειώστε σε πόσες προσομοιώσεις είχαμε από 45 ως 55 επιτυχίες. Συμφωνούν τα αποτελέσματα της προσομοίωσης σας με το θεωρητικό υπολογισμό του ερωτήματος 2α ;

2γ) Γεννήστε 1000 τυχαίους αριθμούς που ακολουθούν την τυποποιημένη κανονική κατανομή N(0,1) και κατασκευάστε το ιστόγραμμα.

Γεννήστε 1000 τυχαίους αριθμούς που ακολουθούν την κανονική κατανομή N(3,2) και κατασκευάστε το ιστόγραμμα.

Γεννήστε 1000 τυχαίους αριθμούς που ακολουθούν την κανονική κατανομή N(3,20) και κατασκευάστε το ιστόγραμμα.

2δ) Γεννήστε 1000 τυχαίους αριθμούς που ακολουθούν την κανονική κατανομή N(np, $\sqrt{npq}$) όπου n,p,q οι παράμετροι του ζητήματος 1ε. Κατασκευάστε το ιστόγραμμα και συγκρίνεται με το ιστόγραμμα της 1ε.

ΜΕΡΟΣ 3^{O}
ΓΕΝΝΗΣΗ ΛΟΙΠΩΝ ΤΥΧΑΙΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON

Στο προηγούμενο μέρος είδαμε πώς μέσω ομοιόμορφα κατανεμημένων αριθμών μπορέσαμε και γεννήσαμε τυχαίους αριθμούς κατανεμημένους σύμφωνα με την διωνυμική κατανομή. Σε αυτό το μέρος θα δούμε την γενική μεθοδολογία καθώς και την εφαρμογή της στην γέννηση τυχαίων αριθμών κατανεμημένων σύμφωνα με τις υπόλοιπες κατανομές .
Έστω Y μια τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανεμημένη στο (0 1) και F η ομοιόμορφη συνάρτηση κατανομής. Λέμε ότι μια τυχαία μεταβλητή X είναι κατανεμημένη σύμφωνα με την F αν

$Y = F\ (X)$ ή $X = F^{-1}(Y)$

Έτσι για παράδειγμα αν η F η συνάρτηση Weibull δηλαδή

$$Y = F\ (X) = 1 - \exp(-\frac{X-b}{a})^{c}$$

τότε μια τυχαία μεταβλητή X θα είναι κατανεμημένη κατά Weibull αν

$$X = F^{-1}(Y) = b + a * (-\ln(1-Y))^{1/c}$$

Έτσι ο κώδικας Matlab που παράγει 100 τυχαίους αριθμούς που ακολουθούν την Weibull κατανομή είναι

$$X = b + a * (-\log(1 - rand(100,1))).\hat{}\ \frac{1}{c}$$

Υπενθυμίζεται ότι το σύμβολο .^ είναι ύψωση της δύναμης σε κάθε στοιχείο του διανύσματος ξεχωριστά.

Ομοίως προκύπτει ένας τυχαίος αριθμός που ακολουθεί την

εκθετική κατανομή με συνάρτηση κατανομής

f(x)= $\frac{1}{\lambda}\exp(-\frac{x}{\lambda})$

να είναι x = -log(rand(1,m)./ lambda);

και τη γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση κατανομής

$p(k) = P(X = k) = q^{k-1} p$, p+q=1

να είναι x = floor (-log (rand(1,m))./(-log(1-p)))

ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON

Η κατανομή αυτή αφορά ενδεχόμενα που μπορούν να εκφραστούν με μια διακριτή τυχαία μεταβλητή που παίρνει τις τιμές 0 , 1, 2 , ..Για παράδειγμα οι αριθμοί 0 ,1 ,2 μπορεί να εκφράζουν τους πελάτες που θα μπουν σε ένα κατάστημα σε 1 ώρα.
Η συνάρτηση πιθανότητας της Χ δίνεται από

$$p(k) = P(X = k) = \frac{\exp(-\lambda) * \lambda^k}{k!} \quad , \lambda>0,\ k= 1,2,\ldots$$

Η μέση τιμή της κατανομής είναι Ε(Χ)= λ.

Επομένως για την κατανομή Poisson μπορούμε να πούμε ότι αναφέρεται σε μια διαδικασία παραγωγής τυχαίων εμφανίσεων κατά διαστήματα χρόνου

Ο ψευδοκώδικας για την προσομοίωση μιας διαδικασίας Poisson θα είναι

```
 For  i=1:N,
        generate u ~U(0,1);
        p=p*u;
        while  p>=exp(-lamda)
                 generate u ~U(0,1)
                  p=p*u;
                  event=event+1;
        end
keep number of events at time slice i;
end
```

ΖΗΤΟΥΜΕΝΑ

3α) Γεννήστε από 1000 τυχαίους αριθμούς που ακολουθούν τις κατανομές Weibull Εκθετική και Γεωμετρική και κατασκευάστε τα αντίστοιχα ιστογράμματα Συγκρίνεται τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων σας με τις θεωρητικές μέσες τιμές των κατανομών

3β) Σε ένα router θεωρητικά παραλαμβάνουμε κατά μέσο όρο 2 πακέτα/sec.Σας ζητείται να προσομοιώσετε 10 φορές την κίνηση που θα έχουμε στον router σε ένα χρονικό διάστημα των 100 sec. Σχεδιάστε με την εντολή bar τα αποτελέσματα μιας προσομοίωσης Από το αποτέλεσμα των προσομοιώσεων επαληθεύεται η αρχική μας εκτίμηση για τον μέσο ορό πακέτων/sec ;

3γ)Επαναλάβετε το ερώτημα 3β όταν θεωρητικά παραλαμβάνουμε κατά μέσο όρο 10 πακέτα/sec