ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 3

ΣΥΝΕΛΙΞΗ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

Για κάθε γραμμικό και χρονικά αναλλοίωτο σύστημα συνεχούς χρόνου ισχύει ότι η απόκριση y(t) του όταν αυτό διεγείρεται από είσοδο x(t) δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = x(t) * h(t)}$$

Η συνάρτηση h(t), η οποία είναι η έξοδος του συστήματος όταν αυτό διεγείρεται από τη συνάρτηση δ(t) καλείται **κρουστική απόκριση** (impulse response) του συστήματος.

Η άσκηση αυτή αφορά στη χρήση του Matlab για τον υπολογισμό της συνέλιξης y δοσμένων των σημάτων x, h.

Γραφικός προσδιορισμός της συνέλιξης

Για να υπολογίσουμε την έξοδο ενός ΓΧΑ συστήματος με τη βοήθεια του ολοκληρώματος της συνέλιξης για κάθε χρονική στιγμή t ***ακολουθούμε τα βήματα***:

1^0 Βήμα: **Ανάκλαση:** Αναστρέφουμε ένα από τα δύο σήματα π.χ την κρουστική απόκριση, δηλαδή προσδιορίζουμε την h(-τ). *Θα μπορούσαμε να είχαμε αναστρέψει το x(t)*

2^0 Βήμα: **Χρονική Μετατόπιση**: Μετατοπίζουμε την h(-τ) κατά t και έτσι προσδιορίζουμε την h(t-τ).

3^0 Βήμα: **Πολλαπλασιασμός:** Προσδιορίζουμε το γινόμενο x(τ) h(t-τ).

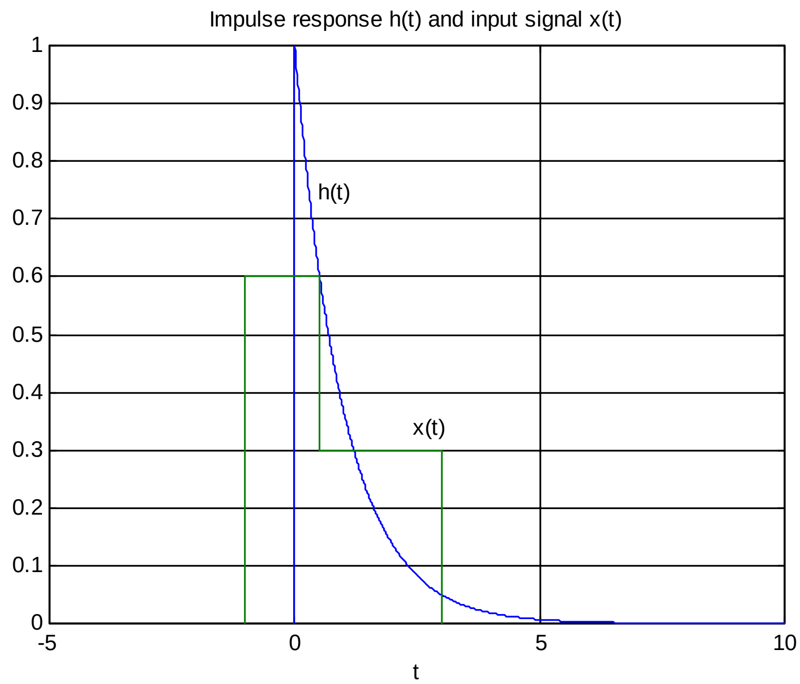
4^0 Βήμα: **<u>Ολοκλήρωση ή Εμβαδομέτρηση</u>**: Ολοκληρώνουμε το γινόμενο αυτό .

5^0 Βήμα:**<u>Επανάληψη</u>**: Τα βήματα αυτά επαναλαμβάνονται για τις διάφορες τιμές του χρόνου.

<u>Ας δούμε ένα παράδειγμα</u>. Έστω το ΓΧΑ (Γραμμικό χρονικά αμετάβλητο) σύστημα με κρουστική απόκριση **h(t) = exp(-t)u(t)**.

Έστω η είσοδος **x(t)** που έχει την τιμή **0.6 για -1 < t < 0.5**, την τιμή **0.3 για 0.5 < t < 3**, και είναι **0 αλλού**.

Τα σήματα x και h φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



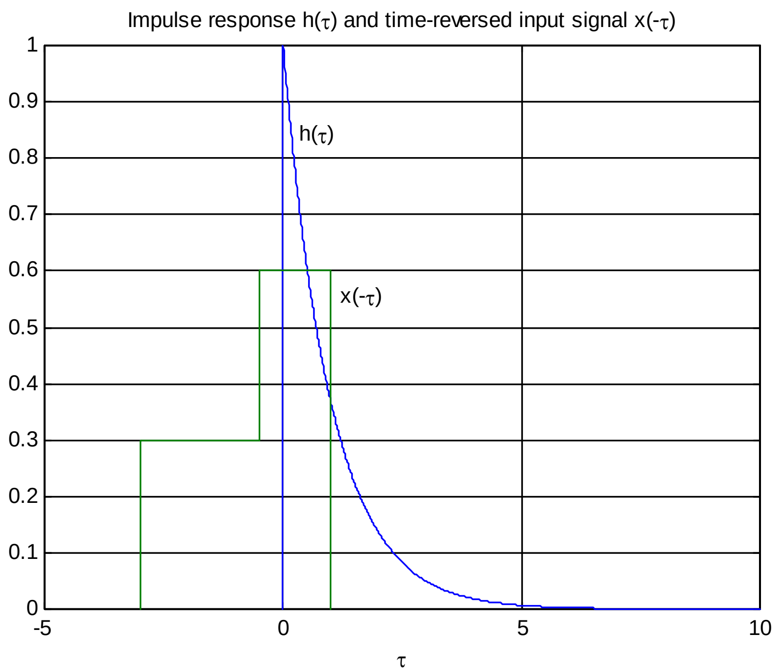
Τα παραπάνω διαγράμματα προέκυψαν στο Matlab πληκτρολογώντας την εξής σειρά εντολών:

```
» th1=linspace(0,10,1001);

» h1=exp(-th1);
```

```
» h=[0 h1];

» th=[0 th1];

» tx=[-1 -1 0.5 0.5 3 3];

» x=[0 0.6 0.6 0.3 0.3 0];

» plot(th,h,tx,x)

» grid

» xlabel('t')

» axis([-5 10 0 1]) % Αλλαγή των ορίων των αξόνων

» title('Impulse response h(t) and input signal x(t)')

» gtext('x(t)')

» gtext('h(t)')
```

Οι εντολές **gtext** χρησιμοποιήθηκαν για να βάλουν τις ετικέττες x(t), h(t) δίπλα στις αντίστοιχες καμπύλες.

Για να ξαναδούμε τα σήματα του παραδείγματος με έστω εδώ το x αντεστραμμένο:



Παλαμίδης Αλέξανδρος
Μαράς Ανδρέας

Η ουσιαστική αλλαγή στην προηγούμενη σειρά των εντολών ήταν ότι η γραφική παράσταση έγινε με αντιστροφή του διανύσματος `tx` του χρόνου για το x, δηλαδή

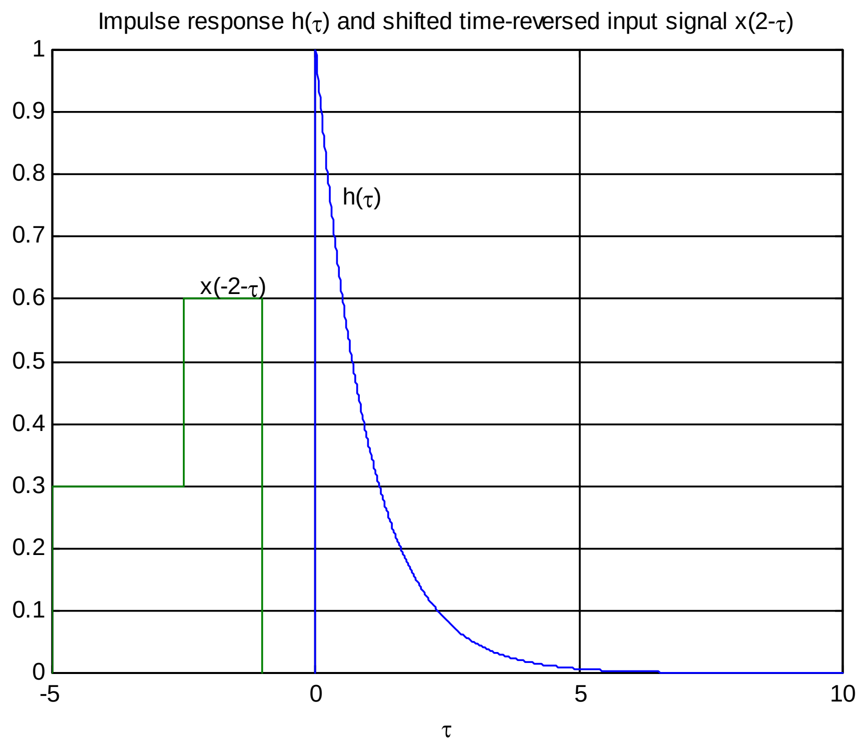
```
» plot(th,h,-tx,x)
```

Ας περάσουμε τώρα στον υπολογισμό της συνέλιξης.

- Προφανώς, επειδή η τιμή του x δεν είναι σταθερή παρά μόνο κατά τμήματα, το ολοκλήρωμα του γινομένου **h(τ)x(t-τ)** θα πρέπει να υπολογιστεί ξεχωριστά για τα διάφορα τμήματα.

Στο παραπάνω σχήμα το t=0. **Για t<-1, δεν υπάρχει επικάλυψη** ανάμεσα στα γραφήματα των h(τ) και x(t-τ), συνεπώς το y(t)=0.

Ας το δούμε αυτό σ' ένα σχήμα για t=-2:



Πώς προέκυψε το παραπάνω;

Απλά προσθέτοντας το –2 στο διάνυσμα –tx:

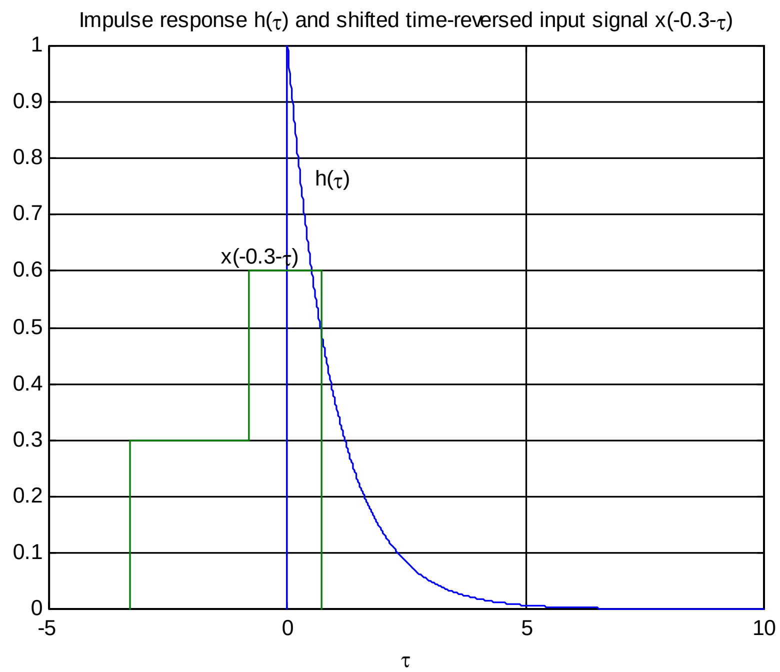
```
>> plot(th,h,-2-tx,x)
```

- **Αν t>-1, τότε υπάρχει μη-μηδενική επικάλυψη των δύο σημάτων**. **Για –1<t<0.5** υπάρχει επικάλυψη με το h(τ) μόνο του τμήματος του x με τιμή 0.6.
- Στο διάστημα αυτό, δηλαδή –1<t<0.5, το ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως εξής

$$y(t) = \int_{-1}^{t} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-1}^{t} 0.6 e^{-(t-\tau)} d\tau = 0.6 e^{-t} \int_{-1}^{t} e^{\tau} d\tau =$$

$$= 0.6 e^{-t} (e^{t} - e^{-1}) = 0.6 (1 - e^{-1-t}) \quad , -1 < t < 0.5$$

Στο ακόλουθο σχήμα φαίνεται η κατάσταση για t=-0.3.



Ξανά, η εντολή γραφικής παράστασης ήταν

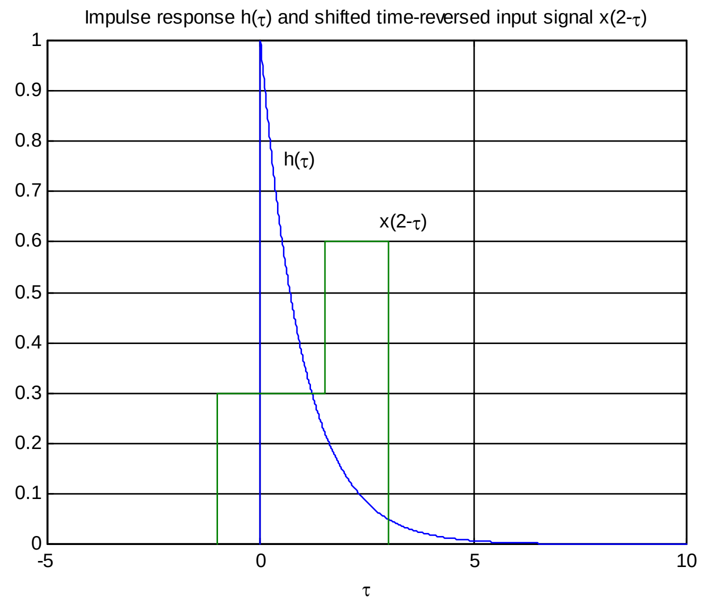
```
>> plot(th,h,-0.3-tx,x)
```

- Η επόμενη περίπτωση είναι να επικαλύπτεται με το h(τ) ολόκληρο το κομμάτι του x με τιμή 0.6 ενώ το κομμάτι 0.3 να επικαλύπτεται μόνο μερικά. **Αυτό συμβαίνει για 0.5<t<3**, και φαίνεται στο παρακάτω σχήμα για την περίπτωση t=2.

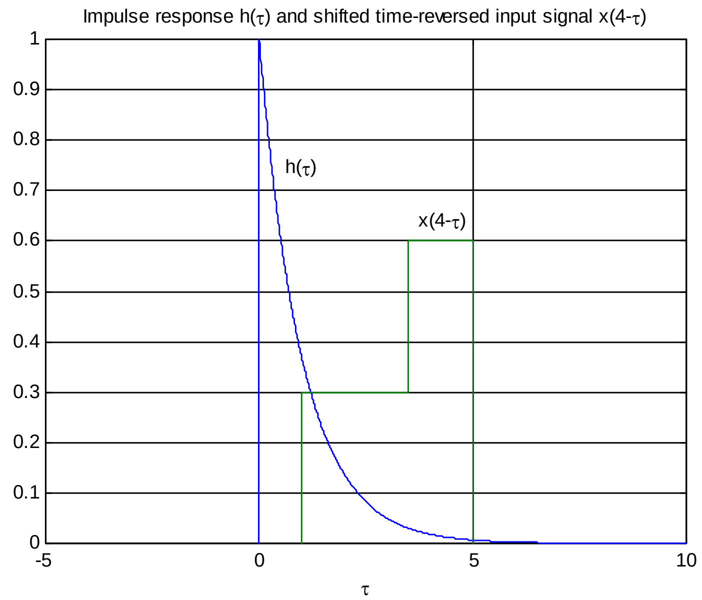
- Η τιμή του συνελικτικού ολοκληρώματος υπολογίζεται τότε ως εξής :

$$y(t)=\int_{-1}^{0.5}0.6e^{-(t-\tau)}d\tau+\int_{0.5}^{t}0.3e^{-(t-\tau)}d\tau=0.6e^{-t}\int_{-1}^{0.5}e^{\tau}d\tau+0.3e^{-t}\int_{0.5}^{t}e^{\tau}d\tau=$$

$$=0.6\,e^{-t}(e^{0.5}-e^{-1})+0.3\,e^{-t}(e^{t}-e^{0.5})=0.3\,e^{-t}(1+e^{0.5}-2e^{-1})\ ,0.5<t<3$$



- **Η τελευταία περίπτωση είναι να επικαλύπτονται πλήρως τα δύο σήματα, κάτι που συμβαίνει για t>3:**

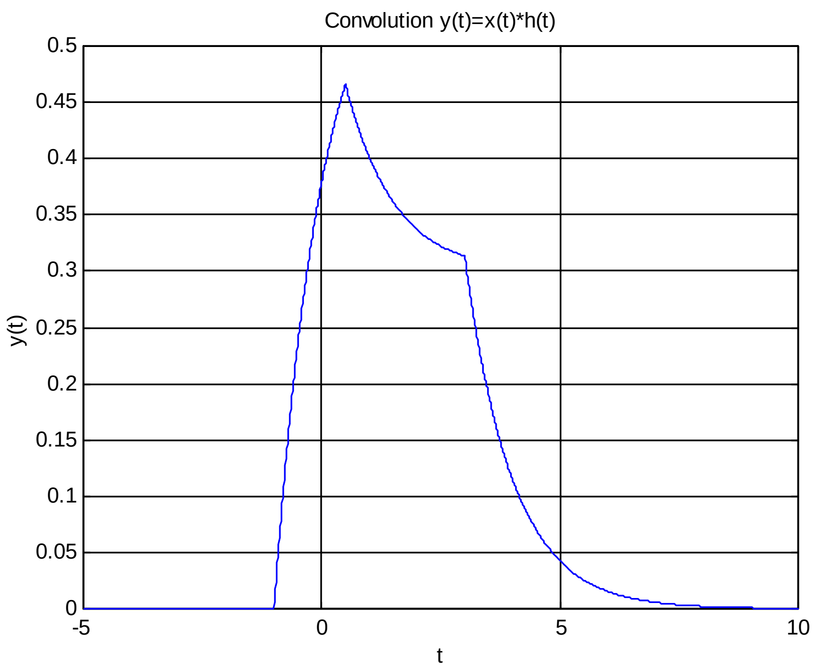


Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως εξής :

$$y(t)=\int_{-1}^{0.5}0.6e^{-(t-\tau)}d\tau+\int_{0.5}^{3}0.3e^{-(t-\tau)}d\tau=0.6e^{-t}\int_{-1}^{0.5}e^{\tau}d\tau+0.3e^{-t}\int_{0.5}^{3}e^{\tau}d\tau=$$

$$=0.6e^{-t}(e^{0.5}-e^{-1})+0.3e^{-t}(e^{3}-e^{0.5})=0.3\,e^{-t}(e^{0.5}-2e^{-1}+e^{3})\ ,t>3$$

- **Και να πώς μπορούμε να παραστήσουμε γραφικά το συνολικό αποτέλεσμα της συνέλιξης:**



- Το τελευταίο σχήμα προέκυψε πληκτρολογώντας

```
» ty1=[-1:0.01:0.5];

» y1=0.6*(1-exp(-ty1-1));

» ty2=[0.5:0.01:3];

» y2=0.3*(1+(exp(0.5)-2*exp(-1))*exp(-ty2));

» ty3=[3:0.01:10];
```

```
» y3=0.3*(exp(3)+exp(0.5)-2*exp(-1))*exp(-ty3);
» ty=[-5 ty1 ty2 ty3];
» y=[0 y1 y2 y3];
» plot(ty,y)
» grid
» xlabel('t')
» ylabel('y(t)')
» title('Convolution y(t)=x(t)*h(t)')
```

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στα παραπάνω διαθέταμε την αναλυτική περιγραφή των δύο συνελισσόμενων σημάτων και υπολογίσαμε τη συνέλιξή τους βρίσκοντας αναλυτικά το αντίστοιχο ολοκλήρωμα.

Ας δούμε τώρα πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις λειτουργίες του Matlab όχι μόνο για να κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις αλλά και για ν' αποφύγουμε τον αναλυτικό υπολογισμό του ολοκληρώματος.

Ευτυχώς το Matlab διαθέτει έτοιμη **function** για τον υπολογισμό του παραπάνω αθροίσματος, την **conv**.

Εδώ όμως πρέπει να προσέξουμε μια σημαντική λεπτομέρεια: Η conv «θεωρεί» ότι τα σήματα διακριτού χρόνου x, h είναι αιτιατά.[1] Έτσι, για να την εφαρμόσουμε στο παράδειγμά μας, θα πρέπει πρώτα να θεωρήσουμε ότι το x ολισθαίνει κατά 1 προς τα δεξιά ώστε να γίνει κι αυτό αιτιατό. Είναι πρόβλημα αυτό; Καθόλου, αφού το σύστημά μας είναι χρονικά αμετάβλητο. Θα ξέρουμε ότι και η έξοδος έχει υποστεί την ίδια ολίσθηση, άρα θα πρέπει να θυμηθούμε να την επαναφέρουμε στη θέση της.

Για το παράδειγμα των σημάτων που συζητήσαμε παραπάνω, η συνέλιξη μπορεί να υπολογιστεί με τις ακόλουθες εντολές:

» t1=[0:0.01:1.5]; % T=0.01

[1] Αυτό το σημείο θα γίνει πιο καθαρό όταν θα έχουμε μάθει τη συνέλιξη διακριτού χρόνου στο πεδίο χρόνου και στο πεδίο συχνότητας.

» t2=[1.5+0.01:0.01:4];

» t3=[4.01:0.01:10]; % Θεωρούμε τα σήματα στο διάστημα [0,10]

» x=[0.6*ones(size(t1)) 0.3*ones(size(t2)) zeros(size(t3))];

» h=exp(-[t1 t2 t3]);

» yc=conv(x,h)*0.01; % Προσέγγιση του ολοκληρώματος από άθροισμα

» plot([-1,-1:0.01:19],[0 yc]) % Ολισθαίνουμε κατά 1 προς τ'

% αριστερά, αλλάζοντας το διάστημα

% [0,20] στο [-1,19].

» axis([-5 10 0 0.5])

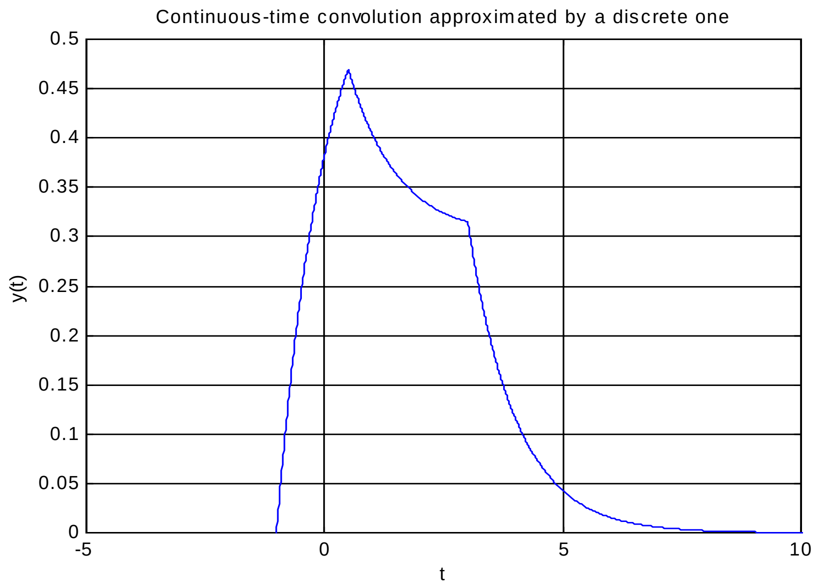
» grid

» xlabel('t')

» ylabel('y(t)')

» title('Continuous-time convolution approximated by a discrete one')

<u>Το αποτέλεσμα, που φαίνεται παρακάτω, είναι μια καλή προσέγγιση αυτού που βρήκαμε αναλυτικά:</u>



Παλαμίδης Αλέξανδρος
Μαράς Ανδρέας

Άσκηση:

Έστω γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα που έχει κρουστική απόκριση

$$h(t) = \begin{cases} 1-t & 0 \le t \le 1 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\dot{\upsilon} \end{cases}$$

όταν η είσοδος του είναι το σήμα:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 2 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\dot{\upsilon} \end{cases}$$

Υπολογίστε την απόκρισή του, όπως κάναμε στα παραπάνω, δηλαδή:

1. Αναλυτικά (κάνοντας και τη γραφική παράσταση των σημάτων x, h στα διάφορα στάδια του υπολογισμού του ολοκληρώματος), και
2. Προσεγγιστικά, με τη βοήθεια της συνέλιξης διακριτού χρόνου (**conv**).

Ακολουθεί η αναλυτική λύση της άσκησης με χρήση του συνελικτικού ολοκληρώματος

1. Παρατηρούμε ότι το γινόμενο h(t-τ) x(τ) είναι ίσο με μηδέν για κάθε τιμή του χρόνου t μικρότερη του μηδενός.

   Έτσι η έξοδος του συστήματος είναι

$$y(t) = 0, t < 0$$

2. Χρησιμοποιώντας τη σχέση της συνέλιξης η έξοδος του συστήματος δίνεται από τη σχέση (*προσπαθήστε να βγάλετε το παρακάτω αποτέλεσμα και μόνοι σας*):

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = t - \frac{t^2}{2}$$

όταν $0 \le t < 1$

3. Στην περίπτωση όπου η κατοπτρική μορφή της κρουστική απόκριση έχει μετατοπιστεί κατά $1 \le t < 2$ η έξοδος του συστήματος είναι ίση με

$$y(t) = \int_{t-1}^{t} 1 \cdot h(t-\tau)\, d\tau = \frac{1}{2}$$

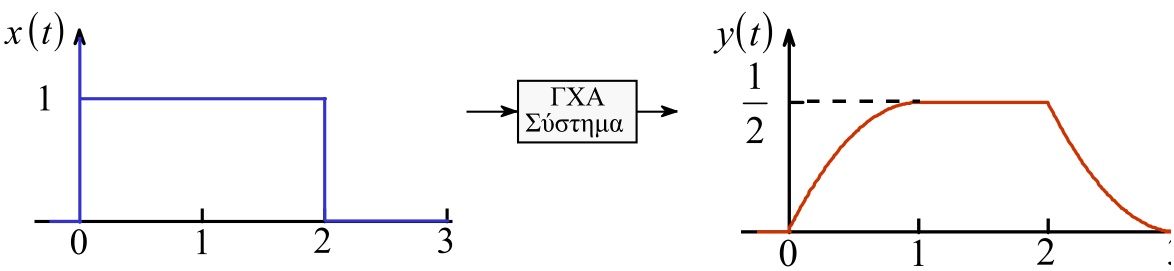
4. Στην περίπτωση όπου η κατοπτρική μορφή της κρουστική απόκριση έχει μετατοπιστεί κατά $2 \le t \le 3$. η έξοδος του συστήματος είναι ίση με

$$y(t) = \int_{t-1}^{2} 1 \cdot h(t-\tau)\, d\tau = \frac{1}{2}(3-t)^2$$

5. Τέλος το γινόμενο $h(t-\tau)\,x(\tau)$ είναι ίσο με μηδέν για κάθε τιμή του χρόνου t μεγαλύτερη ή ίση με 3.

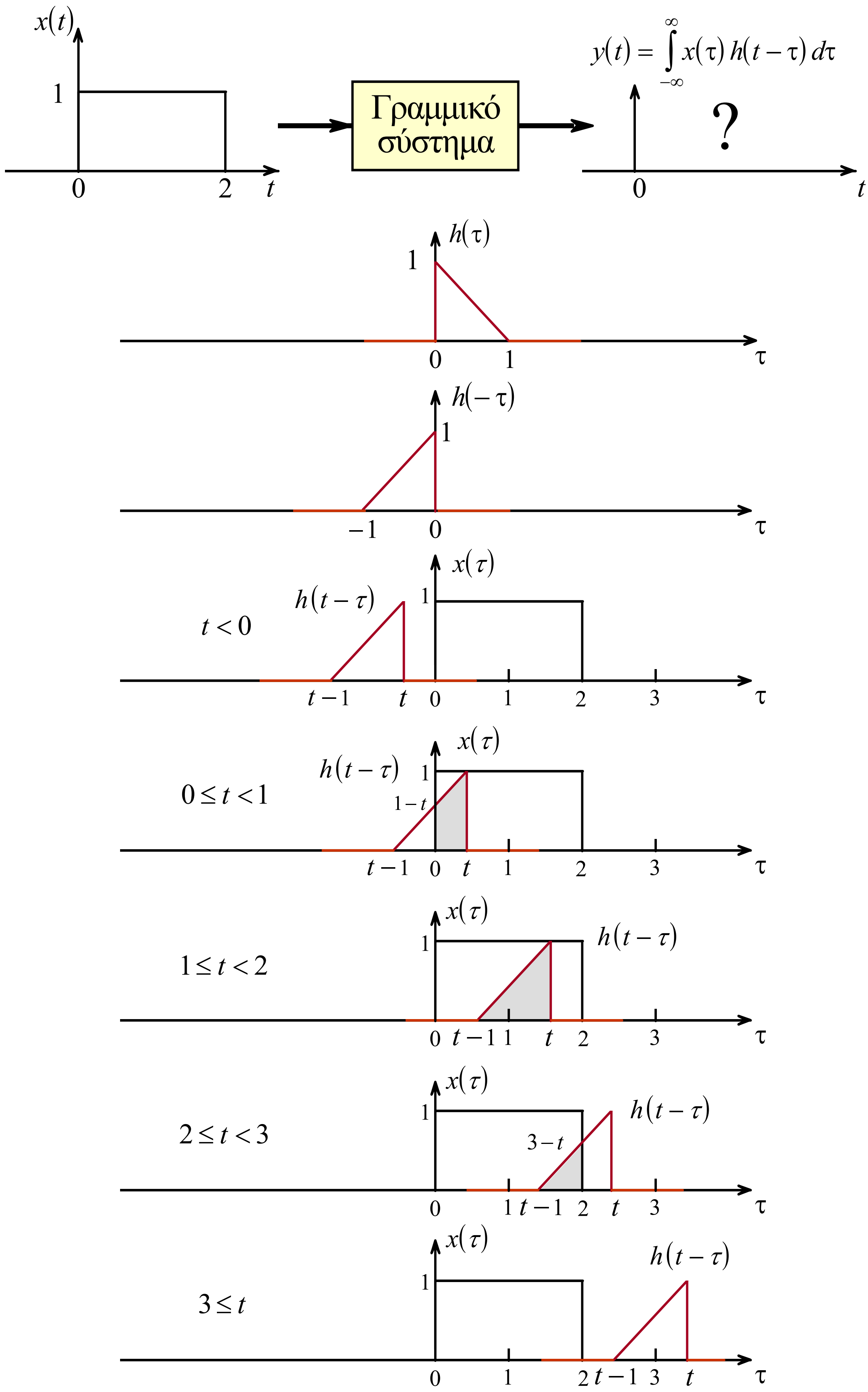
Η έξοδος, λοιπόν, του συστήματος είναι:

$$y(t) = \begin{cases} t - t^2/2 & 0 \le t < 1 \\ 1/2 & 1 \le t < 2 \\ (3-t)^2/2 & 2 \le t < 3 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$



Όλα τα παραπάνω απεικονίζονται αναλυτικά στην επόμενη σελίδα του φυλλαδίου σας.

Παλαμίδης Αλέξανδρος
Μαράς Ανδρέας

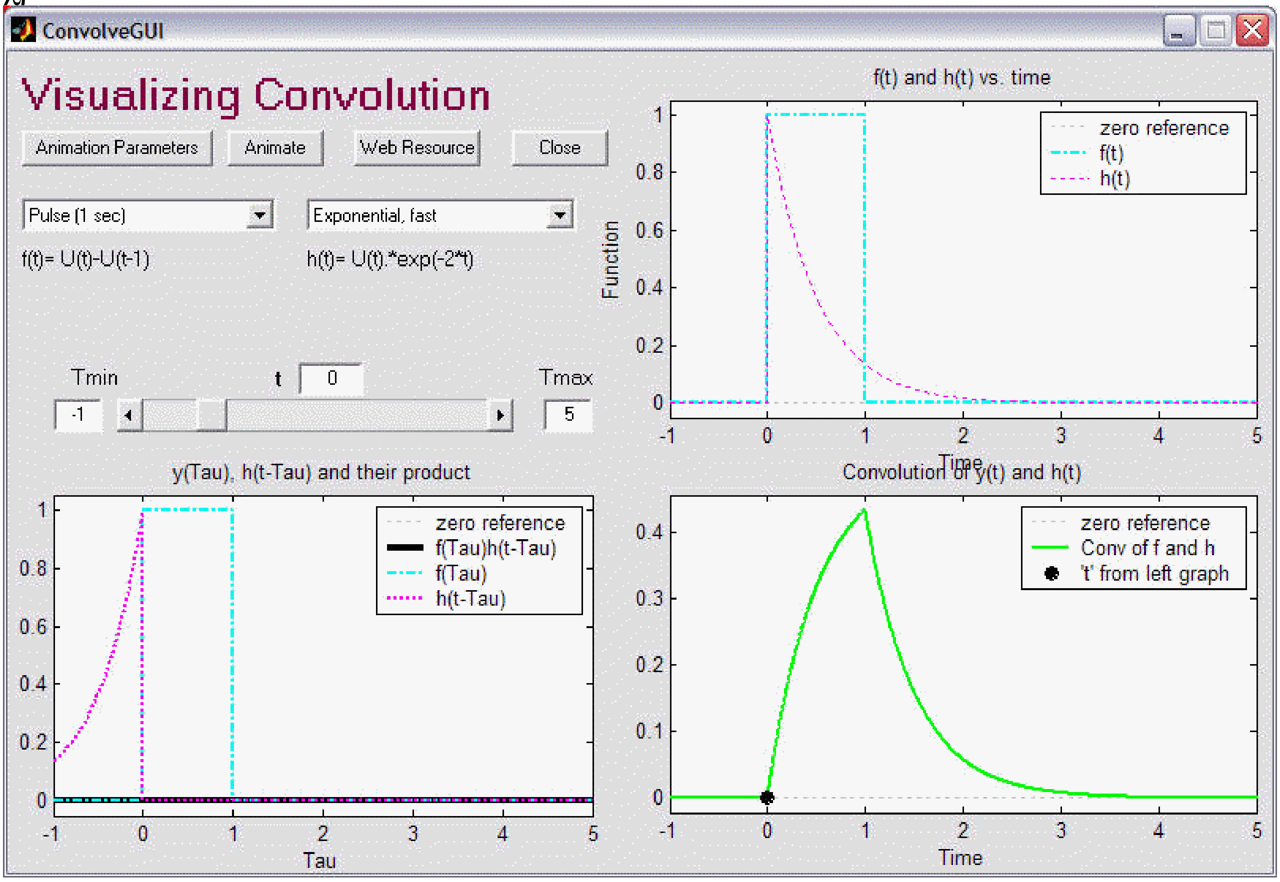


Παλαμίδης Αλέξανδρος
Μαράς Ανδρέας

Το Mfile **ConvolvGUI** είναι ένα εργαλείο του MatLab σχεδιασμένο ώστε να σας βοηθήσει στην οπτική κατανόηση της διαδικασίας της συνέλιξης. Για να εγκαταστήσετε τον κώδικα σπίτι σας κατεβάστε το αρχείο ***ConvolveGui.zip*** και σώστε τα αρχεία στον κατάλογο work του Matlab.

Για να τρέξετε τον κώδικα, εισάγετε την εντολή **» `convolvegui`** *στο MatLab prompt.*

Θα δημιουργηθεί ένα γραφικό παράθυρο λειτουργιών όπως παρακάτω όπου μπορείτε να δοκιμάσετε συνελίξεις διαφόρων σημάτων συνεχούς χρόνου.



Παλαμίδης Αλέξανδρος
Μαράς Ανδρέας