



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ,
ΤΜΗΜΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

ΒΕΣ 04: ΣΥΜΠΙΕΣΗ ΚΑΙ ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΠΟΛΥΜΕΣΩΝ

Θεωρητικές Ασκήσεις (# 1): Δειγματοληψία, κβαντοποίηση και συμπίεση σημάτων

1. Στην τηλεφωνία θεωρείται ότι το ουσιαστικό περιεχόμενο της ανθρώπινης ομιλίας μπορεί να αποδοθεί χωρίς σφάλματα με την μετάδοση συχνοτήτων έως 3.4kHz. Κατά συνέπεια στα συστήματα ISDN όπου η ομιλία μεταδίδεται σε ψηφιοποιημένη μορφή χρησιμοποιούνται αντιαναδιπλωτικά φίλτρα με συχνότητα αποκοπής (cut-off frequency) $f_c=3.4\text{kHz}$. Επειδή τα φίλτρα αυτά δεν μπορούν να είναι τέλεια χρησιμοποιείται συχνότητα δειγματοληψίας μεγαλύτερη από αυτή που υποδεικνύει το θεώρημα Shannon ($f_s \geq 2 \cdot f_{\max}$, εδώ $f_{\max} = f_c$) και συγκεκριμένα $f_s = 8 \text{ kHz}$ ώστε να αποφεύγονται φαινόμενα αναδιπλώσης. Κάθε δείγμα κωδικοποιείται με 8 bits σύμφωνα με τον Νόμο κβαντοποίησης σε 13 τομείς.
- (a) Να υπολογίσετε το ρυθμό μετάδοσης δεδομένων (bit rate) για κάθε κανάλι ομιλίας
 - (b) Να υπολογίσετε το ρυθμό μετάδοσης δεδομένων μιας γραμμής ISDN η οποία περιλαμβάνει 2 κανάλια ομιλίας
 - (c) Να υπολογίσετε την απαιτούμενη μνήμη σε (bytes) για την αποθήκευση 2 λεπτών ψηφιοποιημένης ομιλίας.

Λύση

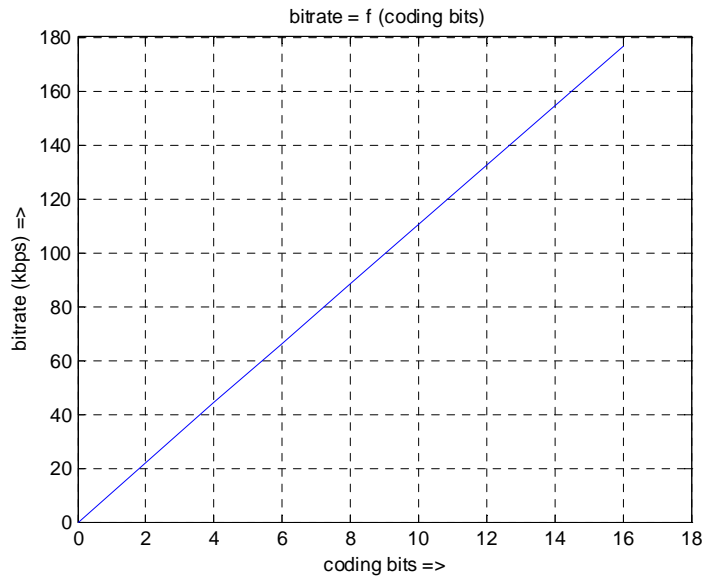
- (a) Bitrate = Ρυθμός Δειγματοληψίας \times bits/δείγμα = 8000 δείγματα / sec \times 8 bit /δείγμα = 64 000 bits /sec = 64 kbps (ανά κανάλι)
 - (b) ISDN γραμμή = 2 κανάλια $\Rightarrow 2 \times 64 \text{ kbps} = 128\text{kbps}$
 - (c) Απαιτούμενη μνήμη = 64 000 bits / sec $\times 120 \text{ sec} = 7680000 \text{ bits} = 960000 \text{ bytes} = 937,5 \text{ Kbytes}$ (1 Kbyte = 1024 bytes)
2. Η ηλεκτρική μορφή ενός σήματος ομιλίας έχει μέγιστη τιμή $V_{\max} = 1720\text{mV}$ και ελάχιστη $V_{\min} = 120 \text{ mV}$. Το σήμα δειγματοληπτείται με συχνότητα $f_s = 11,025 \text{ kHz}$ και τα δείγματα κωδικοποιούνται με: (α) 4 bits / δείγμα, (β) 6 bits / δείγμα, (γ) 8 bits / δείγμα, (δ) 12 bits / δείγμα, (ε) 16 bits / δείγμα.
- (i) Για τις περιπτώσεις (α)-(ε) να υπολογίσετε το bit rate και να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση του bit rate ως συνάρτηση του αριθμού των bits που χρησιμοποιούνται για την κωδικοποίηση ($\text{bitrate} = f(n)$).
 - (ii) Για τις περιπτώσεις (α)-(ε) να υπολογίσετε το μέγιστο σφάλμα κβαντισμού (e_{\max}) και να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση του e_{\max} ως συνάρτηση του αριθμού των bits που χρησιμοποιούνται για την κωδικοποίηση ($e_{\max} = f(n)$). Θεωρείστε γραμμική κβάντιση.
 - (iii) Για τις περιπτώσεις (α)-(ε) να υπολογίσετε τον ελάχιστο σηματοθορυβικό λόγο σε db, ο οποίος δίνεται από τη σχέση :

$$SNR_{\min} = 20 \log_{10} \left(\frac{V_{\min}}{e_{\max}} \right)$$

και να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση του SNR_{\min} ως συνάρτηση του αριθμού των bits που χρησιμοποιούνται για την κωδικοποίηση ($SNR_{\min} = f(n)$).

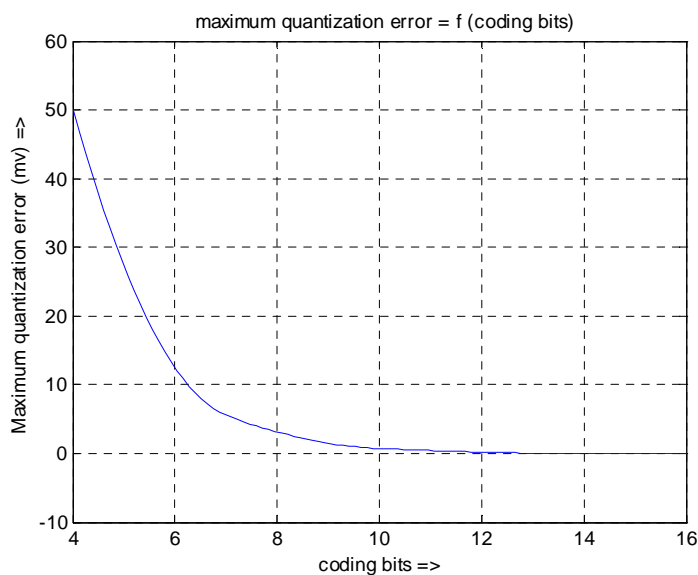
Λύση

- (i). (a) 44100 bps, (b) 66150 bps, (c) 88200 bps, (d) 132300 bps, (e) 176400 bps

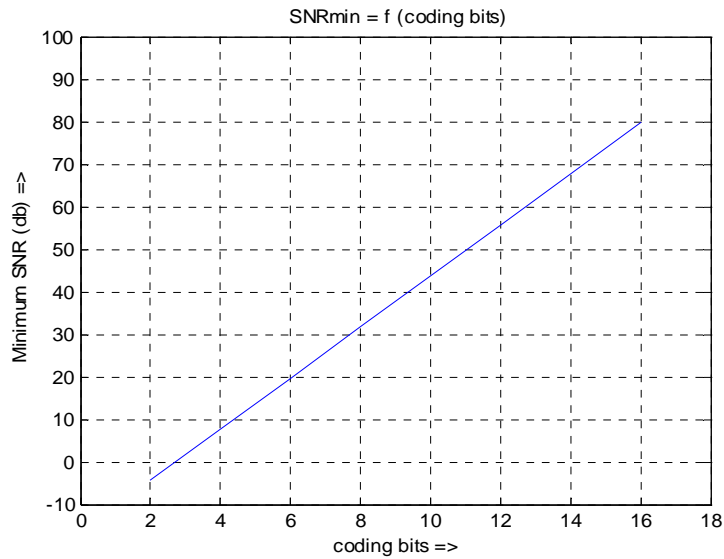


(ii).
$$e_{\max} = \frac{q}{2} = \frac{\left(\frac{V_{\max} - V_{\min}}{2^n} \right)}{2} = \frac{V_{\max} - V_{\min}}{2^{n+1}}$$

(a)
$$e_{\max} = \frac{(1720 - 120)}{2^{4+1}} = \frac{1600}{2^5} = 50 \text{mv}$$
, (b) 12,5 mv, (c) 3,125 mv, (d) 0,195mv, (e) 0,012mv



(iii). (a) 7,60 db, (b) 19,65 db, (c) 31,69 db, (d) 55,77 db, (e) 79,85 db



3. Στη περίπτωση του σήματος της ερώτησης 2 θεωρείστε ότι χρησιμοποιούμε γραμμικό κβαντιστή με διάστημα κβαντισμού $q = 0.025\text{mV}$.

- (i) Πόσα bits απαιτούνται για την κωδικοποίηση των δειγμάτων;
- (ii) Πόσο είναι το προκύπτον bit rate;
- (iii) Πόσος είναι ο ελάχιστος σηματοθρομβικός λόγος SNR_{min} (σε db);
- (iv) Αν θέλαμε να επιτύχουμε ελάχιστο σηματοθρομβικό λόγο 40 db, τι βήμα κβαντισμού έπρεπε να χρησιμοποιήσουμε; Πόσα bits απαιτούνται για την κωδικοποίηση των δειγμάτων σε αυτή την περίπτωση;

Λύση

(i). $q = \left(\frac{V_{\max} - V_{\min}}{2^n} \right) \Rightarrow n = \left\lceil \log_2 \left(\frac{V_{\max} - V_{\min}}{q} \right) \right\rceil$, όπου με το σύμβολο $\lceil \cdot \rceil$ δηλώνεται ο πλησιέστερος προς τα πάνω ακέραιος π.χ. $\lceil 2.3 \rceil = 3$.

Επομένως από την παραπάνω σχέση προκύπτει $n = 16$ bits/sample

(ii). Bitrate = Ρυθμός Δειγματοληψίας \times bits/δείγμα = 11025 δείγματα / sec \times 16 bits /δείγμα = 176400 bits /sec = $176,4$ kbps

(iii). $SNR_{\min} = 20 \log_{10} \left(\frac{V_{\min}}{e_{\max}} \right)$, $e_{\max} = \frac{q}{2} \Rightarrow SNR_{\min} = 20 \log_{10} \left(\frac{2 \cdot V_{\min}}{q} \right) = 79.65\text{db}$

(iv). $SNR_{\min} = 20 \log_{10} \left(\frac{2 \cdot V_{\min}}{q} \right) \Rightarrow q = \frac{2 \cdot V_{\min}}{10^{\left(\frac{SNR_{\min}}{20} \right)}} = 2.4 \text{ mV}$

$$n = \left\lceil \log_2 \left(\frac{V_{\max} - V_{\min}}{q} \right) \right\rceil = 10 \text{ bits/sample}$$

4. Θεωρήστε μια πηγή πληροφορίας η οποία μπορεί να δημιουργήσει μόνο επτά σύμβολα: $\{s_1, s_2, \dots, s_7\}$. Μετά από μετρήσεις οι αντίστοιχες πιθανότητες εμφάνισης εκτιμήθηκαν ως: $\{1/32, 2/32, 4/32, 4/32, 5/32, 8/32, 8/32\}$. Τα σύμβολα δημιουργούνται με ρυθμό 1000 σύμβολα/sec. Ποιο είναι το ελάχιστο bit rate το οποίο μπορεί να επιτευχθεί για αυτή τη πηγή χρησιμοποιώντας συμπίεση / κωδικοποίηση χωρίς απώλειες;

Λύση

(i)
$$H = -\sum_{i=1}^7 p(s_i) \cdot \log_2(p(s_i)) =$$

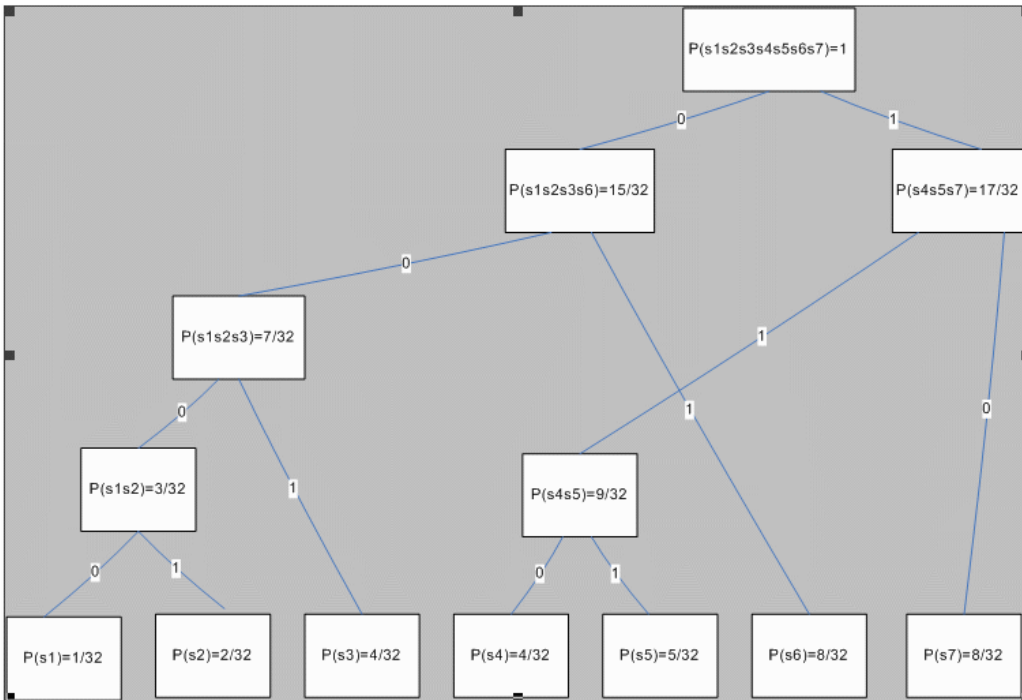
$$= -\left(\frac{1}{32} \cdot \log_2\left(\frac{1}{32}\right) + \frac{2}{32} \cdot \log_2\left(\frac{2}{32}\right) + 2 \cdot \frac{4}{32} \cdot \log_2\left(\frac{4}{32}\right) + \frac{5}{32} \cdot \log_2\left(\frac{5}{32}\right) + 2 \cdot \frac{8}{32} \cdot \log_2\left(\frac{8}{32}\right) \right)$$

= 2.575 bits/symbol

(ii) Ελάχιστο bitrate = 1000 symbols /sec x 2.575 bits/symbol = 2575 bits/sec = 2,575kbps

5. Για την ερώτηση 4 χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Huffman για να υπολογίσετε τις κωδικές λέξεις (codewords) για τα σύμβολα $\{s_1, s_2, \dots, s_7\}$, και υπολογίστε τον μέσο αριθμό bits ανά σύμβολο που απαιτούνται για την κωδικοποίησή τους.

Λύση



κωδικές λέξεις: $s_1 \Rightarrow 0000$, $s_2 \Rightarrow 0001$, $s_3 \Rightarrow 001$, $s_4 \Rightarrow 110$, $s_5 \Rightarrow 111$, $s_6 \Rightarrow 01$, $s_7 \Rightarrow 10$

$$\text{Μέσος αριθμός bits ανά κωδική λέξη} = \sum_{i=1}^7 N(s_i) \cdot p(s_i) = \frac{4}{32} + \frac{8}{32} + 2 \cdot \frac{12}{32} + \frac{15}{32} + 2 \cdot \frac{16}{32} = \frac{83}{32} \\ = 2.594 \text{ bits/codeword}$$

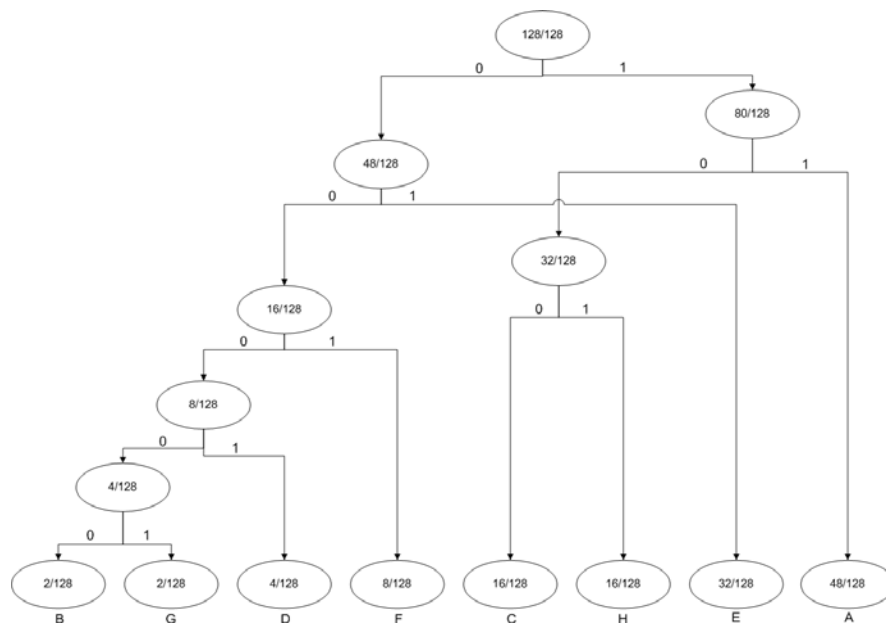
όπου $N(s_i)$ ο αριθμός bits για την κωδική λέξη s_i

6. Μια σειρά από μηνύματα απαιτείται να ανταλλάσσονται ανάμεσα σε δύο υπολογιστές μέσω μιας τηλεφωνικής γραμμής. Τα μηνύματα απαρτίζονται μόνο από τους χαρακτήρες {A, B, C, ..., H}. Μετά από μετρήσεις οι αντίστοιχες πιθανότητες εμφάνισης των χαρακτήρων εκτιμήθηκαν ως: {48/128, 2/128, 16/128, 4/128, 32/128, 8/128, 2/128, 16/128}.
- Υπολογίστε τον ελάχιστο αριθμό bits ανά σύμβολο που απαιτούνται για την κωδικοποίηση τους (εντροπία).
 - Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Huffman για να υπολογίσετε τις κωδικές λέξεις (codewords) για τα σύμβολα {A, B, ..., H}.
 - Υπολογίστε τον μέσο αριθμό bits ανά σύμβολο που απαιτούνται για την κωδικοποίηση τους με βάση τον κώδικα που αναπτύξατε στο (ii). Συγκρίνετε τον αριθμό αυτό με: (α) την εντροπία των μηνυμάτων (υποερώτημα (i)), (β) με την κωδικοποίηση με σταθερό μήκος λέξης, (γ) με την κωδικοποίηση με χρήση κωδικών λέξεων ASCII των 7 bits.

Λύση

$$(i). H = -(p(A) \cdot \log_2(A) + p(B) \cdot \log_2(B) + \dots + p(H) \cdot \log_2(H)) \\ = -\left(\frac{48}{128} \cdot \log_2\left(\frac{48}{128}\right) + \frac{32}{128} \cdot \log_2\left(\frac{32}{128}\right) + 2 \cdot \frac{16}{128} \cdot \log_2\left(\frac{16}{128}\right) + \frac{8}{128} \cdot \log_2\left(\frac{8}{128}\right) + \frac{4}{128} \cdot \log_2\left(\frac{4}{128}\right) + \frac{4}{128} \cdot \log_2\left(\frac{2}{128}\right)\right) \\ = -\left(-\frac{68}{128} - \frac{64}{128} - \frac{96}{128} - \frac{32}{128} - \frac{20}{128} - \frac{24}{128}\right) \\ = 2.375 \text{ bits/symbol}$$

- (ii). κωδικές λέξεις: A => 11, B => 00000, C => 100, D => 0001, E => 01, F => 001, G => 00001, H => 101



(iii). Μέσος αριθμός bits ανά κωδική λέξη = $\sum_{i=1}^8 N(s_i) \cdot p(s_i)$

$$= 2 \cdot \frac{48}{128} + 2 \cdot \frac{32}{128} + 2 \cdot 3 \cdot \frac{16}{128} + 3 \cdot \frac{8}{128} + 4 \cdot \frac{4}{128} + 2 \cdot 5 \cdot \frac{2}{128} = \frac{316}{128} = 2.469 \text{ bits/symbol}$$

(α) Ο μέσος αριθμός bits ανά κωδική λέξη είναι (όπως αναμενόταν) μεγαλύτερος από την εντροπία αλλά πολύ κοντά σε αυτήν.

(β) Δεδομένου ότι έχουμε 8 σύμβολα θα χρειαζόμασταν 3 bits ανά σύμβολο για την κωδικοποίηση με σταθερό μήκος λέξης. Επομένως με τον κώδικα Huffman επιτυγχάνεται συμπίεση περίπου 1.2:1.

(γ) Για κωδικοποίηση ASCII 7 bits η συμπίεση που επιτυγχάνεται είναι περίπου 2.8:1.

7. Οι παρακάτω αριθμοί αντιπροσωπεύουν τις τιμές φωτεινότητας των pixels για μια γραμμή μιας εικόνας αποχρώσεων του γκρι. (α) Με δεδομένο ότι στις εικόνες αποχρώσεων του γκρι οι τιμές φωτεινότητας αναπαριστώνται με 8 bits / pixel υπολογίστε πόσα bytes απαιτούνται για την κωδικοποίηση του συγκεκριμένου τμήματος της εικόνας. (β) Αν χρησιμοποιούσαμε κωδικοποίηση RLE (Run Length Encoding) πόσα bytes θα απαιτούνταν (χρησιμοποιήστε ένα byte για την τιμή της φωτεινότητας και ένα byte για τον αριθμό των επαναλήψεων της τιμής); (γ) Με πόσα bits / pixel θα μπορούσαμε να κωδικοποιήσουμε το παρακάτω τμήμα της εικόνας αν χρησιμοποιούσαμε την τεχνική DPCM;

10 10 10 16 16 16 17 17 20 20 22 24 24 24 22 22 26 26 30 34 34 34 32 32 24 24 24 18 18 18
12 12 10 10 10 8 8 8 8 8 8 8 4 4 2 2 2 2

Λύση

(i). Έχουμε 48 pixels στη γραμμή αυτή της εικόνας => απαιτούνται 48 bytes για την κωδικοποίηση της

(ii). Με τον αλγόριθμο RLE προκύπτει η εξής κωδικοποίηση:

10!3 16!3 17 17 20 20 22 24!3 22 22 26 26 30 34!3 32 32 24!3 18!3 12 12 10!3 8!7 44 2!4
= 42 bytes

(iii). Το σήμα DPCM που προκύπτει είναι: 10 0 0 6 0 0 1 0 2 2 0 0 -2 0 4 0 4 4 0 0 -2 0 -8 0 0 -6 0 0 -6 0 -6 0 -2 0 0 -2 0 0 0 0 0 0 -4 0 -2 0 0 0

Του οποίου το δυναμικό εύρος (μέγιστη - ελάχιστη τιμή +1) περιλαμβάνει 19 τιμές (είναι $10 - (-8) + 1 = 19$) επομένως χρειαζόμαστε 5 bits /pixel για την κωδικοποίηση των τιμών που περιλαμβάνονται στο συγκεκριμένο τμήμα της εικόνας. Συνολικά χρειάζονται $48 * 5 = 240$ bits = 30 bytes

8. Με δεδομένη την ακολουθία γραμμάτων "WORK OR NO WORK" (θεωρήστε τα κενά ως σύμβολα), σχηματίστε ένα πίνακα στον οποίο να επιδεικνύονται τα διάφορα στάδια της συμπίεσης της ακολουθίας σύμφωνα με τον αλγόριθμο LZW. Στον πίνακα πρέπει να φαίνονται: (α) η κωδικοποιημένη ακολουθία εξόδου, οι δείκτες και τα σύμβολα του λεξικού που θα δημιουργηθεί.

Λύση

(i). Υποθέτουμε ότι το λεξικό αρχικά περιέχει 128 χαρακτήρες που αντιστοιχούν στον κώδικα ASCII 7 bits (δείκτες από 0-127). Κάθε νέο σύμβολο παίρνει ένα νέο δείκτη

Input String =>WORK OR NO WORK => 15 bytes σε κώδικα ASCII (χωρίς συμπίεση)

Previous Symbol	Current Character	Output	Index of new Symbol	New Symbol
NIL	W			
W	O	<W>	128	WO
O	R	<O>	129	OR
R	K	<R>	130	RK
K	_	<K>	131	K_
_	O	<_>	132	_O
O	R			
OR	_	129	133	OR_
_	N	<_>	134	_N
N	O	<N>	135	NO
O	_	<O>	136	O_
_	W	<_>	137	_W
W	O			
WO	R	128	138	WOR
R	K			
RK	EOF	130		

Output String => <W> <O> <R> <K> <_> 129 <_> <N> <O> <_> 128 130 => 12 bytes

Όπου <> δηλώνει τον δείκτη του αντίστοιχου χαρακτήρα (index) στον κώδικα ASCII, π.χ. <W> = 87 και _ δηλώνει το κενό, (EOF=End Of File)