

01.1 Εισαγωγή

0.1.1.1 Επεξεργασία Σήματος

Η Επεξεργασία Σήματος ασχολείται με την αναπαράσταση, μετασχηματισμό και ανάλυση σημάτων καθώς και της πληροφορίας που αυτά περιέχουν.

Σήματα είναι συναρτήσεις, συνήθως του χρόνου ή της θέσης, που μεταφέρουν πληροφορίες για κάποιο φυσικό σύστημα, ή με στόχο την επικοινωνία ανάμεσα σε ανθρώπους ή ανάμεσα σε ανθρώπους και μηχανές.

Σύστημα είναι (μαθηματικά) ένας μετασχηματισμός ή μια διεργασία η οποία αντιστοιχεί κάποια σήματα εισόδου σε κάποια σήματα εξόδου:

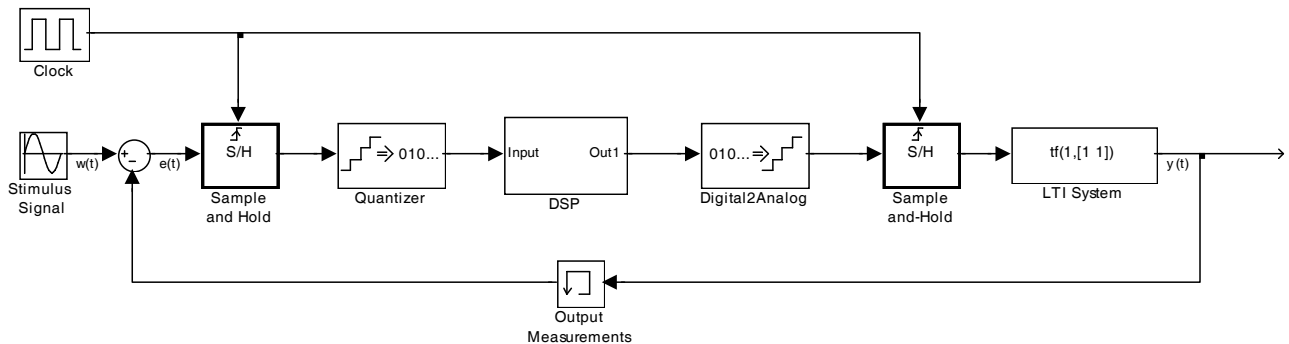
$$y(t)=T(x(t)),$$

όπου $x(t)$ σήμα εισόδου, $y(t)$ σήμα εξόδου

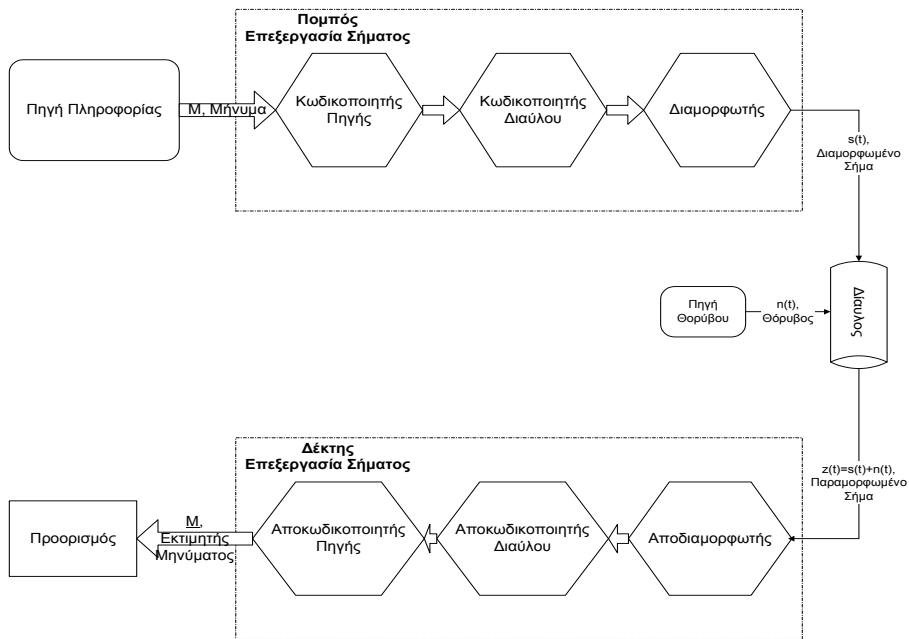
01.1.2 Συστήματα Αυτοματισμού και επεξεργασία σήματος

Η Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος (DSP – Digital Signal Processing) εφαρμόζεται στα συστήματα αυτοματισμού όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Επεξεργασία αναλογικών σημάτων εφαρμόζεται σε τηλεπικοινωνιακά συστήματα όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.



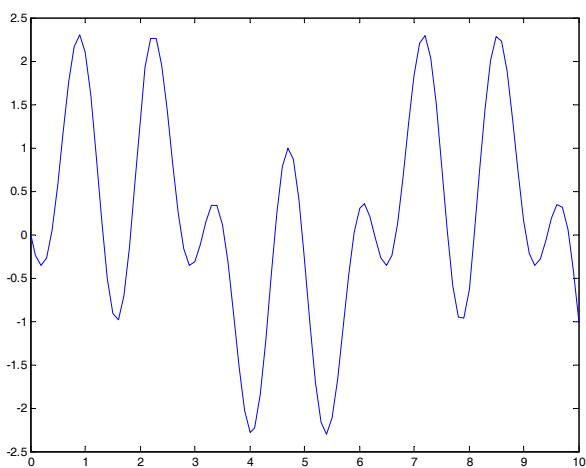
Σχήμα 1: ΨΕΣ και Συστήματα Αυτοματισμού



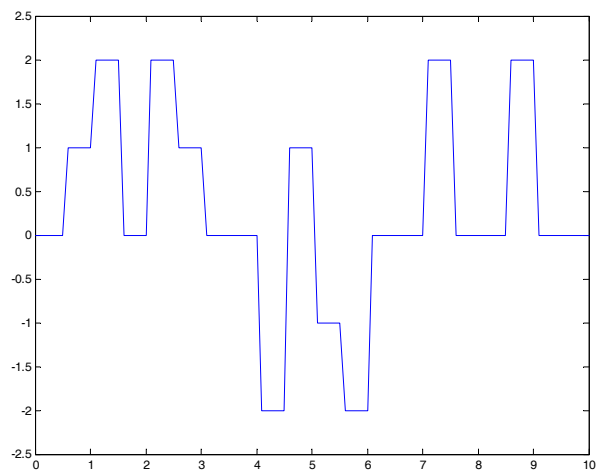
Σχήμα 2: Επεξεργασία Σήματος σε Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα

01.2 Σήματα

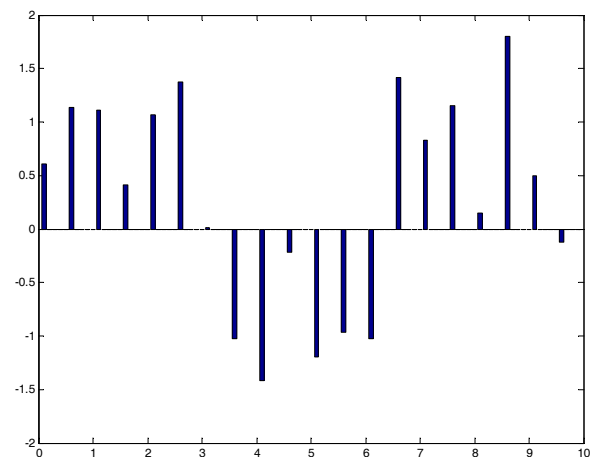
01.2.1 Αναλογικά, Ψηφιακά ή άλλα ...?



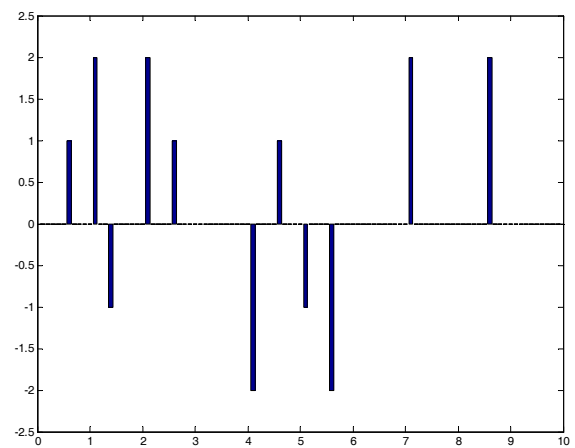
Συνεχούς χρόνου, συνεχούς πλάτους: Παράδειγμα η είσοδος στο Σχήμα 1.



Συνεχούς χρόνου, διακριτού πλάτους Παράδειγμα η έξοδος του δικτύου συγκράτησης (SH) στο Σχήμα 1.



Διακριτού χρόνου, συνεχούς πλάτους



Διακριτού χρόνου, διακριτού πλάτους: Παράδειγμα η

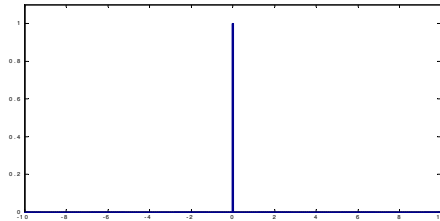
01.2.2 Στοιχειώδη Σήματα συνεχούς και διακριτού χρόνου

(α1) Κρουστική συνάρτηση (συνάρτηση του Dirac). Ορίζεται από τις παρακάτω ιδιότητες:

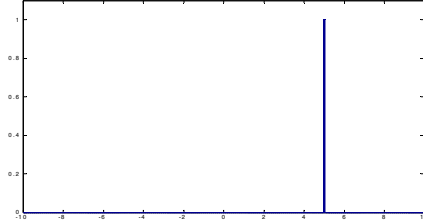
$$(i) \delta(t) = 0, t \neq 0 \quad (ii) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

(α2) Μοναδιαία ακολουθία δειγματοληψίας

$$\delta\{n\} = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$



$\delta(n)$

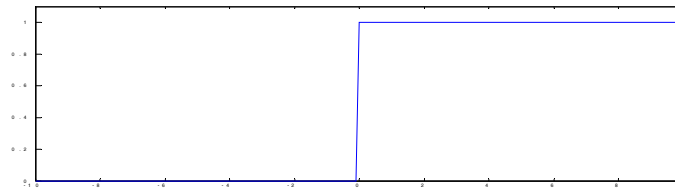


$\delta(n-5)$

Για κάθε ακολουθία $x\{n\}$ ισχύει $x\{n\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\{k\} \cdot \delta\{n - k\}$

(β1) Βηματική συνάρτηση

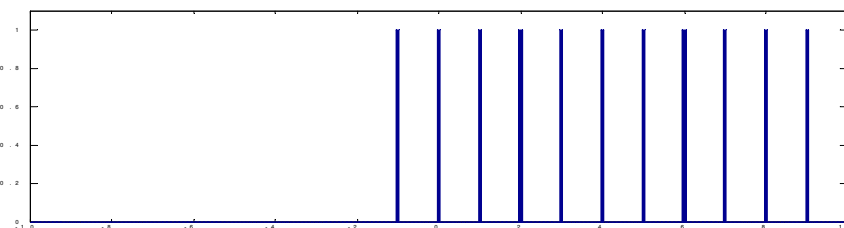
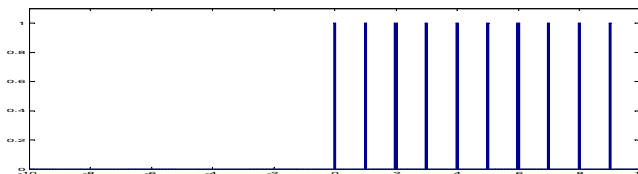
$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$



$$\text{Ισχύει: } \delta(t) = \frac{d\{u(t)\}}{dt}$$

(β2) Βηματική ακολουθία

$$u\{n\} = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$



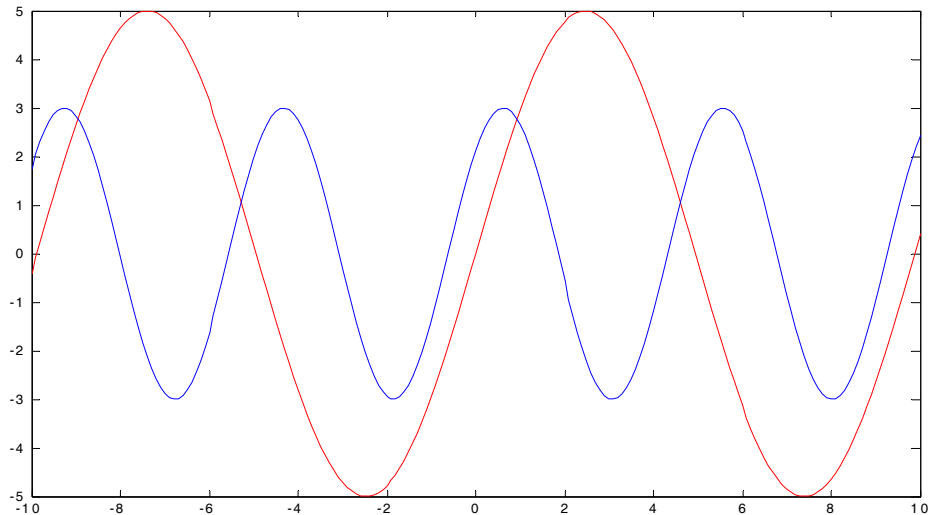
Σχήμα 3: Ακολουθία $u(n+1)$

Ισχύει (i) $\delta\{n\}=u\{n\}-u\{n-1\}$, (ii) $u\{n\}=\sum_{k=0}^{\infty}\delta\{n-k\}$

(γ1) Ημιτονοειδείς συναρτήσεις

$$x(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$$

Χαρακτηρίζονται από τρία μεγέθη: Πλάτος (A), συχνότητα (ω) και φάση (φ)



Σχήμα 4: Ημιτονοειδείς συναρτήσεις. Με κόκκινο χρώμα $5\sin(\omega_1 t)$ και με μπλε $3\sin(\omega_2 t+\pi/4)$ ($\omega_2=2\omega_1$)

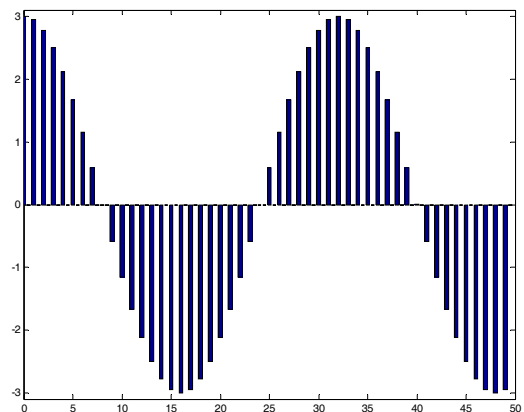
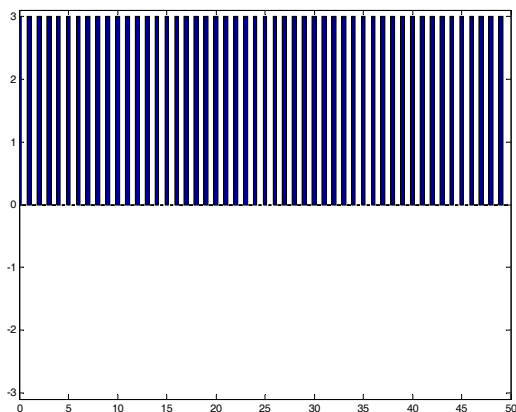
(γ2) Ημιτονοειδείς ακολουθίες

$$x\{n\}=A\sin(\omega_0 n+\varphi)$$

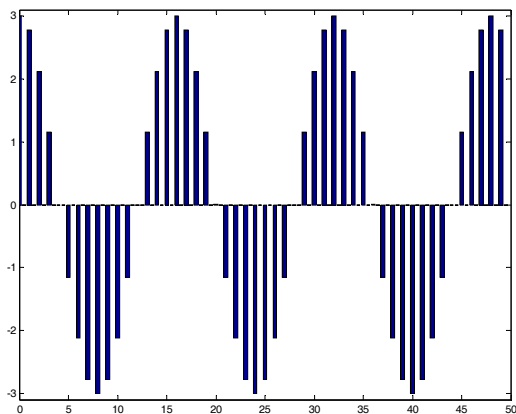
Ισχύει $A\sin((\omega_0+2\pi)n+\varphi)=A\sin(\omega_0 n+2\pi n+\varphi)=A\sin(\omega_0 n+\varphi)$

Άρα χρήσιμο διάστημα διακόμανσης της «συχνότητας» ω_0 είναι το $0 \leq \omega_0 < 2\pi$ ή ισοδύναμα το $-\pi < \omega_0 \leq \pi$.

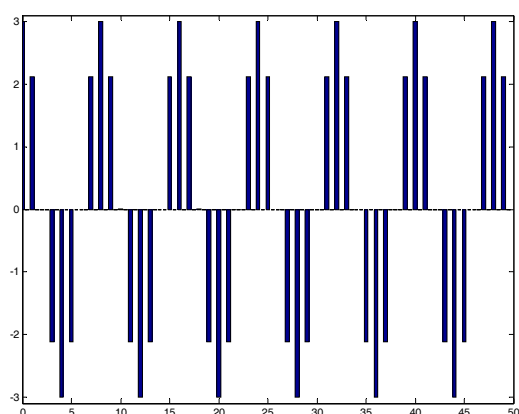
Το σχήμα 5 είναι κατατοπιστικό.



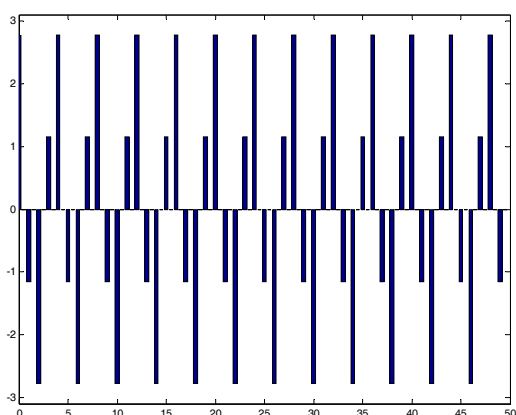
$$\omega_0 = 0 \text{ ή } \omega_0 = 2\pi$$



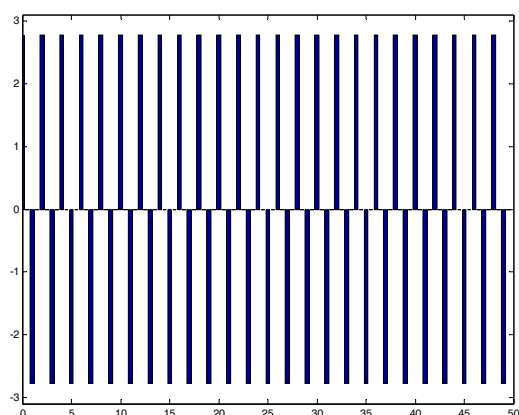
$$\omega_0 = \pi/16 \text{ ή } \omega_0 = 31\pi/16$$



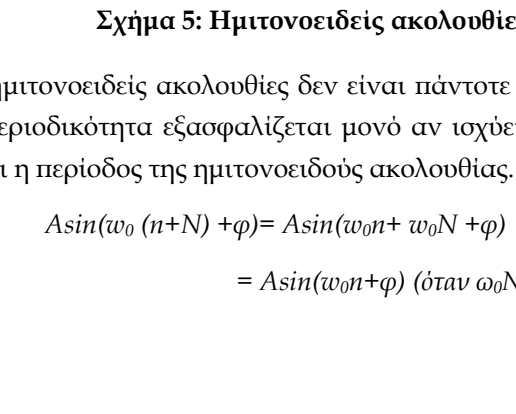
$$\omega_0 = \pi/8 \text{ ή } \omega_0 = 15\pi/8$$



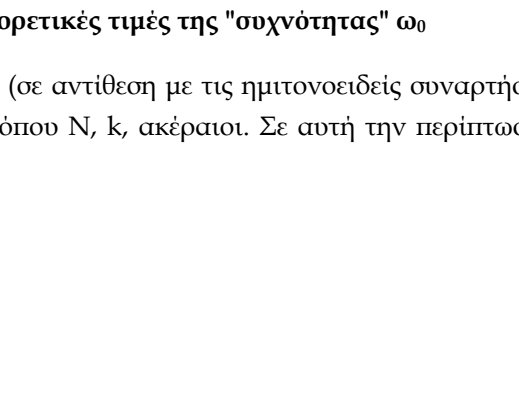
$$\omega_0 = \pi/4 \text{ ή } \omega_0 = 7\pi/4$$



$$\omega_0 = \pi/2 \text{ ή } \omega_0 = 3\pi/2$$



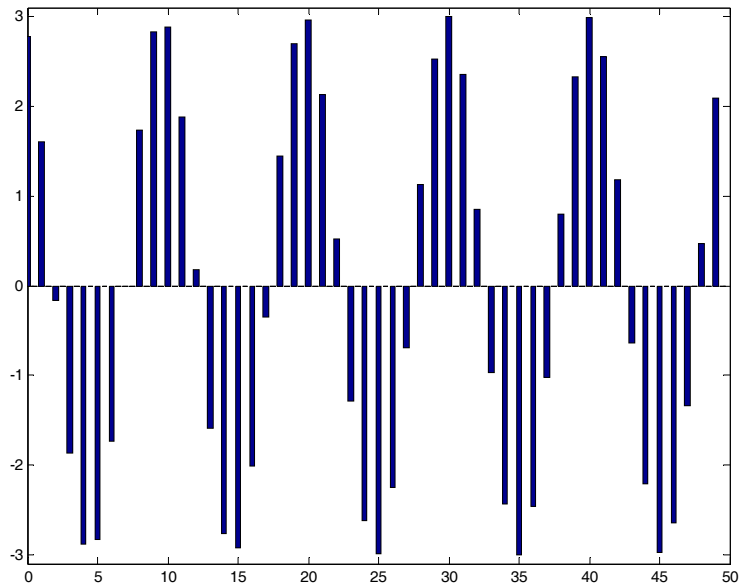
$$\omega_0 = \pi$$



Σχήμα 5: Ημιτονοειδείς ακολουθίες για διαφορετικές τιμές της "συχνότητας" ω_0

Οι ημιτονοειδείς ακολουθίες δεν είναι πάντοτε περιοδικές (σε αντίθεση με τις ημιτονοειδείς συναρτήσεις). Η περιοδικότητα εξασφαλίζεται μόνο αν ισχύει $\omega_0 N = 2\pi k$ όπου N, k , ακέραιοι. Σε αυτή την περίπτωση N είναι η περίοδος της ημιτονοειδούς ακολουθίας.

$$\begin{aligned} A \sin(\omega_0 (n+N) + \varphi) &= A \sin(\omega_0 n + \omega_0 N + \varphi) \\ &= A \sin(\omega_0 n + \varphi) \text{ (όταν } \omega_0 N = 2\pi k) \end{aligned}$$



Σχήμα 6: Μη περιοδική ημιτονοειδής ακολουθία ($\omega_0 = \pi^2/16$)

(δ1) Μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις

$$x(t) = Ae^{j\omega t} = A \cos(\omega t) + jA \sin(\omega t)$$

Όπως φαίνεται από την παραπάνω σχέση οι μιγαδικές εκθετικές ακολουθίες είναι περιοδικές συναρτήσεις.

(δ2) Μιγαδικές εκθετικές ακολουθίες

$$x\{n\} = Ae^{j\omega n} = A \cos(\omega \cdot n) + jA \sin(\omega \cdot n)$$

Η συνθήκη περιοδικότητας για τις μιγαδικές ακολουθίες είναι όμοια με αυτήν των ημιτονοειδών ακολουθιών.

ΜΑΘΗΜΑ 02: ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

02.1 Εισαγωγή

Σύστημα είναι (μαθηματικά) ένας μετασχηματισμός ή μια διεργασία η οποία αντιστοιχεί κάποια σήματα εισόδου σε κάποια σήματα εξόδου:

$$y(t)=T(x(t)),$$

όπου $x(t)$ το σήμα εισόδου, $y(t)$ το σήμα εξόδου

Ομοίως ορίζονται τα συστήματα διακριτού χρόνου ως μετασχηματισμοί που αντιστοιχίζουν ακολουθίες εισόδου με ακολουθίες εξόδου.

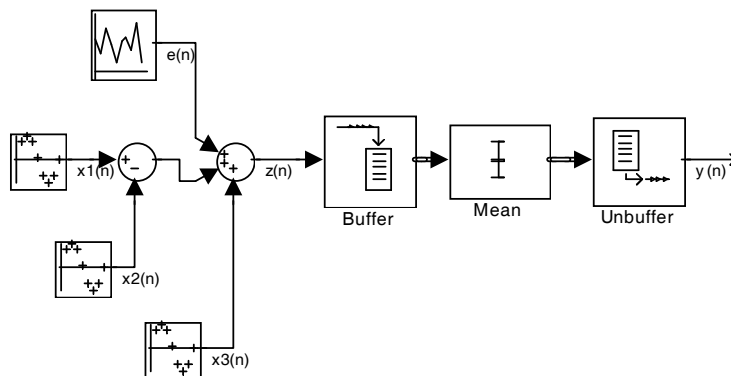
$$y\{n\}=T[x\{n\}],$$

όπου $x\{n\}$ η ακολουθία εισόδου, $y\{n\}$ η ακολουθία εξόδου

Παράδειγμα: Υπολογισμός κινητού μέσου όρου

$$y\{n\} = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x\{n-k\}$$

Στο επόμενο σχήμα φαίνεται η υλοποίηση του ανωτέρω συστήματος για $M_1=0$ και $M_2=64$.



Σχήμα 7: Υλοποίηση του συστήματος κινητού μέσου όρου σε SIMULINK

02. 2 Ιδιότητες Συστημάτων

02.2.1. Συστήματα χωρίς μνήμη

Στα συστήματα χωρίς μνήμη η τρέχουσα τιμή της εξόδου εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα τιμή της εισόδου.

Το παρακάτω σύστημα είναι χωρίς μνήμη:

$$y\{n\}=a_2x^2\{n\}+a_1x\{n\}+a_0$$

ενώ το επόμενο είναι με μνήμη, δεδομένου ότι η τρέχουσα τιμή της εξόδου ($y\{n\}$) εξαρτάται και από την προηγούμενη τιμή της εισόδου ($x\{n-1\}$)

$$y\{n\}=a_2x^2\{n\}+a_1x\{n-1\}+a_0$$

02.2.2 Γραμμικά Συστήματα

Αν $y_1\{n\}$ είναι η απόκριση του συστήματος $T[\bullet]$ στην είσοδο $x_1\{n\}$ και $y_2\{n\}$ η απόκριση στην είσοδο $x_2\{n\}$ τότε το σύστημα $T[\bullet]$ είναι γραμμικό αν και μόνο αν πληρείται η παρακάτω σχέση:

$$T[a_1x_1\{n\} + a_2x_2\{n\}] = a_1T[x_1\{n\}] + a_2T[x_2\{n\}] = a_1y_1\{n\} + a_2y_2\{n\} \quad (02.1)$$

για οποιεσδήποτε σταθερές a_1 και a_2

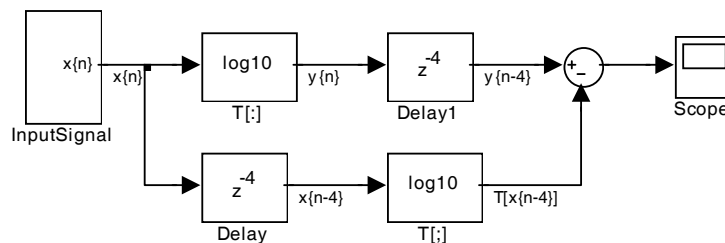
02.2.3 Χρονικά Αναλλοίωτα Συστήματα

Το σύστημα $T[\bullet]$ είναι χρονικά αναλλοίωτο αν μια χρονική μετατόπιση ή καθυστέρηση στην ακολουθία εισόδου προκαλεί αντίστοιχη χρονική μετατόπιση ή καθυστέρηση στην ακολουθία εξόδου. Επομένως αν $y\{n\} = T[x\{n\}]$ και $x_1\{n\} = x\{n - n_0\}$,

τότε το σύστημα είναι χρονικά αναλλοίωτο αν και μόνο αν

$$y_1\{n\} = T[x_1\{n\}] = T[x\{n - n_0\}] = y\{n - n_0\} \quad (02.2)$$

για κάθε n_0



Σχήμα 8: Έλεγχος ΧΑ συστήματος μέσω του SIMULINK ($T[\bullet] = \log[\bullet]$, $n_0 = 4$)

02.2.4 Αιτιατά Συστήματα

Το σύστημα $T[\bullet]$ είναι αιτιατό αν η τρέχουσα τιμή της εξόδου δεν εξαρτάται από μελλοντικές τιμές της εισόδου.

Το παρακάτω σύστημα είναι αιτιατό:

$$y\{n\} = a_2x^2\{n\} + a_1x\{n-1\} + a_0$$

ενώ το επόμενο είναι μη αιτιατό, δεδομένου ότι η τρέχουσα τιμή της εξόδου ($y\{n\}$) εξαρτάται από μελλοντικές τιμές της εισόδου ($x\{n+1\}$)

$$y\{n\} = a_2x^2\{n+1\} + a_1x\{n\} + a_0$$

02.2.5 Ευσταθή Συστήματα

Το σύστημα $T[\bullet]$ είναι ευσταθές κατά BIBO (bounded input - bounded output, πεπερασμένη είσοδος - πεπερασμένη έξοδος) αν η απόκριση σε κάθε πεπερασμένη είσοδο είναι επίσης πεπερασμένη.

$$|T[x\{n\}]| = |y\{n\}| \leq B_y < \infty, \quad \forall n \quad (02.3(\alpha))$$

$$\text{εφόσον ισχύει } |x\{n\}| \leq B_x < \infty, \quad \forall n \quad (02.3(\beta))$$

02.3 Γραμμικά Χρονικά Αναλλοίωτα (ΓΧΑ) Συστήματα

Τα γραμμικά χρονικά αναλλοίωτα συστήματα (LTI - Linear Time Invariant) είναι μια κατηγορία συστημάτων για τα οποία υπάρχουν συμπαγείς μαθηματικές αναπαραστάσεις. Παρόλο που τα περισσότερα φυσικά συστήματα δεν είναι ούτε γραμμικά και κυρίως χρονικά μεταβαλλόμενα πολλά από αυτά μπορούν να προσεγγιστούν ικανοποιητικά από ΓΧΑ σε ένα πεπερασμένο χρονικό παράθυρο.

02.3.1. Αναπαράσταση ΓΧΑ συστημάτων μέσω της κρουστικής απόκρισης

Κρουστική απόκριση $h\{n\}$ του συστήματος $T[\bullet]$ είναι απόκριση του με είσοδο την μοναδιαία ακολουθία δειγματοληψίας (ή κρουστική ώθηση) $\delta\{n\}$:

$$h\{n\}=T[\delta\{n\}] \quad (02.4)$$

Είναι γνωστό ότι κάθε ακολουθία $x\{n\}$ μπορεί να γραφεί $x\{n\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\{k\}\delta\{n-k\}$, επομένως,

$$y\{n\} = T[x\{n\}] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x\{k\}\delta\{n-k\}\right] \quad (02.5)$$

Εφόσον το σύστημα είναι γραμμικό ισχύει:

$$y\{n\} = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x\{k\}\delta\{n-k\}\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\{k\}T[\delta\{n-k\}] \quad (02.6)$$

αλλά $T[\delta\{n-k\}]=h\{n-k\}$ διότι το σύστημα $T[\bullet]$ είναι χρονικά αναλλοίωτο. Επομένως:

$$y\{n\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\{k\}h\{n-k\} \quad (02.7)$$

Η σχέση (02.7) ονομάζεται συνελκτικό άθροισμα και εκφράζει την συνέλιξη των σημάτων $x\{n\}$ $h\{n\}$ η οποία συμβολίζεται ως $x\{n\} * h\{n\}$. Από τη σχέση (02.7) προκύπτει ότι η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος υπολογίζεται εάν γνωρίζουμε την κρουστική του απόκριση $h\{n\}$ και φυσικά την είσοδο (μέσω της σχέσης $y\{n\}=x\{n\} * h\{n\}$). Επομένως η κρουστική απόκριση περιγράφει πλήρως ένα ΓΧΑ.

02.3.2 Ιδιότητες ΓΧΑ συστημάτων

Δεδομένου ότι κάθε ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται από το συνελκτικό άθροισμα της σχέση (02.7) οι ιδιότητες του καθορίζονται από τις ιδιότητες του συνελκτικού αθροίσματος:

(a) $x\{n\} * h\{n\} = h\{n\} * x\{n\}$

(b) $x\{n\} * (h_1\{n\} + h_2\{n\}) = x\{n\} * h_1\{n\} + x\{n\} * h_2\{n\}$

(c) $(x\{n\} * h_1\{n\}) * h_2\{n\} = (x\{n\} * h_2\{n\}) * h_1\{n\} = x\{n\} * (h_1\{n\} * h_2\{n\})$

Επίσης ένα ΓΧΑ με κρουστική απόκριση $h\{n\}$ είναι:

(d) Ευσταθές (κατά BIBO) αν και μόνο αν $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h\{k\}| < \infty$

(e) Αιτιατό αν και μόνο αν $h\{n\}=0$, για κάθε $n < 0$

(f) FIR (Finite duration Impulse Response) αν $h\{n\} \neq 0, -\infty < M1 \leq n \leq M2 < \infty$ (δηλαδή η ακολουθία $h\{n\}$ έχει μόνο πεπερασμένο αριθμό μη μηδενικών δειγμάτων. Στην αντίθετη περίπτωση (δηλαδή αν η $h\{n\}$ έχει άπειρο αριθμό μη μηδενικών δειγμάτων) τότε το σύστημα είναι IIR (Infinite duration Impulse Response).

02.3.3. Αναπαράσταση ΓΧΑ συστημάτων μέσω Γραμμικών Εξισώσεων Διαφορών με σταθερούς συντελεστές

Μια υποκατηγορία ΓΧΑ συστημάτων μπορεί να αναπαρασταθεί με εξισώσεις διαφορών με σταθερούς συντελεστές:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m) \quad (02.8)$$

Παρόλα αυτά η σχέση (02.8) δεν εξασφαλίζει τη γραμμικότητα και το χρονικά αναλλοίωτο. Ένα γραμμικό σύστημα πρέπει να δίνει μηδενική απόκριση συνεχώς όταν δέχεται μηδενική είσοδο συνεχώς.

ΜΑΘΗΜΑ 03: ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ

03.1 Απόκριση Συχνότητας ΓΧΑ Συστημάτων

Γνωρίζουμε ότι για ένα ΓΧΑ σύστημα με είσοδο $x\{n\}$ και κρουστική απόκριση $h\{n\}$, η έξοδος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$y\{n\} = x\{n\} * h\{n\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\{k\}h\{n-k\} \quad (03.01)$$

Έστω $x\{n\} = e^{j\omega n}$ τότε

$$y\{n\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\{k\}h\{n-k\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h\{k\}x\{n-k\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h\{k\}e^{j\omega(n-k)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h\{k\}e^{j\omega n}e^{-j\omega k} = e^{j\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h\{k\}e^{-j\omega k}$$

όποτε

$$y\{n\} = e^{j\omega n}H(e^{j\omega}) \quad (03.02)$$

όπου

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h\{k\}e^{-j\omega k} \quad (03.03)$$

$H(e^{j\omega})$ ονομάζεται *απόκριση συχνότητας* του συστήματος και αντιστοιχεί (όπως θα δούμε στη συνέχεια) στον μετασχηματισμό Fourier της ακολουθίας $h\{n\}$ (κρουστική απόκριση).

Η συνάρτηση $H(e^{j\omega})$ είναι περιοδική συνάρτηση του ω με περίοδο 2π :

$H(e^{j(\omega+2\pi)}) = H(e^{j2\pi}e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})$. Η συνάρτηση $H(e^{j\omega})$ είναι μια μιγαδική συνάρτηση επομένως μπορεί να γραφεί

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\Phi(e^{j\omega})} \quad (03.04)$$

όπου $H_R(e^{j\omega})$, $H_I(e^{j\omega})$, $|H(e^{j\omega})|$ και $\Phi(\omega)$ το πραγματικό, φανταστικό, μέτρο και φάση της συνάρτησης $H(e^{j\omega})$ αντιστοιχα.

Παράδειγμα 03.1:

Να βρεθεί η απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος σε ημιτονοειδείς διεγέρσεις της μορφής $x\{n\} = A\cos(\omega_0 n + \phi)$.

Λύση

Ως γνωστό ένα συνήμιτονο μπορεί να γραφεί ως άθροισμα μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων:

$$x\{n\} = A\cos\{\omega_0 n + \phi\} = \frac{A}{2}e^{j(\omega_0 n + \phi)} + \frac{A}{2}e^{-j(\omega_0 n + \phi)} = \frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}$$

οπότε η απόκριση $y\{n\}$, σύμφωνα με τη σχέση (03.02) θα δίνεται από τη σχέση

$$y\{n\} = \frac{A}{2} \left[H(e^{j\omega_0})e^{j\phi}e^{j\omega_0 n} + H(e^{-j\omega_0})e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n} \right] \quad (03.05)$$

αν $h\{n\}$ είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών τότε $H(e^{-j\omega_0}) = H^*(e^{j\omega_0})$ και η σχέση (03.05) γίνεται

$$y\{n\} = \frac{A}{2} \left| H(e^{j\omega_0}) \right| \left[e^{j\Phi(\omega)} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} + e^{-j\Phi(\omega)} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n} \right] = A \left| H(e^{j\omega_0}) \right| \cos\{\omega_0 n + \phi + \Phi(\omega_0)\} \quad (03.06)$$

Εφαρμογή

Άσκηση 2.33 / Βιβλίο Oppenheim

Είναι όπως στο παράδειγμα με $A=1$, $\phi=\pi/4$, $\omega_0=3\pi/2$. Άρα

$$y\{n\} = A \left| H(e^{j\frac{3\pi}{2}}) \right| \cos\left\{ \frac{3\pi}{2}n + \frac{\pi}{4} + \Phi\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right\} = A \cos\left\{ \frac{3\pi}{2}n + \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} \right\} = A \cos\left\{ \frac{3\pi}{2}n + \frac{11\pi}{12} \right\}$$

(αφού $\left| H(e^{j\frac{3\pi}{2}}) \right| = 1$ και $\Phi(3\pi/2) = 2\pi/3$ (όπως φαίνεται από το Σχήμα P2.33.1))

03.2 Αναπαράσταση ακολουθιών με τον μετασχηματισμό Fourier

Από το παράδειγμα 03.1 προκύπτει ότι θα ήταν χρήσιμο σε πολλές περιπτώσεις να μπορούμε να εκφράσουμε μια ακολουθία $x\{n\}$ ως άθροισμα μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων γιατί μπορεί με αυτό τον τρόπο να υπολογίζεται εύκολα η απόκριση ΓΧΑ συστημάτων με βάση τη σχέση (03.02). Αποδεικνύεται ότι

πολλές ακολουθίες (συγκεκριμένα για όσες ισχύει $\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x\{n\}| \right) < \infty$) μπορούν να εκφραστούν ως άθροισμα μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων με βάση τις σχέσεις (03.07)- (03.08), οι οποίες αποτελούν το ζεύγος μετασχηματισμού Fourier διακριτών σημάτων:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\{n\} e^{-j\omega n} \quad (\text{ευθύς μετασχηματισμός Fourier της ακολουθίας } x\{n\}) \quad (03.07)$$

$$x\{n\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (\text{αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier}) \quad (03.08)$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $X(e^{j\omega})$ είναι μια συνεχής συνάρτηση του ω σε αντίθεση με την αρχική ακολουθία $h\{n\}$ που είναι μια συνάρτηση διακριτής μεταβλητής.

Επομένως με τον μετασχηματισμό αυτό περνούμε σε ένα σήμα συνεχούς μεταβλητής. Η εναλλαγή:

Σήμα διακριτής μεταβλητής \leftrightarrow Σήμα συνεχούς μεταβλητής

Η συνάρτηση $X(e^{j\omega})$ είναι μια μιγαδική συνάρτηση επομένως μπορεί να γραφεί

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}) = \left| X(e^{j\omega}) \right| e^{j\Theta(e^{j\omega})} \quad (03.09)$$

όπου $X_R(e^{j\omega})$, $X_I(e^{j\omega})$, $\left| X(e^{j\omega}) \right|$ και $\Theta(\omega)$ το πραγματικό, φανταστικό, μέτρο και φάση της συνάρτησης $X(e^{j\omega})$ αντίστοιχα.

Η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος προκύπτει από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της απόκρισης συχνότητας,

$$h\{n\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (03.10)$$

Στις περισσότερες περιπτώσεις ο υπολογισμός του μετασχηματισμού Fourier (ευθύ και αντί-στροφου) γίνεται ευκολότερα χρησιμοποιώντας κάποια γνωστά ζεύγη, τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier και κάποια βασικά θεωρήματα. Για το σκοπό αυτό ορίζουμε τους παρακάτω συμβολισμούς:

$$X(e^{j\omega}) = \mathfrak{F}\{x\{n\}\}, \text{ με τον οποίο συμβολίζουμε τον μετασχηματισμό Fourier της ακολουθίας } x\{n\}$$

$$x\{n\} = \mathfrak{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\}, \text{ με τον οποίο συμβολίζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier}$$

$$x\{n\} \leftrightarrow X(e^{j\omega}), \text{ με τον οποίο συμβολίζουμε ένα ζεύγος του μετασχηματισμού Fourier}$$

03.3 Μορφές Μετασχηματισμών Fourier

Σε προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε τον ορισμό της απόκρισης συχνότητας ενός ΓΧΑ-συστήματος. Ελέχθη ότι ο μετασχηματισμός

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h\{k\}e^{-j\omega k} \quad (03.11)$$

που ορίζεται από την (03.01) ονομάζεται μετασχηματισμός Fourier της ακολουθίας $h\{k\}$. Παρατηρούμε ότι πρόκειται για μια συνεχή συνάρτηση του ω σε αντίθεση με την αρχική ακολουθία $h\{n\}$ που είναι μια συνάρτηση διακριτής μεταβλητής.

Επομένως με τον μετασχηματισμό αυτό περνούμε σε ένα σήμα συνεχούς μεταβλητής. Η εναλλαγή:

Σήμα διακριτής μεταβλητής \leftrightarrow Σήμα συνεχούς μεταβλητής

έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον και σχετίζεται με την περιοδικότητα των σημάτων. Για να γίνει αυτό θα προσπαθήσουμε να δούμε το μετασχηματισμό Fourier συνολικά αρχίζοντας από τα σήματα συνεχούς χρόνου. Αυτό γίνεται για λόγους βαθύτερης κατανόησης του τι συμβαίνει στα σήματα διακριτού χρόνου που είναι το βασικό αντικείμενο του μαθήματος. Ορίζουμε στη συνέχεια ένα αριθμό μεγεθών που θα μας βοηθήσουν στην ανάλυση που θα ακολουθήσει. Τα μεγέθη αυτά δίνονται στον παρακάτω Πίνακα:

t	Συνεχής χρόνος
Ω	Συνεχής συχνότητα (κυκλική συχνότητα, $\Omega=2\pi F$)
T_s	Χρονική απόσταση μεταξύ δειγμάτων σήματος διακριτού χρόνου
Φ_s	Απόσταση μεταξύ αρμονικών στο χώρο της συχνότητας όταν υπάρχει διακριτή υφή
T	Περίοδος ενός σήματος όταν είναι περιοδικό στο χρόνο
Ω_s	Κυκλική συχνότητα δειγματοληψίας χρονικού σήματος
N	Αριθμός δειγμάτων που αντιστοιχεί σε μια χρονική περίοδο T
ω	Σχετική («Διακριτή») κυκλική συχνότητα

Με βάση τα προηγούμενα θα ισχύουν επομένως οι εξής σχέσεις:

$$\omega=2\pi f, \Omega = 2\pi F, T=NT_s, \Omega = 2\pi F, \omega=\Omega T_s$$

Θα διακρίνουμε στην συνέχεια τέσσερις περιπτώσεις που θα εξετασθούν πιο συγκεκριμένα:

Συνεχής χρόνος \leftrightarrow Συνεχής συχνότητα

Συνεχής χρόνος \leftrightarrow “Διακριτή” συχνότητα

Διακριτός χρόνος ↔ Συνεχής συχνότητα

Διακριτός χρόνος ↔ “Διακριτή” συχνότητα

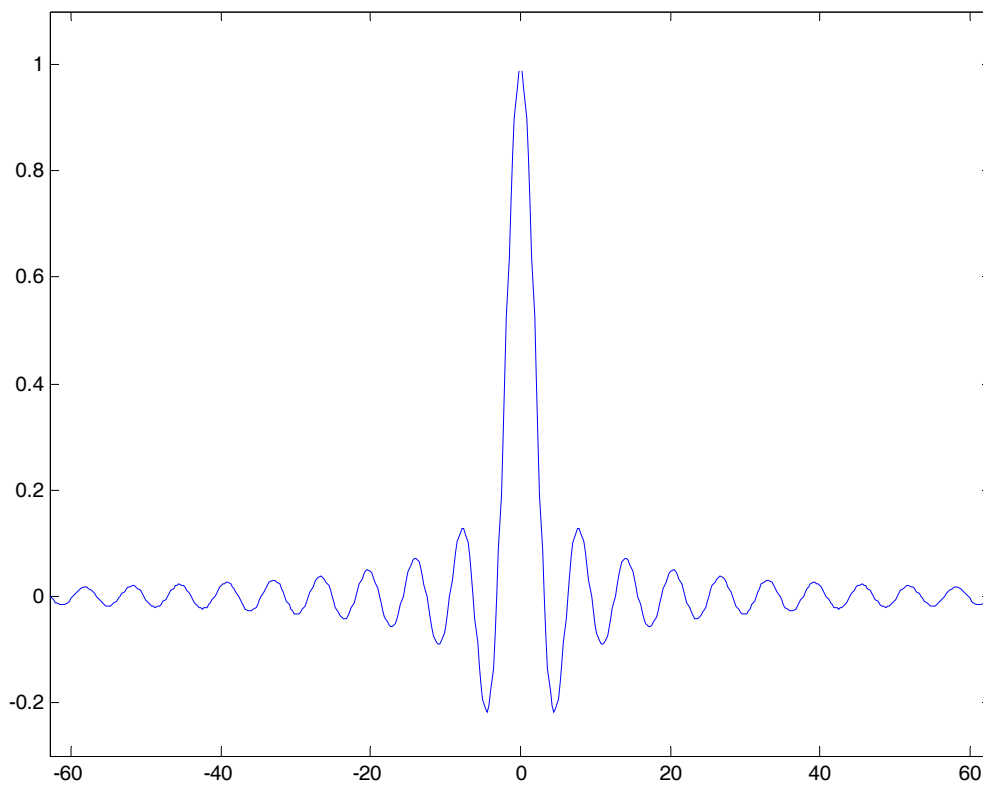
03.3.1 Συνεχής Χρόνος και Συνεχής Συχνότητα:

Το πέρασμα από το χώρο του χρόνου στο χώρο της συχνότητας και αντίστροφα γίνεται με το ζευγάρι των σχέσεων

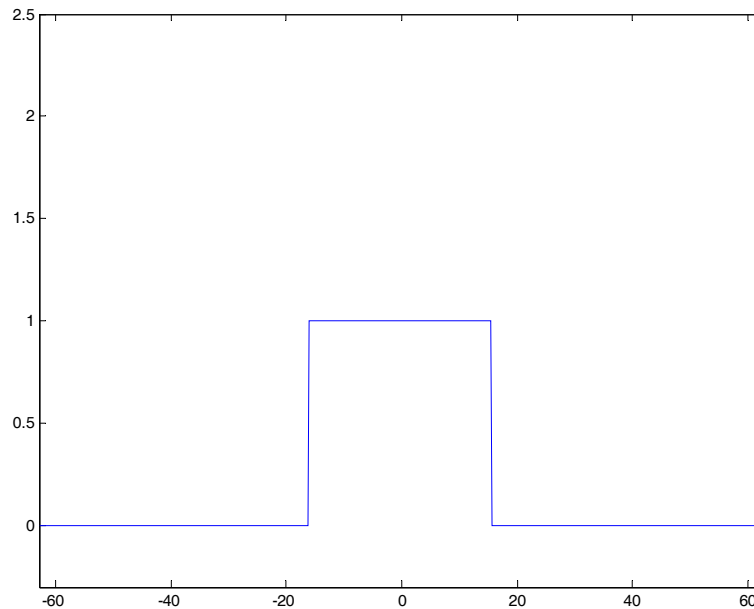
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (03.12)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (03.13)$$

Τα Σχήματα 1 και 2 δίνουν μια σχηματική παράσταση του περάσματος από τον ένα χώρο στον άλλο στην περίπτωση αυτή. Πρόκειται για ένα απεριοδικό σήμα $x(t)$ (συνάρτηση δειγματοληψίας) το οποίο έχει συνεχή μετασχηματισμό Fourier (που αντιστοιχεί σε ένα low pass φίλτρο).



Σχήμα 9: Το σήμα $x(t)=\sin(t)/t$ στο πεδίο του χρόνου



Σχήμα 10: Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)$ (ο οριζόντιος άξονας απεικονίζει την κυκλική συχνότητα)

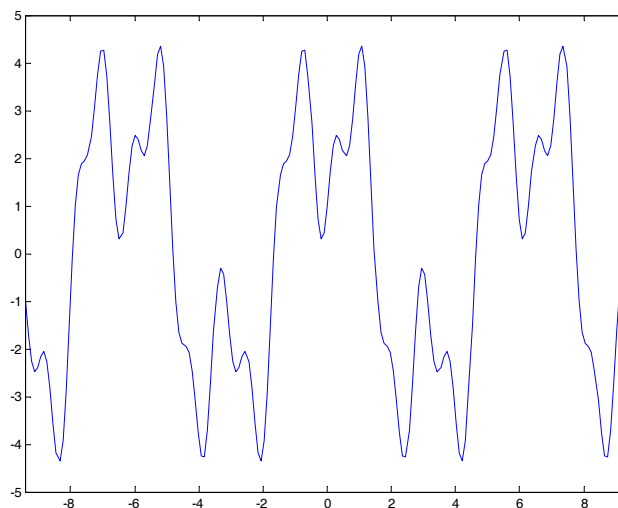
03.3.2 Συνεχής Χρόνος και Διακριτή Συχνότητα

Πρόκειται για τη γνωστή έννοια των σειρών Fourier. Στην περίπτωση περιοδικής συνάρτησης συνεχούς χρόνου με περίοδο T το ζευγάρι μετασχηματισμού είναι λίγο διαφορετικό από το προηγούμενο:

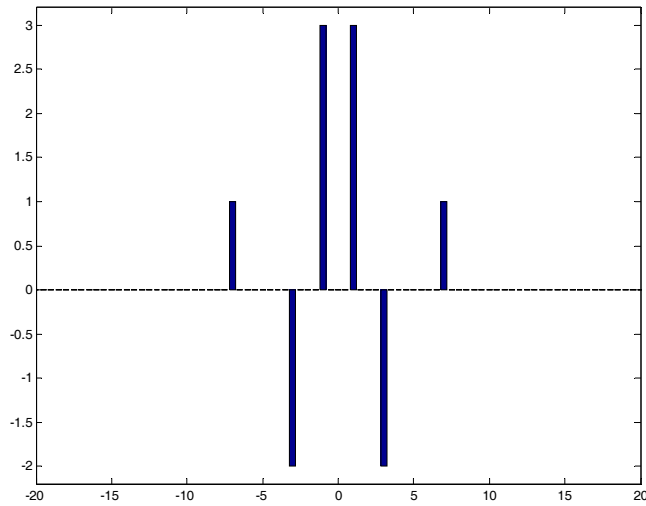
$$X(m\Omega_s) = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jm\Omega_s t} dt \quad (03.14)$$

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(m\Omega_s) e^{jm\Omega_s t} \quad (03.15)$$

Το γεγονός ότι το σήμα συνεχούς χρόνου είναι τώρα περιοδικό έχει σαν αποτέλεσμα ο μετασχηματισμός Fourier να εξαναγκάζεται να γίνει ένα σήμα «διακριτής συχνότητας». Στα Σχήματα 3 και 4 φαίνεται το περιοδικό σήμα $x(t)=3\cos(\omega t)-2\cos(3\omega t)+\cos(7\omega t)$ και το αντίστοιχο φάσμα του μετασχηματισμού Fourier.



Σχήμα 11: Το περιοδικό σήμα $x(t)=3\cos(\omega t)-2\cos(3\omega t)+\cos(7\omega t)$ στο πεδίο του χρόνου



Σχήμα 12: Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)$ (ο οριζόντιος άξονας απεικονίζει την κυκλική συχνότητα)

Επιγραμματικά μπορούμε να πούμε ότι μία περιοδική συνάρτηση συνεχούς χρόνου οδηγεί σε μία απειροδική συνάρτηση διακριτής συχνότητας.

Σε επόμενα μαθήματα θα έχουμε την ευκαιρία να δούμε και τον Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier (DFT - Discrete Fourier Transform) ο οποίος έδωσε τη δυνατότητα πραγματοποίησης στον Η/Υ κάθε είδους φασματικών υπολογισμών.

03.4 Ζεύγη Μετασχηματισμού Fourier

Ακολουθία	Μετασχηματισμός Fourier
$\delta\{n\}$	1
$\delta\{n-n_0\}$	$e^{-j\omega n_0}$
1 ($-\infty < n < \infty$)	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi k)$
$a^n u\{n\}$ ($ a < 1$)	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$
$u\{n\}$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi k)$
$(n+1)a^n u\{n\}$ ($ a < 1$)	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$
$\frac{r^n \sin\{\omega_p(n+1)\}}{\sin\{\omega_p\}} u\{n\}$ ($ r < 1$)	$\frac{1}{1 - 2r \cos\{\omega_p\} e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$
$\frac{\sin\{\omega_c n\}}{\pi}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \omega \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases}$

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$e^{j\omega_0 n}$$

$$\cos(\omega_0 n + \varphi)$$

$$\frac{\sin\{\omega \frac{M+1}{2}\}}{\sin\{\frac{\omega}{2}\}} e^{-j\omega \frac{M}{2}}$$

$$\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi\kappa)$$

$$\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \left\{ \pi e^{j\phi} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi\kappa) + \pi e^{-j\phi} \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi\kappa) \right\}$$

Πίνακας 1: Ζεύγη Μετασχηματισμών Fourier

03.4.1 Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier

Έστω $X(e^{j\omega}) = \mathfrak{F}\{x\{n\}\}$, ο μετασχηματισμός Fourier της ακολουθίας $x\{n\}$ ο οποίος μπορεί να γραφεί:

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\Theta(e^{j\omega})}$$

Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

(α) $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$ (Ο μετασχηματισμός Fourier είναι συζυγοσυμμετρικός - conjugate symmetric)

(b) αν $x\{n\}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών τότε

- $X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$ (το πραγματικό μέρος του μετασχηματισμού Fourier είναι άρτια συνάρτηση της συχνότητας)
- $X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$ (το φανταστικό μέρος του μετασχηματισμού Fourier είναι περιττή συνάρτηση της συχνότητας)
- $|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})|$ (το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier είναι άρτια συνάρτηση της συχνότητας)
- $\Theta(\omega) = -\Theta(-\omega)$ (η φάση του μετασχηματισμού Fourier είναι περιττή συνάρτηση της συχνότητας)

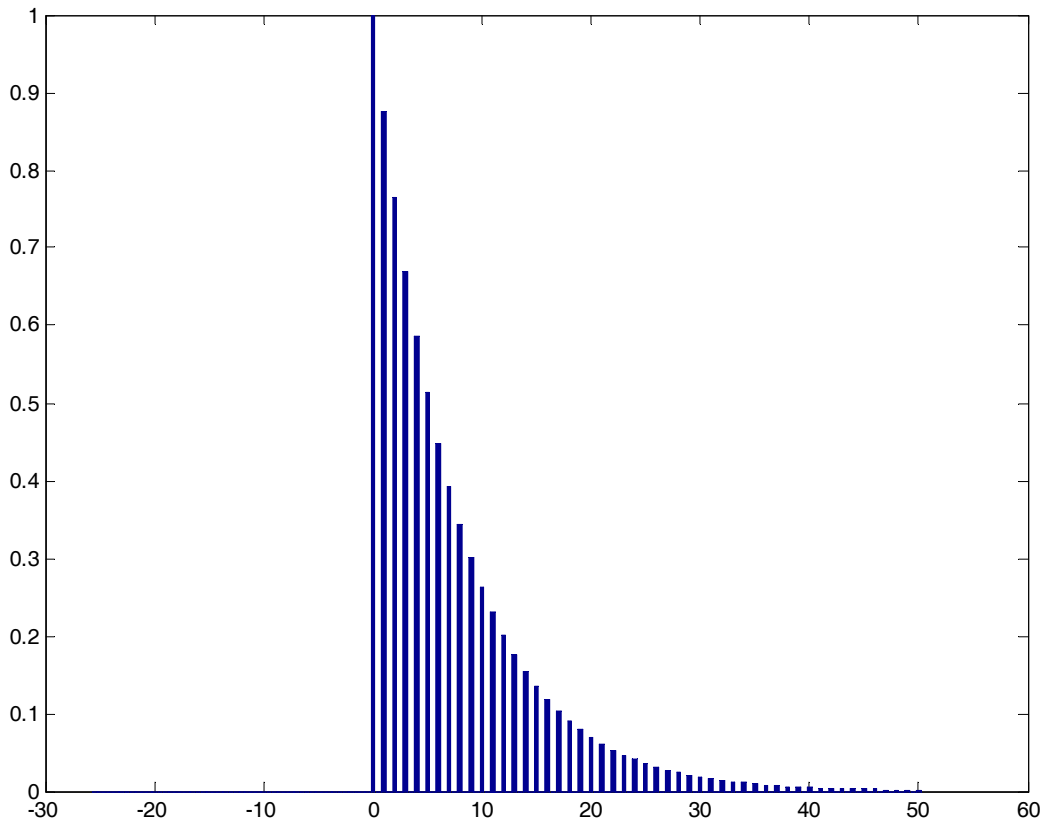
03.5 Θεωρήματα του Μετασχηματισμού Fourier

	Ακολουθία	Μετασχηματισμός Fourier
	$x\{n\}, y\{n\}$	$X(e^{j\omega}), Y(e^{j\omega})$
Γραμμικότητα	$ax\{n\} + by\{n\}$	$A X(e^{j\omega}) + b Y(e^{j\omega})$
Χρονική μετάθεση	$x\{n-n_0\}$	$e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$
Μετάθεση συχνότητας	$e^{-j\omega_0 n} x\{n\}$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
Διαμόρφωση	$x\{n\} \cos(\omega_0 n)$	$\frac{1}{2} \{X(e^{j(\omega-\omega_0)}) + X(e^{j(\omega+\omega_0)})\}$
Συμμετρία μεταξύ των χώρων ορισμού	$x\{-n\}$	$X(e^{-j\omega})$ και $X^*(e^{j\omega})$ αν $x\{n\}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών
Παραγωγή στο χώρο της συχνότητας	$Nx\{n\}$	$j \frac{X(e^{j\omega})}{d\omega}$

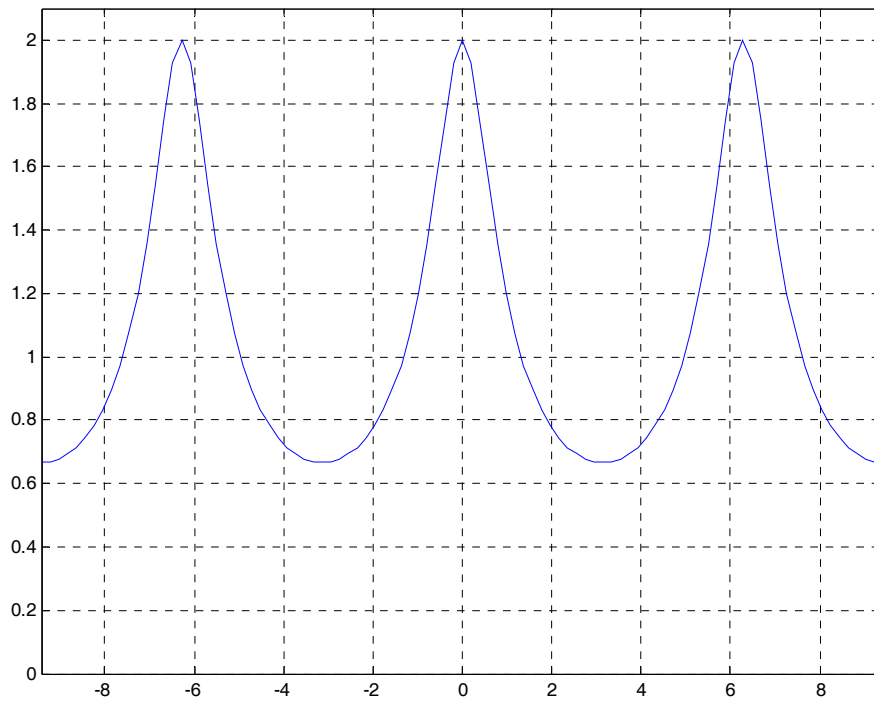
Συνέλιξη	$x\{n\} * y\{n\}$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
Γινόμενο	$x\{n\}y\{n\}$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$ (Περιοδική Συνέλιξη)
Θεώρημα Parseval		$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x\{n\} ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$

Πίνακας 2: Θεωρήματα του Μετασχηματισμού Fourier

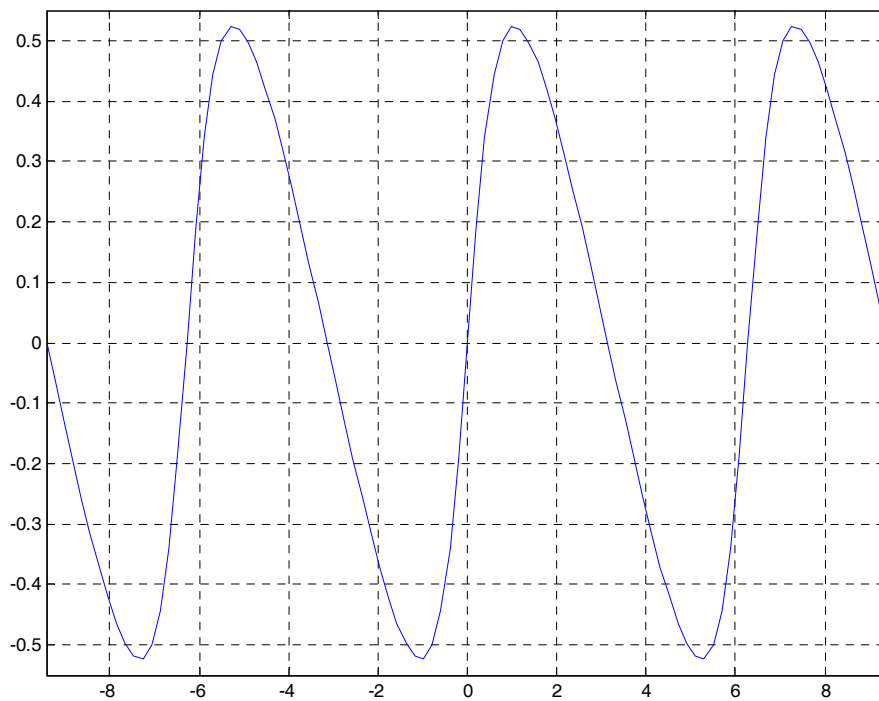
Η συνάρτηση $|X(e^{j\omega})|^2$ ονομάζεται *Φάσμα Ενεργειακής Πυκνότητας* της ακολουθίας $x\{n\}$ και απεικονίζει πως η ενέργεια του διακριτού σήματος $x\{n\}$ κατανέμεται στις διάφορες συχνότητες.



Σχήμα 13: Το σήμα $x\{n\} = \left(\frac{7}{8}\right)^n u\{n\}$

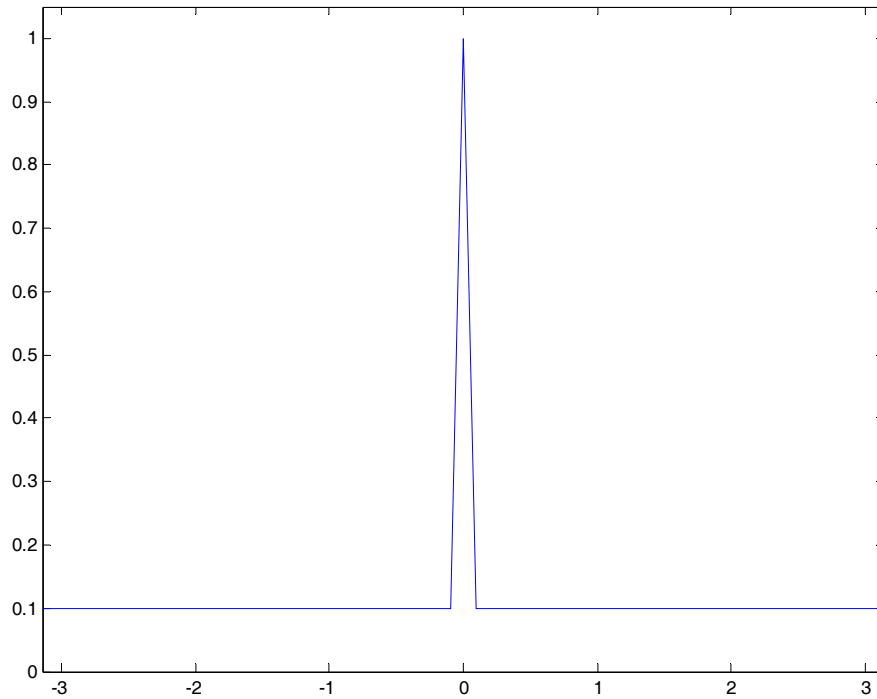


Σχήμα 14: Το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier της ακολουθίας $x\{n\}$ ($H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{7}{8}e^{-j\omega}}$)

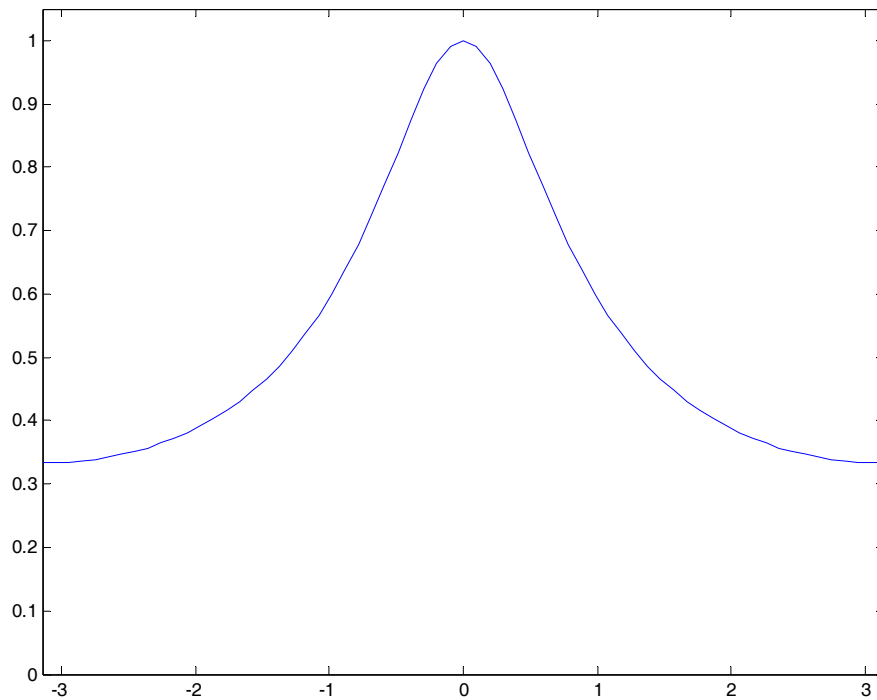


Σχήμα 15: Η φάση του μετασχηματισμού Fourier της ακολουθίας $x\{n\}$

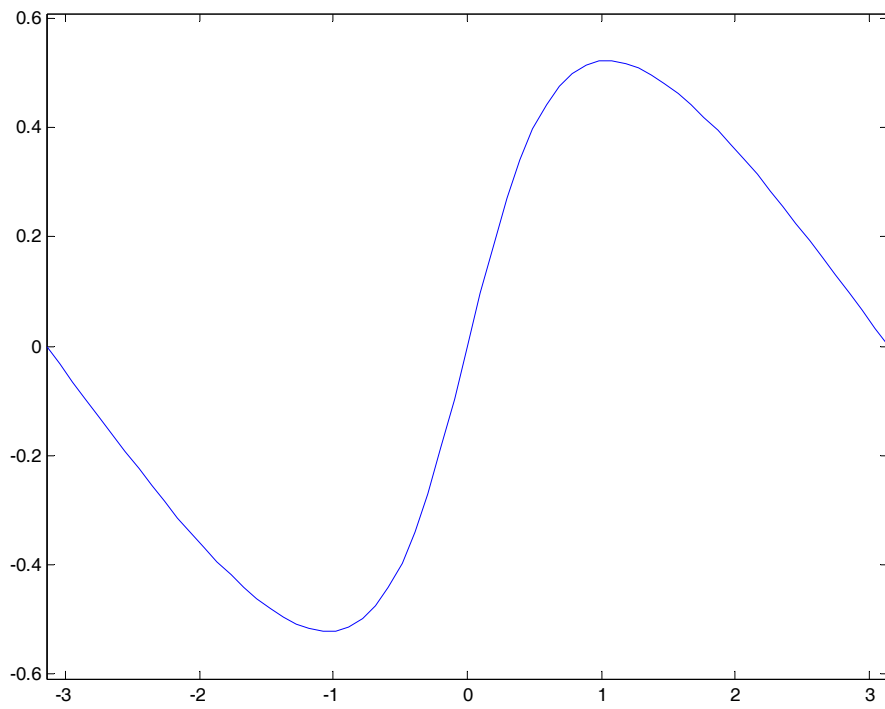
03.5.1 Γινόμενο ακολουθιών και μετασχηματισμός – το φαινόμενο του παραθύρου



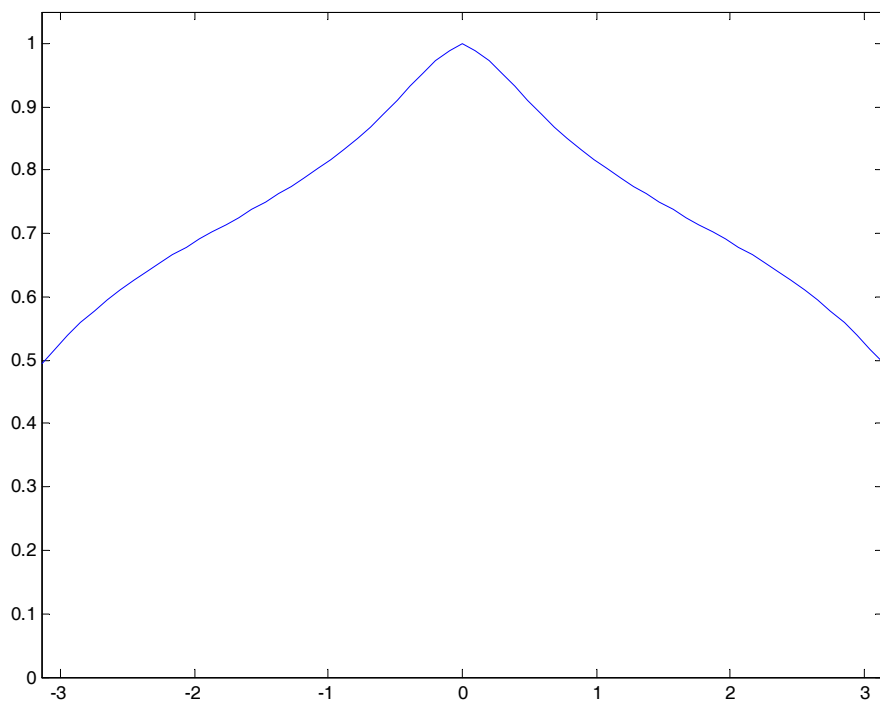
Σχήμα 16: Το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier της ακολουθίας $h(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ με $M=64$



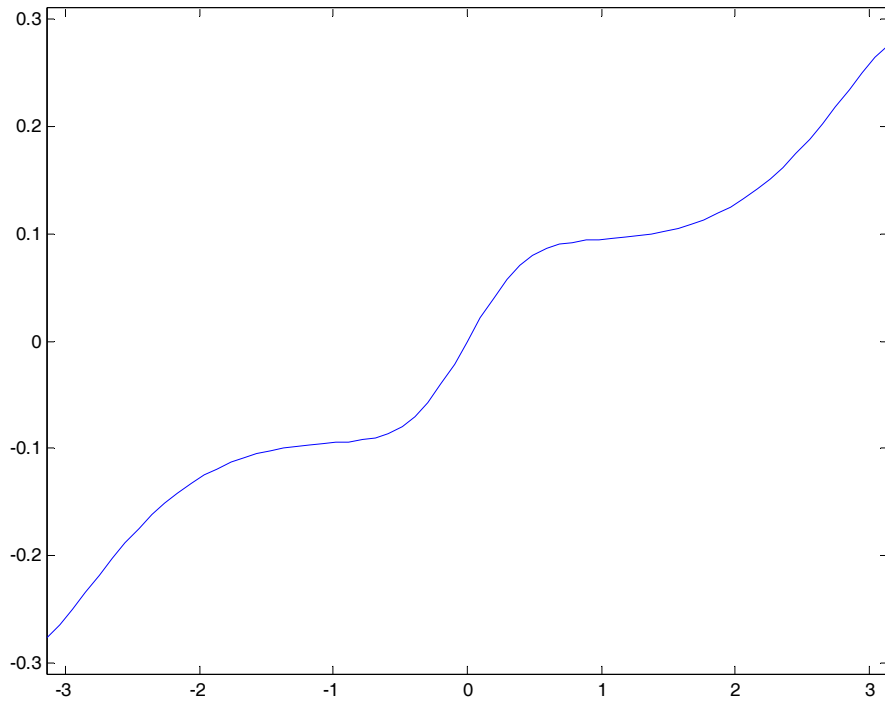
Σχήμα 17: Το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier της ακολουθίας $x\{n\} = \left(\frac{7}{8}\right)^n u\{n\}$



Σχήμα 18: Η φάση του μετασχηματισμού Fourier της ακολουθίας $x\{n\} = \left(\frac{7}{8}\right)^n u\{n\}$



Σχήμα 19: Το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier της ακολουθίας $y\{n\} = x\{n\}h\{n\}$



Σχήμα 20: Η φάση του μετασχηματισμού Fourier της ακολουθίας $y\{n\}=x\{n\}h\{n\}$

ΜΑΘΗΜΑ 04: ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ

04.1 Εισαγωγή

Σήματα *διακριτού χρόνου* προκύπτουν σε πολλές περιπτώσεις από δειγματοληψία σημάτων συνεχούς χρόνου. Ένα πολύ σημαντικό γεγονός είναι ότι κάτω από κάποιες προϋποθέσεις τα σήματα συνεχούς χρόνου μπορούν να ανακατασκευαστούν από τα δείγματα τους.

04.1.1 Περιοδική δειγματοληψία

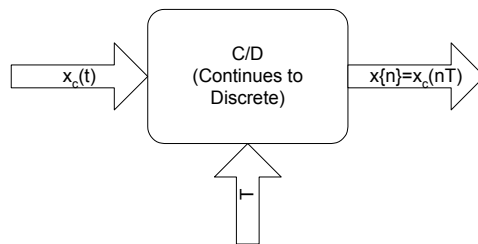
Στην περιοδική δειγματοληψία λαμβάνονται δείγματα του σήματος συνεχούς χρόνου ανά σταθερή χρονική περίοδο. Επομένως το σήμα διακριτού χρόνου $x\{n\}$ και το σήμα συνεχούς χρόνου $x_c\{t\}$ σχετίζονται μέσω της παρακάτω ισότητας:

$$x\{n\} = x_c(nT), \quad -\infty < n < \infty \tag{04.01}$$

όπου T ονομάζεται *περίοδος δειγματοληψίας* και είναι σταθερή ως προς το χρόνο.

$$F_s = \frac{1}{T} \quad \Omega_s = 2\pi F_s$$

F_s , Ω_s ονομάζονται *συχνότητα δειγματοληψίας* (δείγματα/sec) και *κυκλική συχνότητα δειγματοληψίας* (radians/sec).



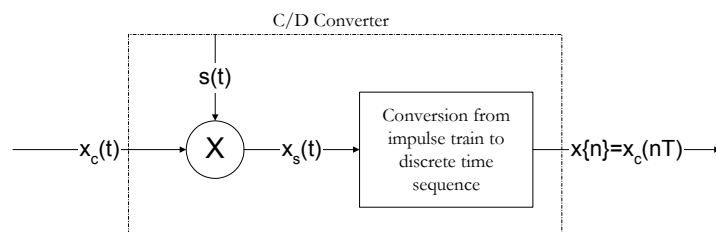
Σχήμα 21: Ιδεώδης Δειγματολήπτης

04.2 Δειγματοληψία -Θεώρημα Nyquist

Έστω η ακολουθία κρουστικών συναρτήσεων παλμών (*impulse train*) η οποία είναι ένα σήμα συνεχούς χρόνου δεδομένου ότι ορίζεται για κάθε t (παρότι έχει μη μηδενικές τιμές για τιμές του t οι οποίες είναι ακέραια πολλαπλάσια του T) :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \tag{04.02}$$

Η διαδικασία της δειγματοληψίας μπορεί να μοντελοποιηθεί με βάση το παρακάτω σχήμα:



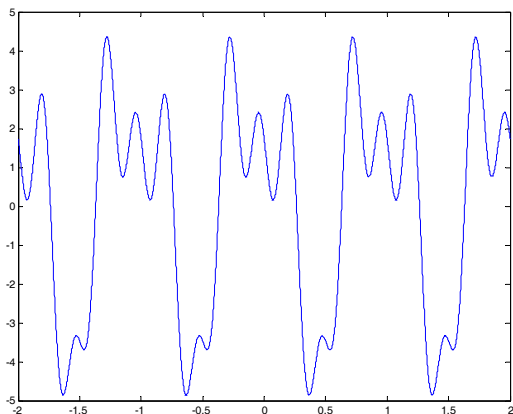
Σχήμα 22: Δειγματοληψία με χρήση της ακολουθίας κρουστικών συναρτήσεων

Το δειγματοληπτημένο σήμα συνεχούς χρόνου $x_s(t)$ προκύπτει ως το γινόμενο του αρχικού σήματος με την ακολουθία κρουστικών συναρτήσεων:

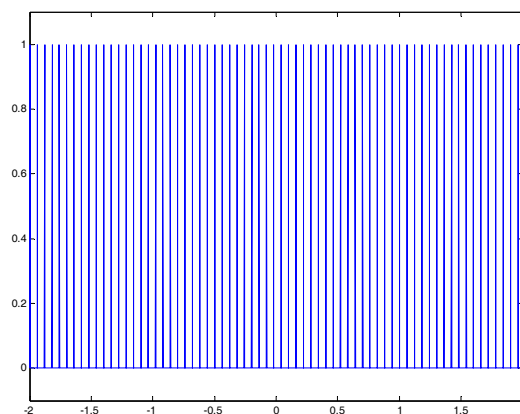
$$x_s(t) = x_c(t)s(t) = x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t - nT) \quad (04.03)$$

Το διακριτό σήμα $x\{n\}$ προκύπτει αποθηκεύοντας μόνο τις τιμές $x_c(nT)$ όπως στη σχέση (04.01).

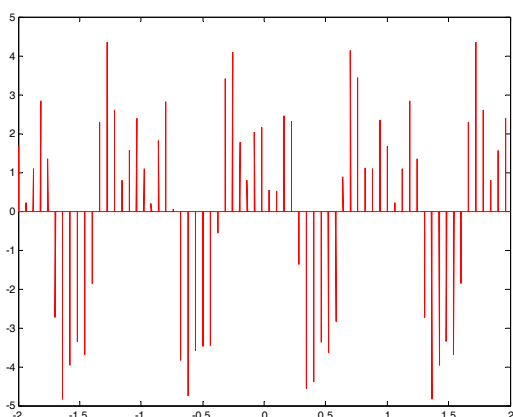
Το επόμενο σχήμα επιδεικνύει τα διάφορα σήματα που εμπλέκονται στη διαδικασία της δειγματοληψίας.



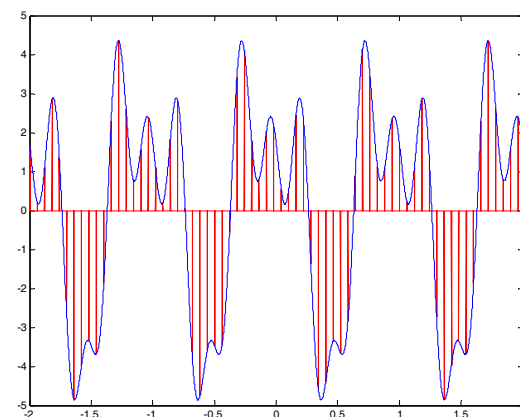
(α)



(β)



(γ)



(δ)

Σχήμα 23: (α) Το αρχικό σήμα, (β) η ακολουθία κρουστικών συναρτήσεων, (γ) το δειγματοληπτημένο (συνεχούς χρόνου) σήμα, (δ) το αρχικό και το δειγματοληπτημένο σήμα

Τα σήματα $s(t)$ και $x_c(t)$ είναι σήματα συνεχούς χρόνου και έχουν μετασχηματισμούς Fourier συνεχούς χρόνου:

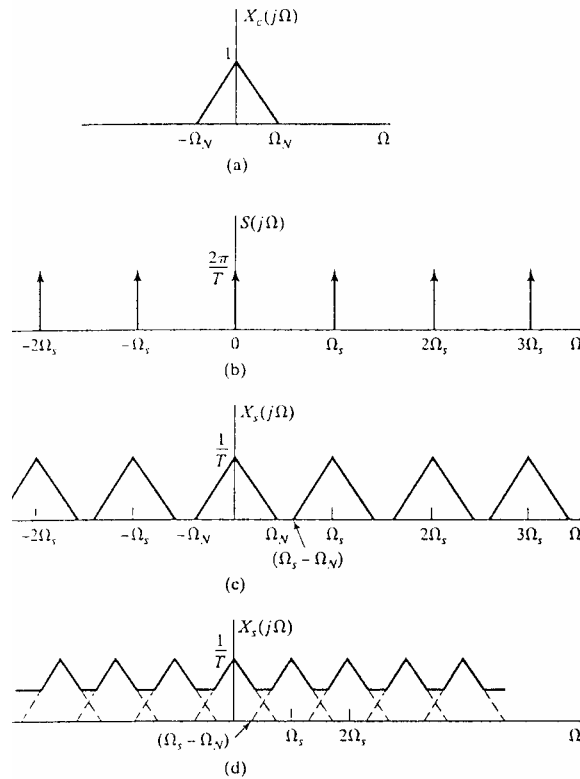
$$S(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s), \text{ και } X_c(j\Omega) \quad (04.04)$$

Όπως φαίνεται από τη σχέση (04.04) ο μετασχηματισμός Fourier της ακολουθίας κρουστικών συναρτήσεων είναι μια ακολουθία κρουστικών συναρτήσεων στο χώρο της συχνότητας Ω .

Ο συνεχής μετασχηματισμός Fourier του γινομένου δύο συναρτήσεων συνεχούς χρόνου δίνεται από τη συνέλιξη των μετασχηματισμών Fourier τους:

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_c(j\Omega) * S(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(\Omega - k\Omega_s) \quad (04.05)$$

Παρατηρούμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier του δειγματοληπτημένου σήματος $x_s(t)$ (συνεχούς χρόνου), είναι περιοδικά (με περίοδο Ω_s) επαναλαμβανόμενα αντίτυπα του μετασχηματισμού Fourier του αρχικού σήματος $x_c(t)$, όπως φαίνεται στο επόμενο Σχήμα.



Σχήμα 24: Το αποτέλεσμα της δειγματοληψίας στο χώρο της συχνότητας

Αν

- (a) το σήμα $x_c(t)$ έχει πεπερασμένο εύρος συχνοτήτων (εύρος ζώνης) δηλαδή $X_c(j\Omega)=0$ για $|\Omega| > \Omega_N$ και,
- (b) η κυκλική συχνότητα δειγματοληψίας ικανοποιεί τη σχέση $\Omega_s - \Omega_N \geq \Omega_N$ (ισοδύναμα $\Omega_s \geq 2\Omega_N$),

τότε το αρχικό σήμα $x(t)$ μπορεί να ανακατασκευαστεί από το δειγματοληπτημένο μέσω της χρήσης ενός ιδεατού βαθυπερατού φίλτρου με απόκριση συχνότητας που δίνεται από τη σχέση (βλέπε Σχήμα 5):

$$H(j\Omega) = \begin{cases} T, & |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0, & |\Omega| > \Omega_c \end{cases} \quad (04.06)$$

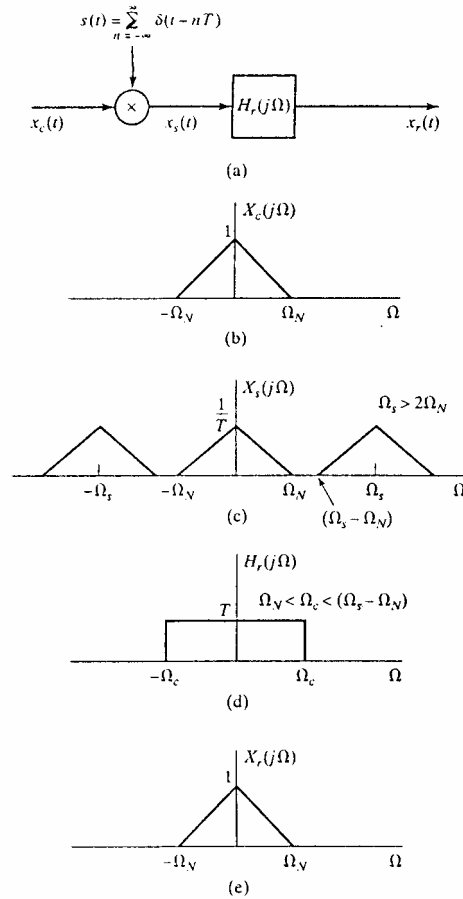
όπου η συχνότητα αποκοπής δίνεται από τη σχέση

$$\Omega_N \leq \Omega_c \leq (\Omega_s - \Omega_N) \quad (04.07)$$

Τα παραπάνω συνοψίζονται στο θεώρημα δειγματοληψίας του Nyquist:

Έστω το σήμα $x_c(t)$ με πεπερασμένο εύρος ζώνης, δηλαδή $X_c(j\Omega)=0$ για $|\Omega| > \Omega_N$, τότε το $x_c(t)$ μπορεί να υπολογιστεί από τα δείγματα του $x\{n\}=x_c(nT)$, n ακέραιος, $-\infty < n < \infty$ εφόσον η κυκλική συχνότητα δειγματοληψίας ικανοποιεί τη σχέση

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T} \geq 2\Omega_N \quad (04.08)$$



Σχήμα 25: Ανακατασκευή του αρχικού σήματος από το δειγματοληπτημένο με χρήση ιδεατού βαθυπερατού φίλτρου.

Αποδεικνύεται ότι ο μετασχηματισμός Fourier $X(e^{j\omega})$ του διακριτού σήματος $x\{n\}$ σχετίζεται με τον μετασχηματισμό Fourier του δειγματοληπτημένου σήματος $x_s(t)$ μέσω της σχέσης:

$$X_s(j\Omega) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\Omega T} \text{ οπότε}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi}{T}k\right) \quad (04.09)$$

04.3 Ανακατασκευή σημάτων πεπερασμένου εύρους από τα δείγματα τους

Είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο πως ανακατασκευάζεται το σήμα συνεχούς χρόνου μέσω του δειγματοληπτημένου σήματος $x_s(t)$ με χρήση βαθυπερατού φίλτρου. Το σήμα $x_s(t)$ προκύπτει από το διακριτό σήμα $x\{n\}$ μετά από «πολλαπλασιασμό» με την ακολουθία κρουστικών συναρτήσεων $s(t)$:

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\{n\} \delta(t - nT) \quad (04.10)$$

Σημείωση: Δεδομένου ότι το $s(t)$ είναι συνεχές σήμα και το $x\{n\}$ είναι διακριτό αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού στις χρονικές περιόδους όπου το $x\{n\}$ δεν ορίζεται θεωρείται μηδενικό - στην πράξη το σήμα $x_s(t)$ δημιουργείται από το σήμα $x\{n\}$ μέσω ενός δικτύου συγκράτησης.

Το βαθυπερατό φίλτρο που χρησιμοποιείται (βλέπε Σχήμα 6(α)) για την ανακατασκευή του αρχικού σήματος συνεχούς χρόνου έχει κρουστική απόκριση που δίνεται από τη σχέση:

$$h_r(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}t\right)}{\frac{\pi}{T}t} \quad (04.11)$$

η οποία αντιστοιχεί σε μη αιτιατό σύστημα το οποίο είναι μη πραγματοποιήσιμο στην πράξη. Το μπλοκ διάγραμμα ενός ιδεατού D/C (Discrete to Continues) μετατροπέα φαίνεται στο Σχήμα 6(β).

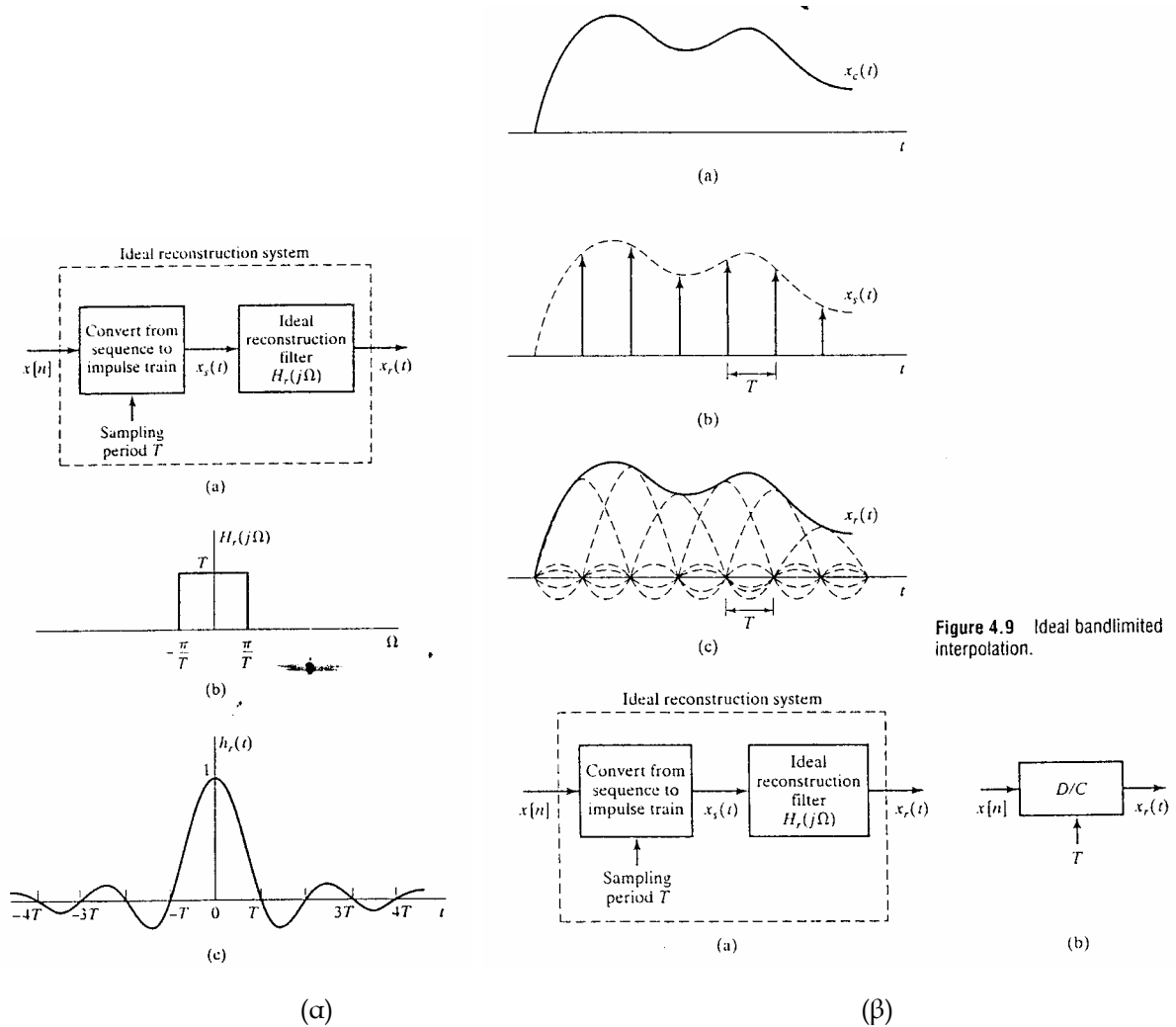


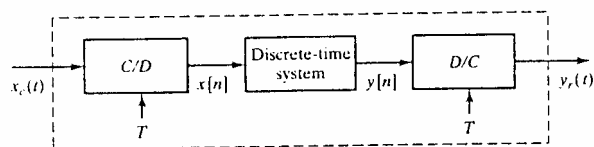
Figure 4.9 Ideal bandlimited interpolation.

Σχήμα 26: Ιδεατός D/C μετατροπέας

04.4 Ψηφιακή επεξεργασία Σημάτων Συνεχούς Χρόνου

Πολλές φορές η επεξεργασία συνεχών σημάτων μέσω των δειγμάτων τους είναι ευκολότερη, πιο αποτελεσματική και περισσότερο οικονομική.

Το Σχήμα 7 δίνει μια διάταξη που χρησιμοποιείται για το σκοπό αυτό. Το συνολικό σύστημα είναι ισοδύναμο ενός συστήματος συνεχούς χρόνου δεδομένου ότι μετασχηματίζει ένα σήμα συνεχούς χρόνου ($x_c(t)$) σε ένα άλλο σήμα συνεχούς χρόνου ($y_c(t)$).



Σχήμα 27: Ψηφιακή επεξεργασία σημάτων συνεχούς χρόνου

Για τον υπολογισμό της απόκρισης του συνολικού συστήματος χρησιμοποιείται ο μετασχηματισμός Fourier και συγκεκριμένα οι σχέσεις:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi}{T}k\right) \quad (4.12)$$

$$Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)Y(e^{j\Omega T}) = \begin{cases} TY(e^{j\Omega T}), & |\Omega| \leq \frac{\pi}{T} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (4.13)$$

σε συνδυασμό με το διακριτό σύστημα. Αν το διακριτό σύστημα είναι ΓΧΑ, τότε περιγράφεται από την απόκριση συχνότητας του $H(e^{j\omega})$. Στην περίπτωση αυτή ισχύει η σχέση

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

Αν το σήμα $x_c(t)$ έχει πεπερασμένο εύρος ζώνης και η συχνότητα δειγματοληψίας είναι σύμφωνη με το θεώρημα Nyquist τότε το συνολικό σύστημα θα περιγράφεται από τη σχέση:

$$Y_r(j\Omega) = H_{eff}(j\Omega)X_c(j\Omega) \quad (4.14)$$

όπου

$$H_{eff}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0, & |\Omega| \geq \frac{\pi}{T} \end{cases} \quad (4.15)$$

ΜΑΘΗΜΑ 05: Ο ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ Z

05.1 Εισαγωγή

Ο μετασχηματισμός Z για τα σήματα διακριτού χρόνου είναι το αντίστοιχο του μετασχηματισμού Laplace για σήματα συνεχούς χρόνου. Χρησιμοποιείται για την περιγραφή συστημάτων διακριτού χρόνου, και δίνει σαφή εικόνα για το αιτιατό και την ευστάθεια τους. Όπως προκύπτει από την ανάλυση που δίνεται στη συνέχεια ο μετασχηματισμός Fourier (ο οποίος χρησιμοποιείται για την ανάλυση συστημάτων στο χώρο της συχνότητας) είναι μια ειδική περίπτωση του μετασχηματισμού Z.

05.2 Ο Μετασχηματισμός Z

Ως γνωστό ο μετασχηματισμός Fourier ενός σήματος διακριτού χρόνου δίνεται από της σχέση:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\{n\}e^{-j\omega n} \quad (05.1)$$

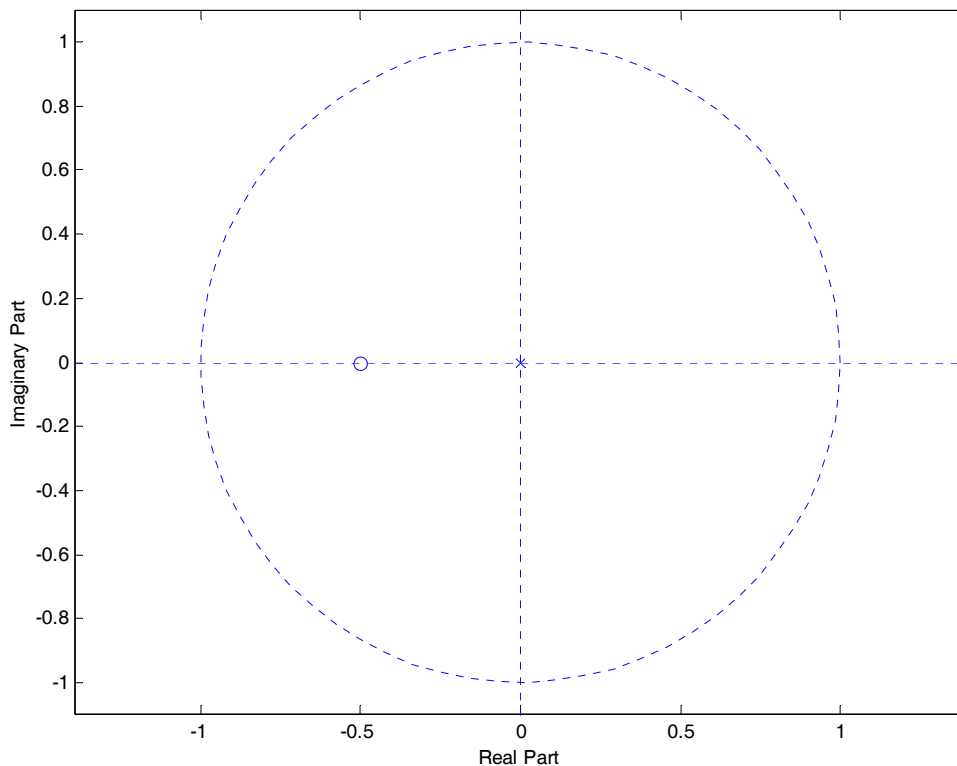
Ο μετασχηματισμός Z δίνεται από τη σχέση:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\{n\}z^{-n} \quad (05.2)$$

και συμβολίζεται $X(z) = Z\{x\{n\}\}$. Η μεταβλητή z είναι μιγαδικός αριθμός, δηλαδή $z=re^{j\omega}$, οπότε η σχέση (05.2) γράφεται:

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\{n\}(re^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x\{n\}r^{-n})e^{-j\omega n} \quad (05.3)$$

Προφανώς για $r=1$, ο μετασχηματισμός Z καταλήγει στον μετασχηματισμό Fourier.



Σχήμα 28: Ο μοναδιαίος κύκλος στο μιγαδικό επίπεδο

05.3 Σύγκλιση του Μετασχηματισμού Z

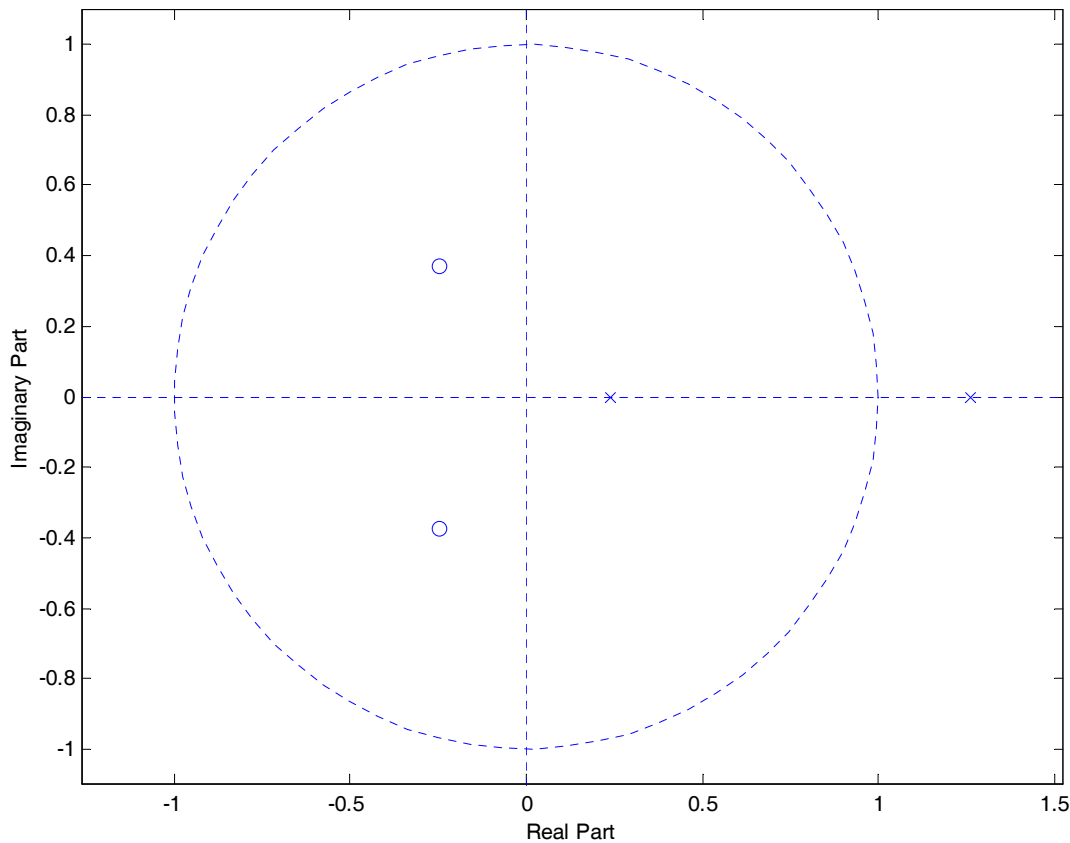
Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Z (ROC-Region Of Convergence) ορίζεται από τη σχέση

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x\{n\}| |z|^{-n} < \infty \quad (05.04)$$

Πολλές φορές ο μετασχηματισμός Z ενός διακριτού σήματος $x\{n\}$ εκφράζεται ως πηλίκο δύο πολυωνύμων:

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad (05.5)$$

Οι ρίζες του πολυωνύμου $P(z)$ αποτελούν τα μηδενικά της συνάρτησης $X(z)$ ενώ οι ρίζες του πολυωνύμου $Q(z)$ αποτελούν τους πόλους της συνάρτησης $X(z)$. Το διάγραμμα πόλων και μηδενικών της συνάρτησης $X(z)$ δίνει πληροφορίες για το αιτιατό του σήματος $x\{n\}$, την ευστάθεια, και την περιοχή σύγκλισης. Οι παρακάτω ιδιότητες του μετασχηματισμού Z εξηγούν τα παραπάνω.



Σχήμα 29: Διάγραμμα πόλων μηδενικών

05.4 Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Z

Ιδιότητα 1: Η περιοχή σύγκλισης οποιουδήποτε μετασχηματισμού Z είναι είτε ένας δακτύλιος είτε ένας δίσκος στο μιγαδικό επίπεδο με κέντρο την αρχή των αξόνων $0 \leq r_R < |z| < r_L \leq \infty$

Ιδιότητα 2: Ο μετασχηματισμός Fourier του διακριτού σήματος $x\{n\}$ υπάρχει εφόσον η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης $X(z)$ περιέχει τον μοναδιαίο κύκλο.

Ιδιότητα 3: Η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης $X(z)$ δεν μπορεί να περιέχει πόλους.

Ιδιότητα 4: Η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης $X(z)$ είναι συνεχής (δεν αποτελείται από μη συνδεδεμένα τμήματα).

Ιδιότητα 5: Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Z ενός πεπερασμένου διάρκειας σήματος είναι όλο το μιγαδικό επίπεδο με εξαίρεση είτε την αρχή των αξόνων (όταν το σήμα $x\{n\}$ είναι μη μηδενικό για κάποιες τιμές του $n>0$) είτε το άπειρο (όταν το σήμα $x\{n\}$ είναι μη μηδενικό για κάποιες τιμές του $n<0$).

Ιδιότητα 6: Ένα διακριτό σύστημα με κρουστική απόκριση $h\{n\}$ είναι ευσταθές (κατά BIBO) αν η περιοχή σύγκλισης του αντίστοιχου μετασχηματισμού Z ($H(z)$) περιέχει τον μοναδιαίο κύκλο.

Ιδιότητα 7: Ένα διακριτό σύστημα με κρουστική απόκριση $h\{n\}$ είναι αιτιατό ($h\{n\}=0$ για $n<0$) αν η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Z ($H(z)$) εκτείνεται από τον κύκλο που αντιστοιχεί στο μέτρο του μεγαλύτερου πόλου (αυτού με το μεγαλύτερο μέτρο) έως το άπειρο, δηλαδή ROC: $|z| > r_R$.

05.5 Ζεύγη Μετασχηματισμού Z

Ακολουθία	Μετασχηματισμός Fourier	ROC
$\delta\{n\}$	1	Όλο το μιγαδικό επίπεδο
$\delta\{n-n_0\}$	z^{-n_0}	Όλο το μιγαδικό επίπεδο με εξαίρεση το $ z = 0$ αν $n_0>0$ και $ z = \infty$ αν $n_0<0$
$u\{n\}$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z > 1$
$-u\{-n-1\}$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z < 1$
$a^n u\{n\}$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z > a$
$-a^n u\{-n-1\}$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z < a$

Πίνακας 3: Ζεύγη Μετασχηματισμών Z