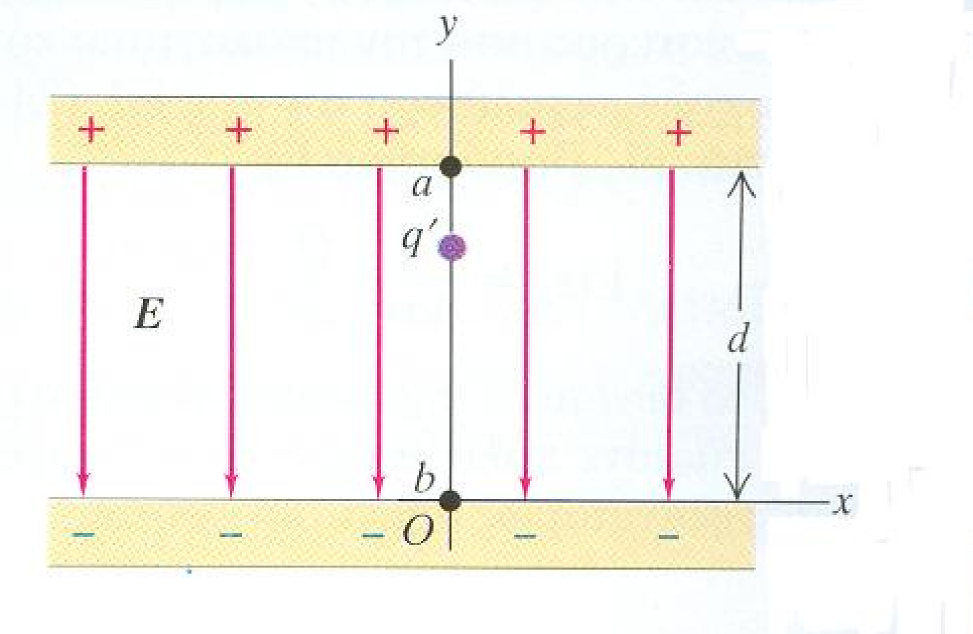
Ηλεκτρική Δυναμική Ενέργεια

• Ένα ζεύγος παράλληλων φορτισμένων μεταλλικών πλακών παράγει ομογενές ηλεκτρικό πεδίο Ε. Το έργο που παράγεται πάνω σε θετικό δοκιμαστικό φορτίο είναι:



$$W_{a\to b} = Fl = q'El \Rightarrow$$

$$W_{a\to b} = q'Ey_a - q'Ey_b$$

Ορίζοντας την δυναμική ενέργεια σαν:

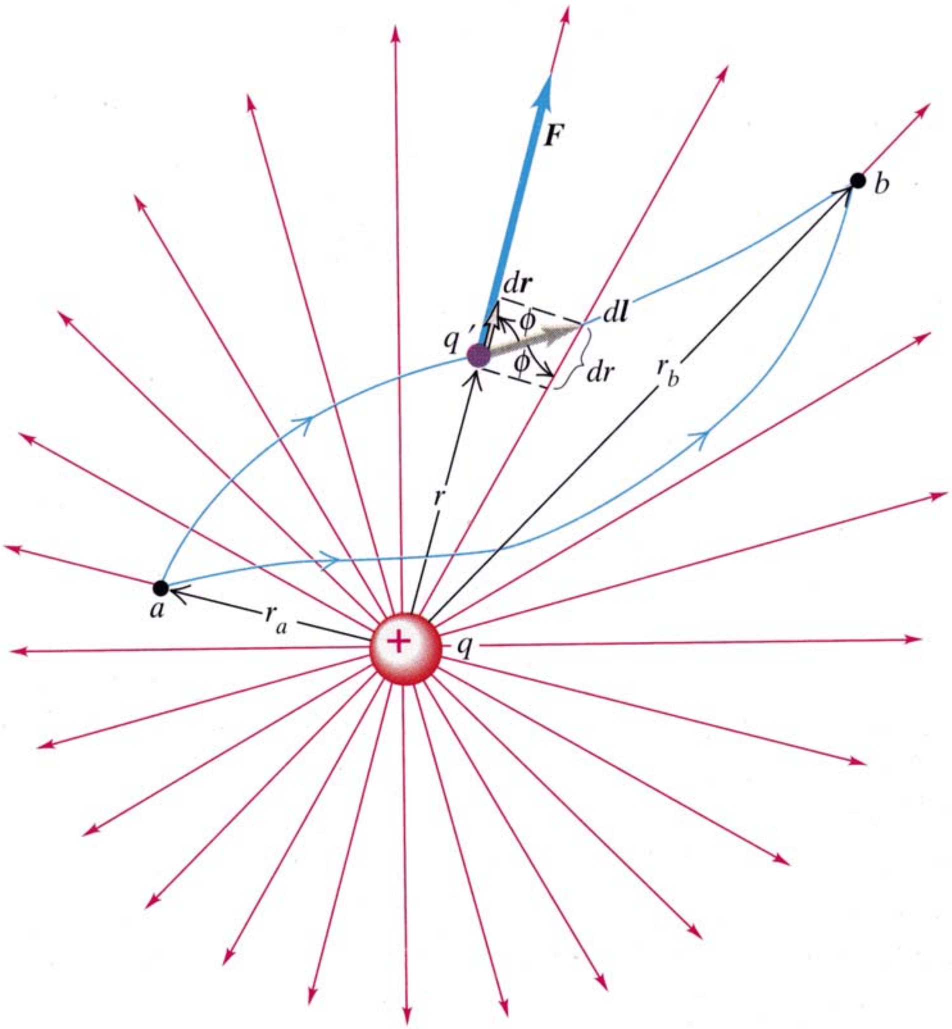
$$U = q'Ey \Rightarrow$$

$$W_{a\to b} = U_a - U_b$$

Για μετακίνηση του φορτίου ανάμεσα στις πλάκες:

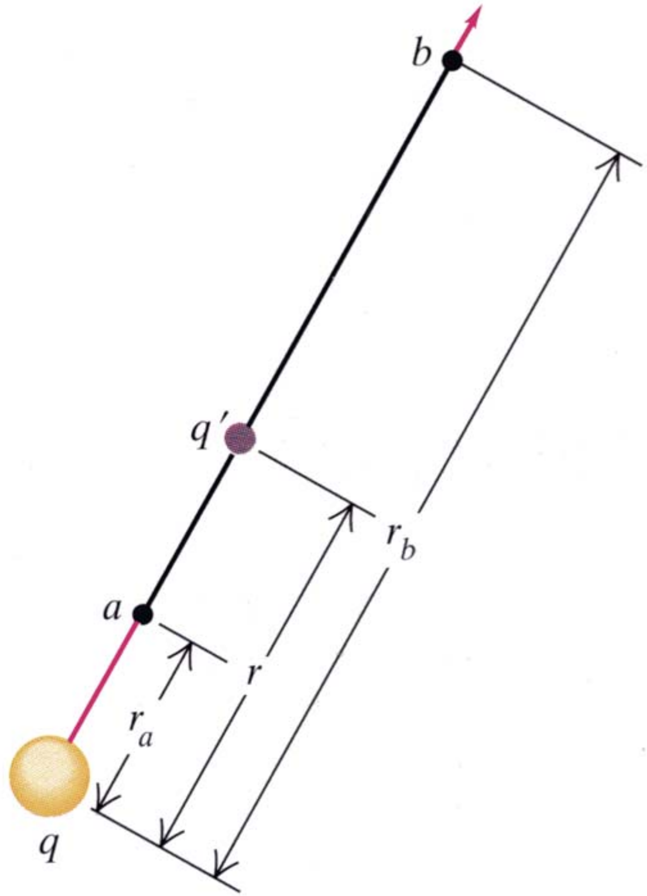
$$W_d = q'Ed$$

• Έστω δοκιμαστικό φορτίο κινούμενο σε πεδίο σημειακού φορτίου. Το έργο που παράγεται κατά την μετακίνηση του a→b:



$$W_{a\to b} = \int_a^b \overrightarrow{F_r} \cdot d\vec{l} =$$

$$\int_a^b F_r dl \cos\phi = \int_a^b F_r dr \Rightarrow$$



$$W_{a\to b} = \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}dr \Rightarrow$$

$$W_{a\to b} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$$

Ορίζοντας την δυναμική ενέργεια σαν:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r} \Rightarrow$$

$$W_{a\to b} = U_a - U_b$$

Ο τύπος της δυναμικής ενέργειας ισχύει και αν το κεντρικό φορτίο q έχει σφαιρικά συμμετρική κατανομή (Gauss).

• Γενικεύοντας στην περίπτωση ηλεκτρικού πεδίου που παράγεται από πολλά σημειακά φορτία έχουμε:

$$U = \sum_{i=1}^{n} U_i = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i} \Rightarrow$$

• Η συνολική δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$U = \sum_{i>j} U_{ij} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i>j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

Στο άθροισμα δεν λαμβάνουμε υπ’ όψη την αλληλεπίδραση φορτίου με τον εαυτό του και μετράμε κάθε ζεύγος μόνο μια φορά.

Δυναμικό

• Ορίζουμε σαν δυναμικό σε κάθε σημείο την δυναμική ενέργεια που συνδέεται με ένα δοκιμαστικό φορτίο στο σημείο αυτό δια του φορτίου, δηλαδή:

$$V = \frac{U}{q'} \qquad 1V = 1\frac{J}{C}$$

Το έργο που παράγεται κατά την μετακίνηση δοκιμαστικού φορτίου (a→b) είναι:

$$W_{a\to b} = U_a - U_b = q'\left(V_a - V_b\right)$$

• Στην περίπτωση ηλεκτρικού πεδίου που παράγεται από πολλά φορτία έχουμε:

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{(V)}\frac{dq}{r}$$

• Σε προβλήματα στα οποία το πεδίο Ε είναι γνωστό υπολογίζω την διαφορά δυναμικού σαν:

$$W_{a\to b} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = q' \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$V_{ab} = V_a - V_b = \frac{W_{a\to b}}{q'} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

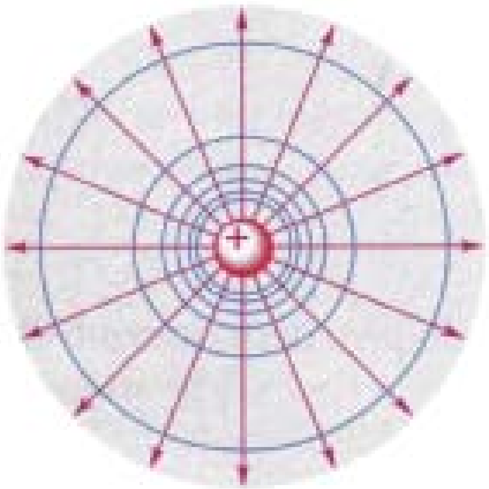
Ισοδυναμικές Επιφάνειες

• Το δυναμικό στο χώρο του ηλεκτρικού πεδίου μπορεί να παρασταθεί γραφικά από **ισοδυναμικές επιφάνειες** που δεν εφάπτονται ούτε τέμνονται.

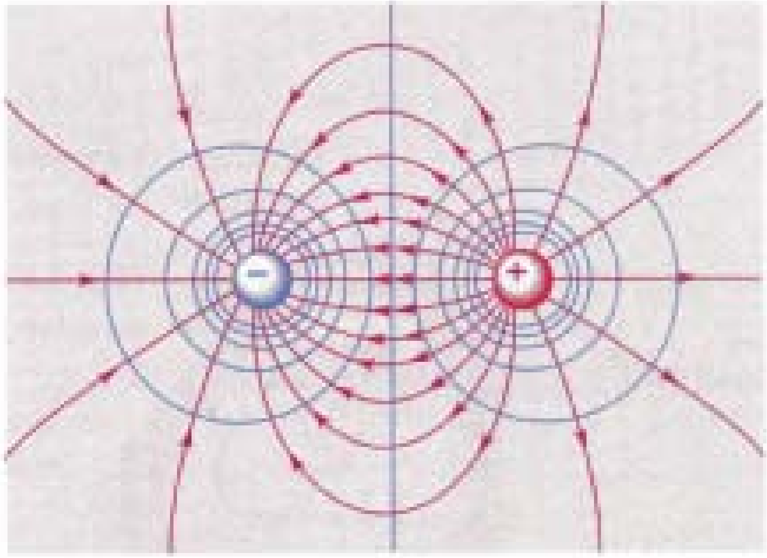
• Η δυναμική ενέργεια φορτίου είναι σταθερή στις ισοδυναμικές επιφάνειες και έτσι το πεδίο δεν παράγει έργο κατά την μετακίνησή του σ' αυτές. Άρα δεν υπάρχει συνιστώσα του πεδίου παράλληλη στην επιφάνεια αφού:

$$W_{a\to b} = U_a - U_b = 0 \Rightarrow q'\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = q'\int_a^b E_{\parallel} dl = 0$$

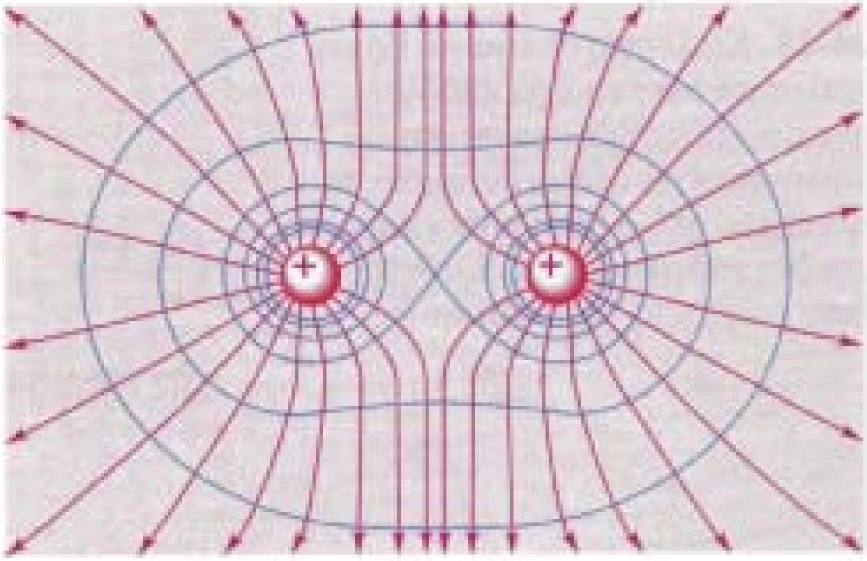
Δηλαδή, **οι δυναμικές γραμμές και οι ισοδυναμικές επιφάνειες είναι μεταξύ τους κάθετες**.



(a)



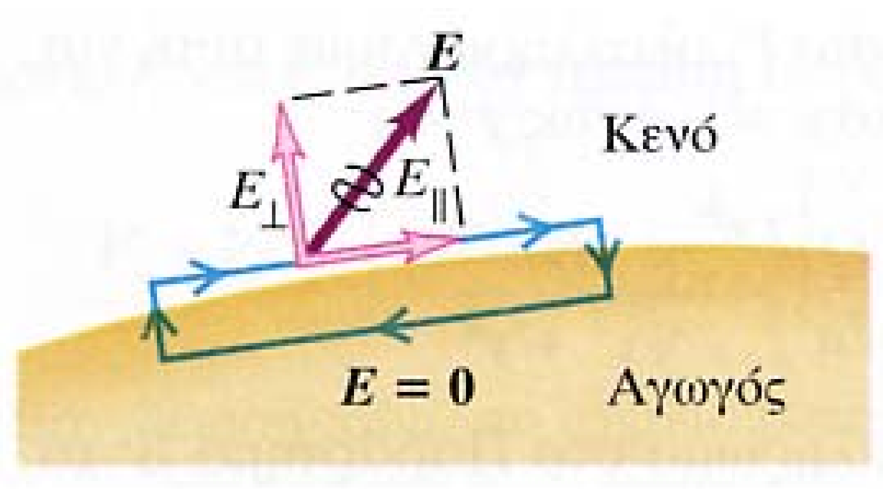
(b)



(c)

• Όταν τα φορτία είναι σε ηρεμία, το ηλεκτρικό πεδίο μόλις έξω από αγωγό είναι **κάθετο στην επιφάνειά του (μια αγώγιμη επιφάνεια είναι πάντα ισοδυναμική)**.

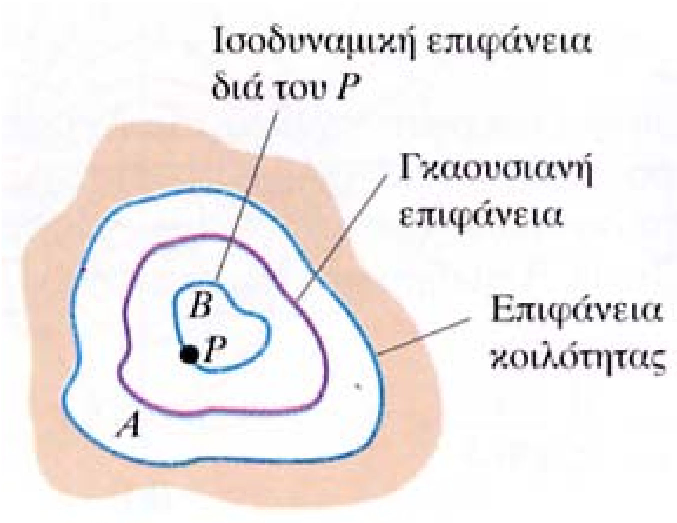
Αν δεν ήταν έτσι σε κίνηση φορτίου σε παραλληλόγραμμο μερικώς μέσα και μερικώς έξω από τον αγωγό θα είχε παραχθεί έργο (γνωρίζουμε ότι E = 0 εντός του αγωγού, αφού τα φορτία είναι σε ηρεμία).



$$W_{(C)} = W_{(\text{ΕΞΩ})} = 0 \Rightarrow$$

$$q' \int_{(\text{ΕΞΩ})} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{(\text{ΕΞΩ})} E_{\parallel} dl = 0$$



• Για ηλεκτροστατικές συνθήκες, αν αγωγός περιέχει κοιλότητα και αν δεν υπάρχει φορτίο στο εσωτερικό της κοιλότητας, τότε δεν υπάρχει φορτίο και στην επιφάνεια της κοιλότητας.

Η επιφάνεια Α της κοιλότητας είναι ισοδυναμική. Αν σημείο P έχει διαφορετικό δυναμικό υπάρχει επιφάνεια Β με διαφορετικό δυναμικό. Η ένταση Ε του πεδίου κατευθύνεται Α→Β ή Β→Α (εξαρτώμενη από ποια επιφάνεια έχει υψηλότερο δυναμικό). Σε επιφάνεια Gauss ανάμεσα τους η ροή είναι μη μηδενική, άρα και το φορτίο εντός της είναι μη μηδενικό (άτοπο).

Άρα το δυναμικό **V** είναι **ΠΑΝΤΟΥ σταθερό** άρα η ένταση **Ε** του πεδίου είναι **ΠΑΝΤΟΥ μηδέν**. Τότε δεν υπάρχει φορτίο και στην επιφάνεια της κοιλότητας αφού Ε ~ σ (Gauss).

Η Ένταση Βαθμίδα του Δυναμικού

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b E_l dl$$

$$V_a - V_b = \int_b^a dV$$

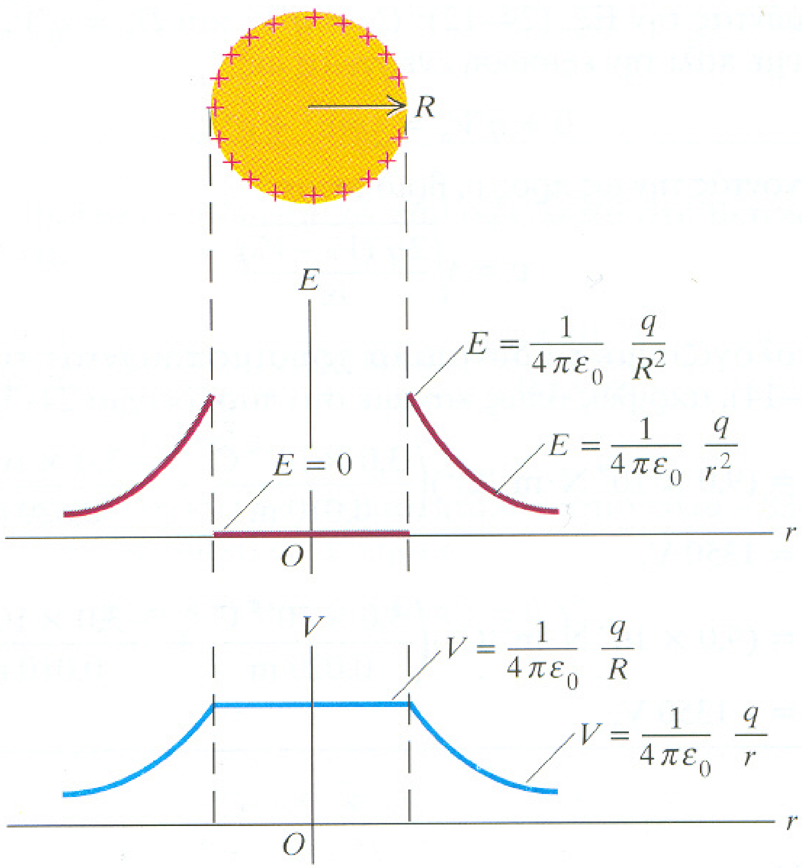
$$-\int_a^b dV = \int_a^b E_l dl \Rightarrow E_l = -\frac{dV}{dl}$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \right) V \Rightarrow \vec{E} = -\nabla V$$

Το E είναι κάθετο προς την αντίστοιχη ισοδυναμική επιφάνεια και η κατεύθυνση του είναι αυτή της μέγιστης ελάττωσης του V.

A1) Φορτισμένος σφαιρικός αγωγός. Μια στερεά αγώγιμη σφαίρα ακτίνας R φέρει συνολικό φορτίο q. Να βρείτε το δυναμικό παντού μέσα και έξω από τη σφαίρα.



- Εκτός της σφαίρας το πεδίο είναι το ίδιο με αυτό ενός σημειακού φορτίου q στο κέντρο της σφαίρας.

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

- Εντός της σφαίρας το πεδίο είναι μηδέν.

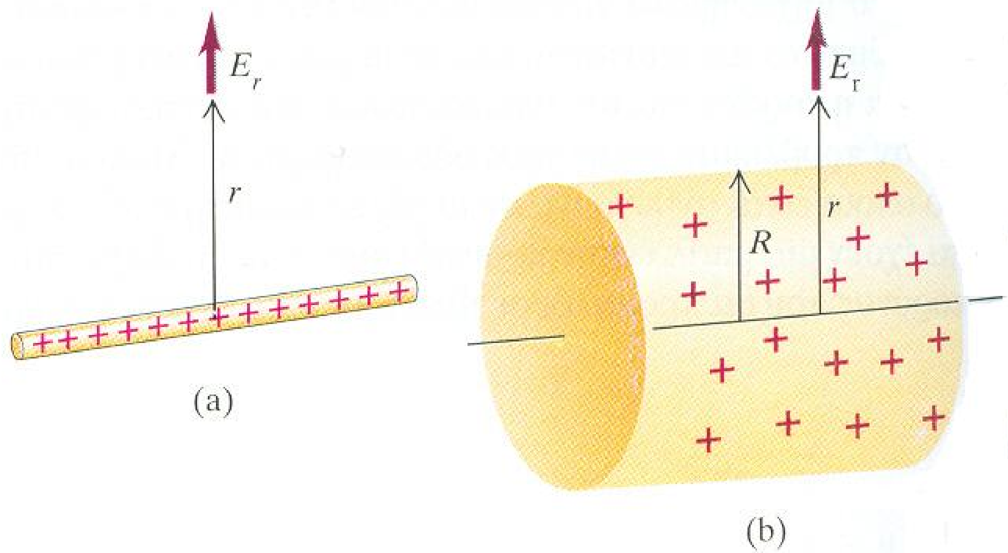
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}$$

Α2) Γραμμική κατανομή φορτίου και αγώγιμος φορτισμένος κύλινδρος. Να βρείτε το δυναμικό σε απόσταση r από γραμμική κατανομή φορτίου με πυκνότητα φορτίου λ.

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$V_{ab} = \int_a^b \vec{E} \cdot \vec{dl} =$$

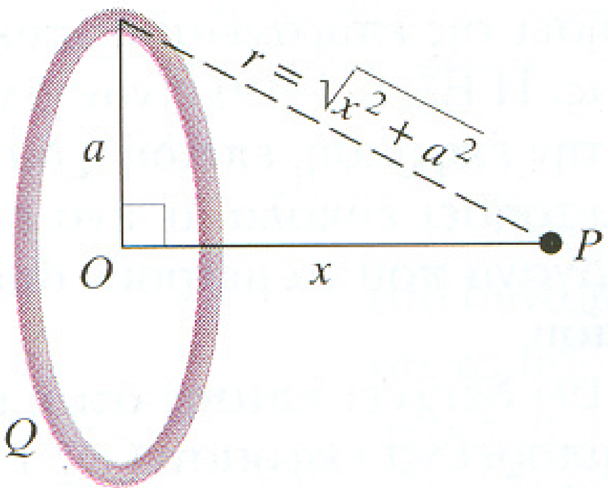
$$\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_b}{r_a}$$



$$V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{R}{r}$$

V = 0 όταν r = R

Α3) Φορτισμένος κυκλικός δακτύλιος. Ηλεκτρικό φορτίο Q είναι κατανεμημένο ομοιόμορφα σε λεπτό δακτύλιο ακτίνας α. Να βρείτε το δυναμικό σε σημείο P του άξονα του δακτυλίου σε απόσταση x από το κέντρο του.



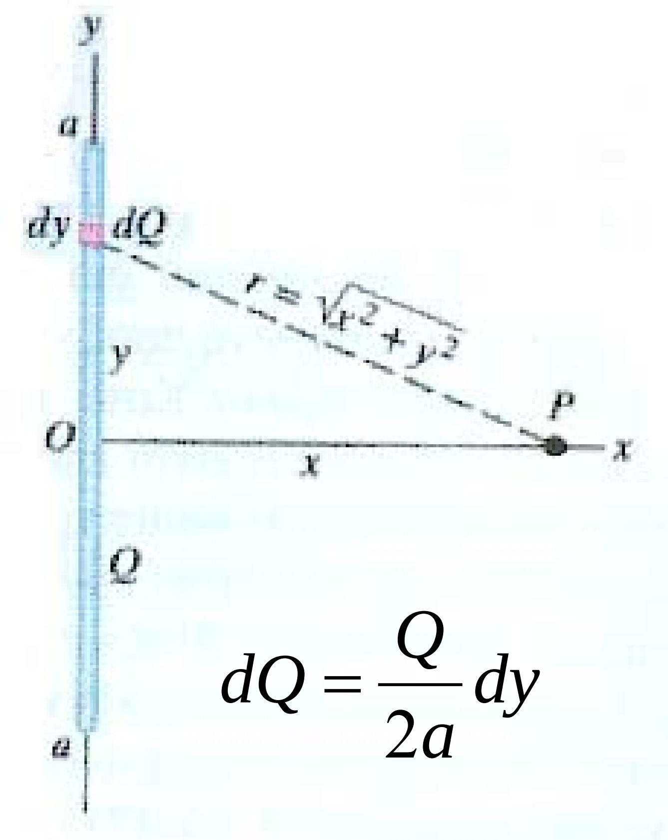
$$V(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\left(x^2 + a^2\right)^{1/2}}$$

Για x >> α

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{x}$$

(σημειακό φορτίο)

Α4) Λεπτή φορτισμένη ράβδος. Ηλεκτρικό φορτίο Q κατανέμεται ομοιόμορφα κατά μήκος λεπτής ράβδου μήκους 2α. Να βρείτε το δυναμικό στο σημείο Ρ κατά μήκος της μεσοκαθέτου της ράβδου σε απόσταση x από το κέντρο της.



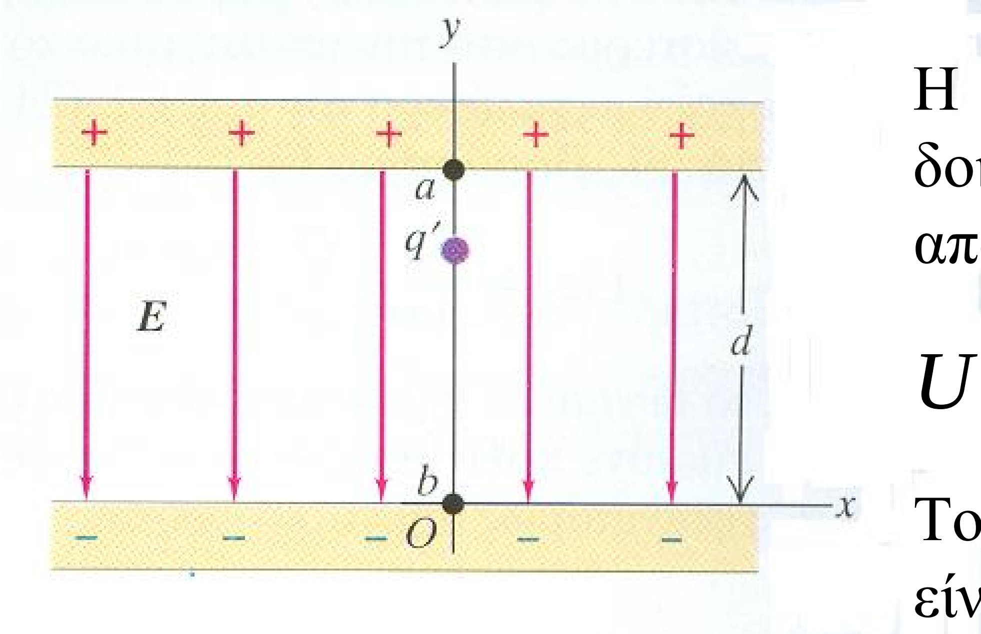
$$dQ = \frac{Q}{2a} dy$$

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q dy}{2a\left(x^2 + y^2\right)^{1/2}}$$

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{2a} \int_{-a}^{a} \frac{dy}{\left(x^2 + y^2\right)^{1/2}}$$

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{2a} \ln \frac{\sqrt{a^2 + x^2} + a}{\sqrt{a^2 + x^2} - a}$$

Α5) Παράλληλες πλάκες. Να βρείτε το δυναμικό σε κάθε ύψος y μεταξύ δύο αντίθετα φορτισμένων παράλληλων πλακών.



Η δυναμική ενέργεια U για δοκιμαστικό φορτίο q' σε απόσταση y από την κάτω πλάκα:

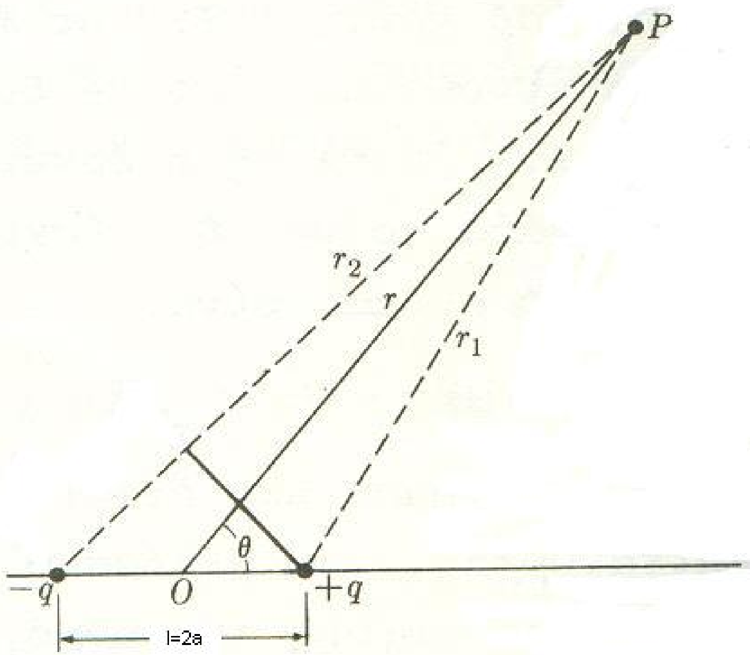
$$U = q'Ey$$

Το δυναμικό V_y στο σημείο y είναι η δυναμική ενέργεια ανά μονάδα φορτίου,

$$V_y = Ey \Rightarrow \left(E = \frac{V}{d} \right)$$

Το U, και ως εκ τούτου το V, είναι μηδέν στο σημείο b, όπου y=0.

Α6) Ηλεκτρικό Δίπολο. Το ηλεκτρικό δίπολο αποτελείται από δύο φορτία ίσα σε απόλυτη τιμή αλλά αντίθετα, δηλαδή +q και –q, τα οποία βρίσκονται σε μια πολύ μικρή απόσταση l=2a. Να υπολογιστεί τόσο το δυναμικό V όσο και η ένταση E του ηλεκτρικού πεδίου που παράγει το ηλεκτρικό δίπολο.



$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$r_1 = \left(a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a^2}{r^2} - 2\frac{a}{r}\cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Προσεγγίζω τον παραπάνω τύπο με την ανάπτυξη διωνύμου.

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \dots\dots\dots$$

Για μεγάλες αποστάσεις σε σχέση με το δίπολο, κρατώ το πολύ όρους που περιέχουν r^{-2}.

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a}{r}\cos\theta\right) \Rightarrow \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} + \frac{a}{r^2}\cos\theta$$

Στο δεύτερο τρίγωνο του σχήματος λαμβάνοντας υπ’ όψη ότι cos(π-θ)=-cosθ έχω ότι:

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} - \frac{a}{r^2}\cos\theta$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} + \frac{a}{r^2}\cos\theta - \frac{1}{r} + \frac{a}{r^2}\cos\theta\right) \Rightarrow V = \frac{qa\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow$$

$$V = \frac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Θα υπολογίσουμε τώρα την ένταση Ε του ηλεκτρικού πεδίου.

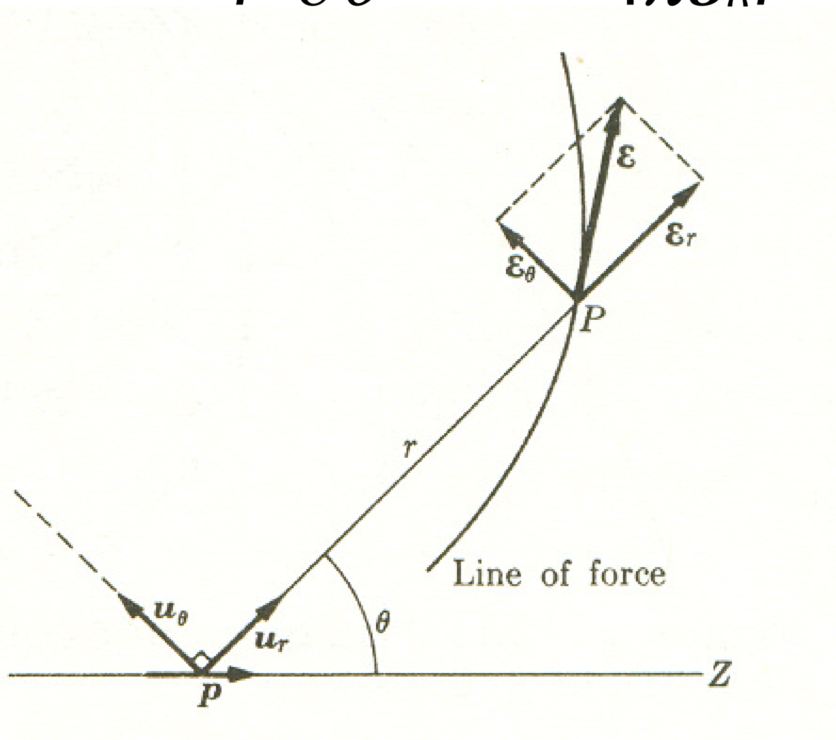
$$\vec{E} = -\nabla V$$

και σε πολικές συντεταγμένες:

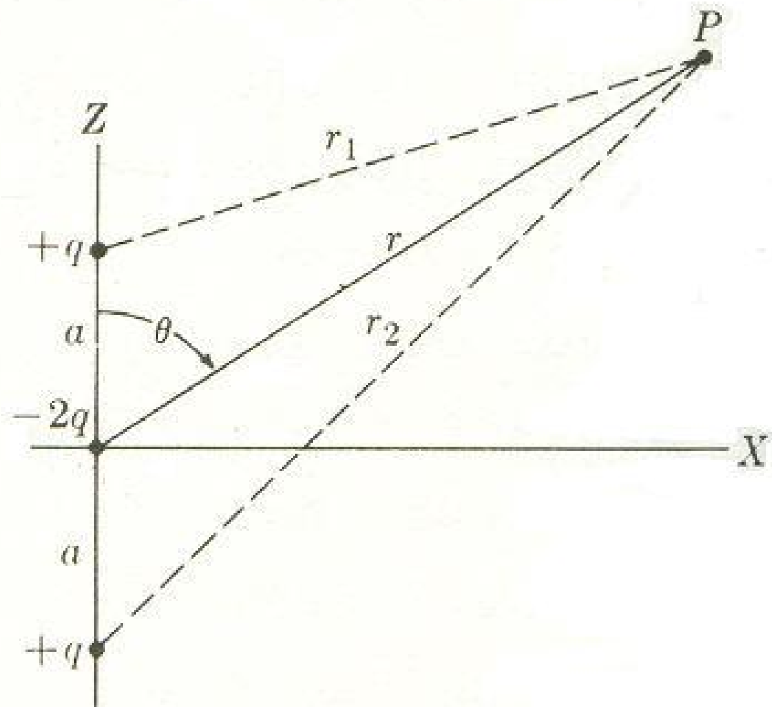
$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r}\overrightarrow{u_r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{2r}{r^4}\right) \Rightarrow E_r = \frac{ql\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{ql(-\sin\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \Rightarrow E_\theta = \frac{ql\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$



Α7) Γραμμικό Ηλεκτρικό Τετράπολο (Σχήμα). Να υπολογιστεί το δυναμικό *V* του ηλεκτρικού πεδίου που παράγει το γραμμικό ηλεκτρικό τετράπολο.



$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{2}{r} + \frac{1}{r_2}\right)$$

$$r_1 = \left(a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a^2}{r^2} - 2\frac{a}{r}\cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Προσεγγίζω τον παραπάνω τύπο με την ανάπτυξη διωνύμου.

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \ldots\ldots\ldots$$

Για μεγάλες αποστάσεις σε σχέση με το δίπολο, κρατώ το πολύ όρους που περιέχουν r^{-3}.

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} + \frac{a}{r^2}\cos\theta - \frac{a^2}{2r^3} + \frac{3a^2}{2r^3}\cos^2\theta \Rightarrow$$

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} + \frac{a}{r^2}\cos\theta + \frac{a^2}{2r^3}\left(3\cos^2\theta - 1\right)$$

Στο δεύτερο τρίγωνο του σχήματος λαμβάνοντας υπ’ όψη ότι cos(π-θ)=-cosθ έχω ότι:

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} - \frac{a}{r^2}\cos\theta + \frac{a^2}{2r^3}\left(3\cos^2\theta - 1\right)$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{1}{r} + \frac{a}{r^2}\cos\theta + \frac{a^2}{2r^3}\left(3\cos^2\theta - 1\right) - \frac{2}{r}$$

$$+\frac{1}{r} - \frac{a}{r^2}\cos\theta + \frac{a^2}{2r^3}\left(3\cos^2\theta - 1\right)]$$

$$V = \frac{qa^2\left(3\cos^2\theta - 1\right)}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$