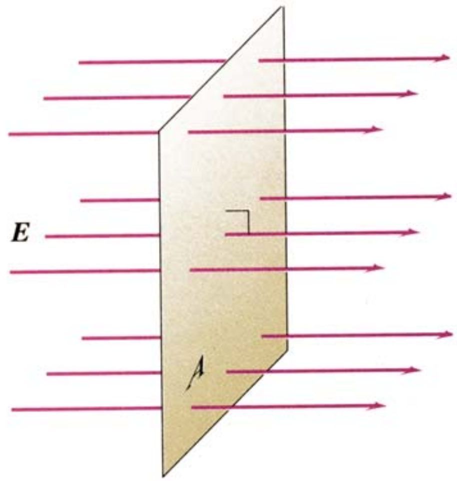
Νόμος του Gauss

1. Ηλεκτρική Ροή ("πλήθος" δυναμικών γραμμών).

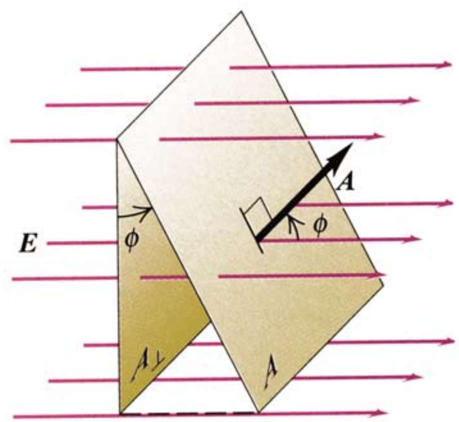


(a)

$$\Phi_E = E \cdot A \quad (a)$$

$$\Phi_E = E \cdot A \cdot \cos\phi = E_\perp \cdot A = \vec{E} \cdot \vec{A} \quad (b)$$

$\vec{A}$ είναι διάνυσμα μέτρου A και κατεύθυνσης κάθετης στην επιφάνεια.



(b)

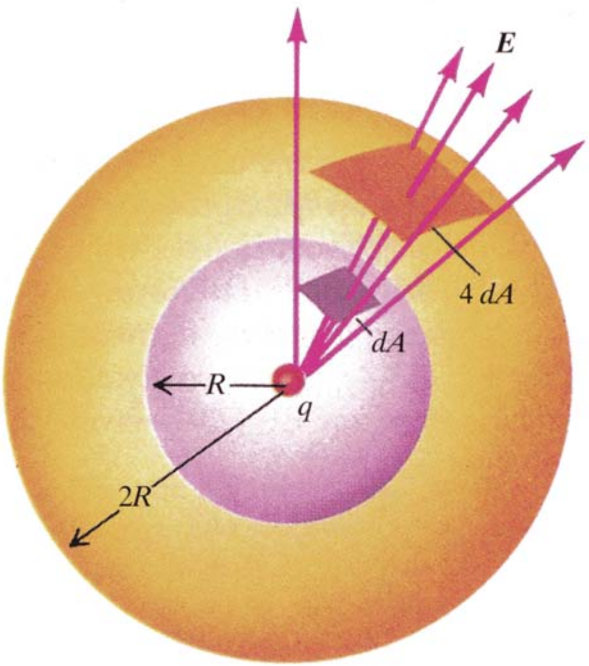
Στην γενική περίπτωση:

$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{A} \Rightarrow \Phi_E = \int_{(A)} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

(επιφανειακό ολοκλήρωμα)

2. Νόμος του Gauss

• Ο νόμος του Gauss και ο νόμος του Coulomb είναι εναλλακτικές διατυπώσεις της ίδιας βασικής σχέσης μεταξύ μιας κατανομής φορτίου και του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργεί.

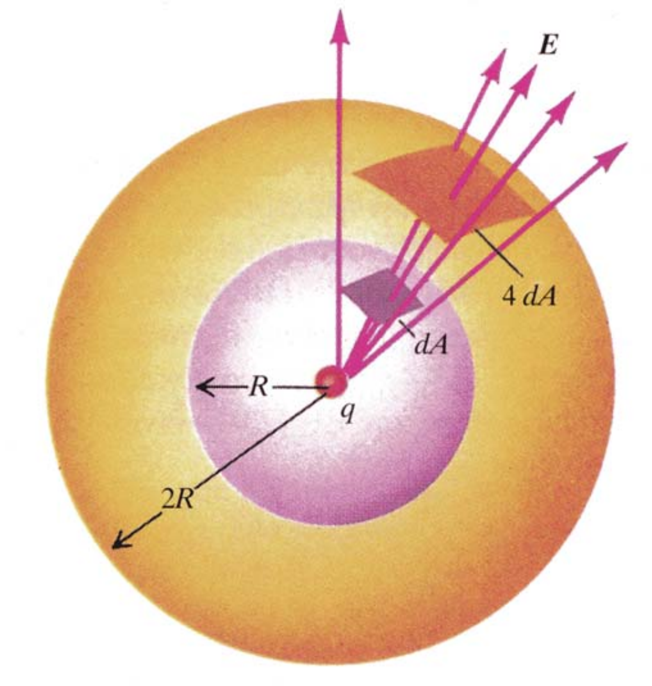


Έστω θετικό φορτίο q στο κέντρο σφαίρας ακτίνας R.

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}$$

$$\Phi_E = \oint_{(A)} \vec{E}\cdot d\vec{A} = E\cdot A \Rightarrow$$

$$\Phi_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}\left(4\pi R^2\right) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



- Το πεδίο στην μεγάλη σφαίρα είναι το 1/4 αυτού στην μικρή σφαίρα.
- Η επιφάνεια της μεγάλης σφαίρας είναι 4 φορές αυτή της μικρής σφαίρας.
- Η ηλεκτρική ροή σταθερή και εξαρτάται μόνο από το φορτίο.

$$\Phi_E = E \cdot A = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

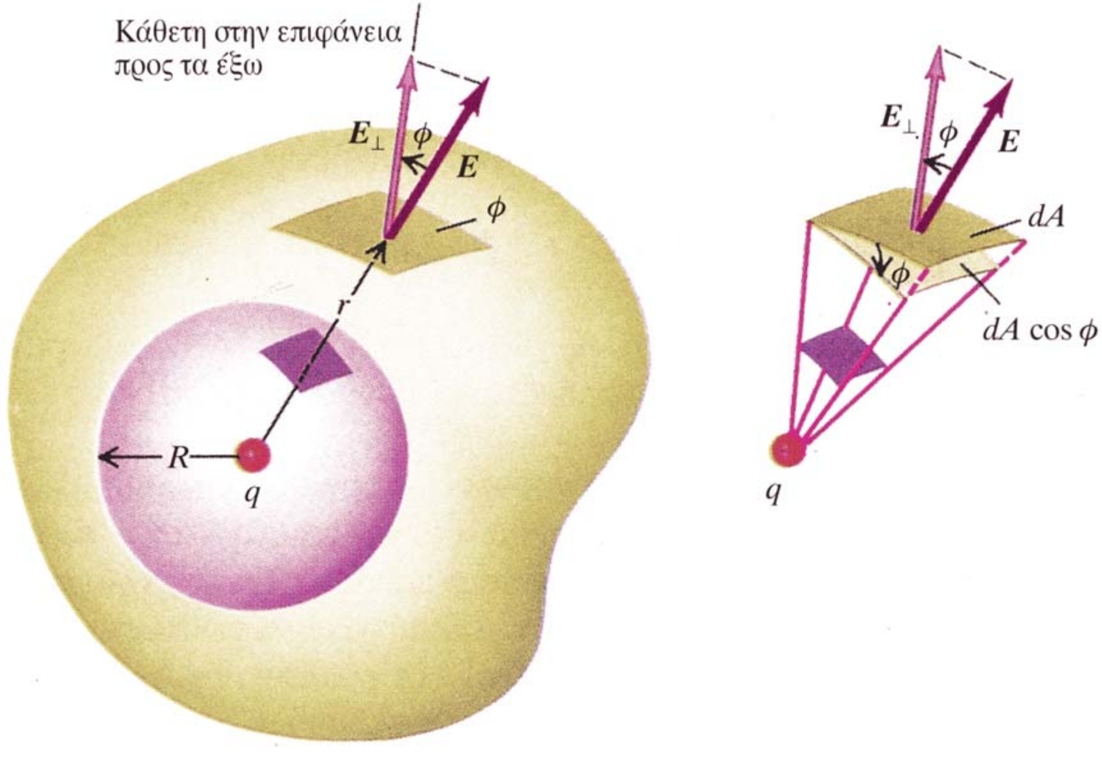
Ότι ισχύει για όλη την σφαίρα, ισχύει και για μέρος της επιφάνειας της.

$$d\Phi_E^{dA} = d\Phi_E^{4dA}$$

Αντί για δεύτερη σφαίρα περιβάλλουμε την σφαίρα ακτίνας R με τυχαία επιφάνεια.

• Αν dA το εμβαδόν στην τυχαία επιφάνεια τότε cosφ·dA είναι το αντίστοιχο εμβαδόν σε σφαίρα ίδιας απόστασης από το φορτίο q.

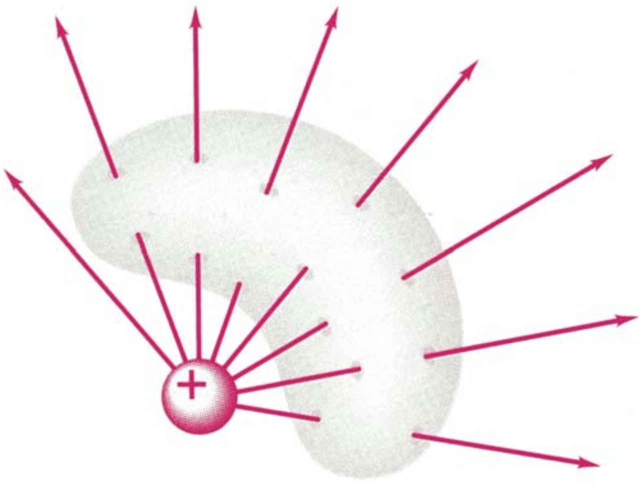
• Αν E το πεδίο σε σφαίρα ίδιας απόστασης από το φορτίο q τότε E·cosφ είναι το κάθετο πεδίο στην τυχαία επιφάνεια.



(a) (b)

• Συνεπώς η ροή είναι E·cosφ·dA (τυχαία επιφάνεια - εσωτερική σφαίρα).

$$\Phi_E = \oint_{(A)} E\cos\phi dA = \oint_{(A)} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



• Όταν ο χώρος δεν περιέχει φορτία, όσες δυναμικές γραμμές εισέρχονται πρέπει να εξέρχονται.

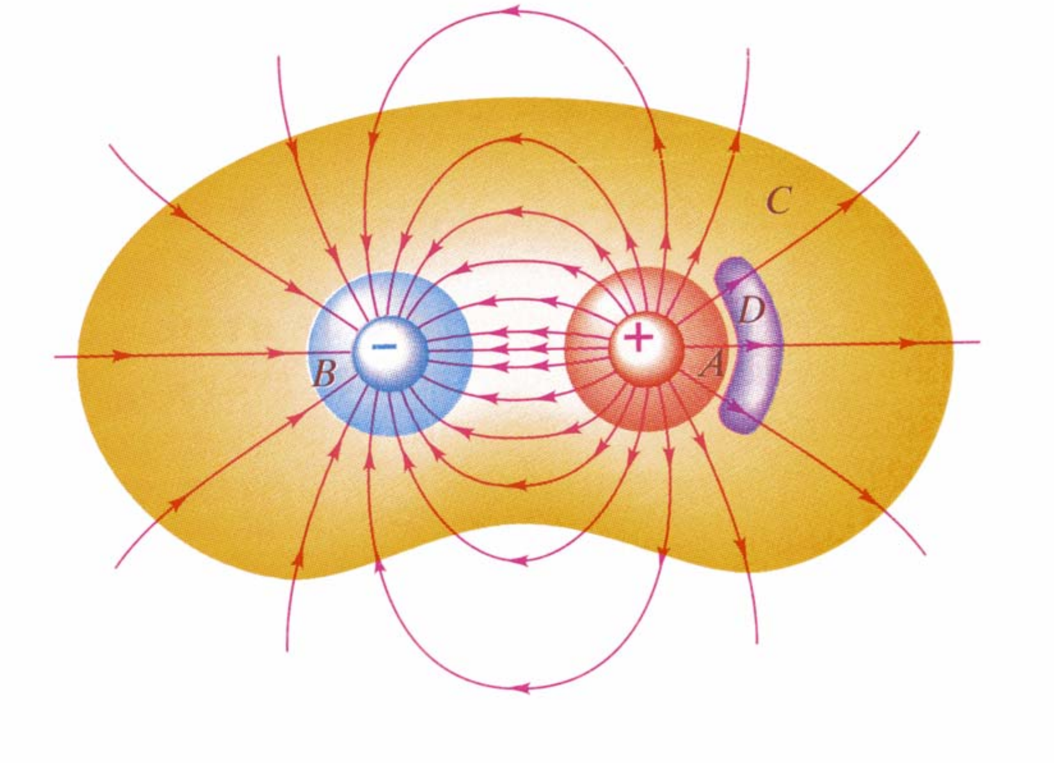
$$\Phi_E = \oint_{(A)} \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

• Για περισσότερα φορτία:

$$\oint_{(A)} \vec{E_i} \cdot d\vec{A} = \frac{q_i}{\varepsilon_0} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \oint_{(A)} \vec{E_i} \cdot d\vec{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$\oint_{(A)} \sum_{i=1}^{n} \vec{E_i} \cdot d\vec{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i}{\varepsilon_0} \Rightarrow \Phi_E = \oint_{(A)} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{tot}}{\varepsilon_0}$$

• Πεδίο ηλεκτρικού δίπολου (Ηλεκτρική ροή ανάλογη των δυναμικών γραμμών).



$$\Phi_E^C = \Phi_E^D = 0$$

$$\Phi_E^A > 0$$

$$\Phi_E^B < 0$$

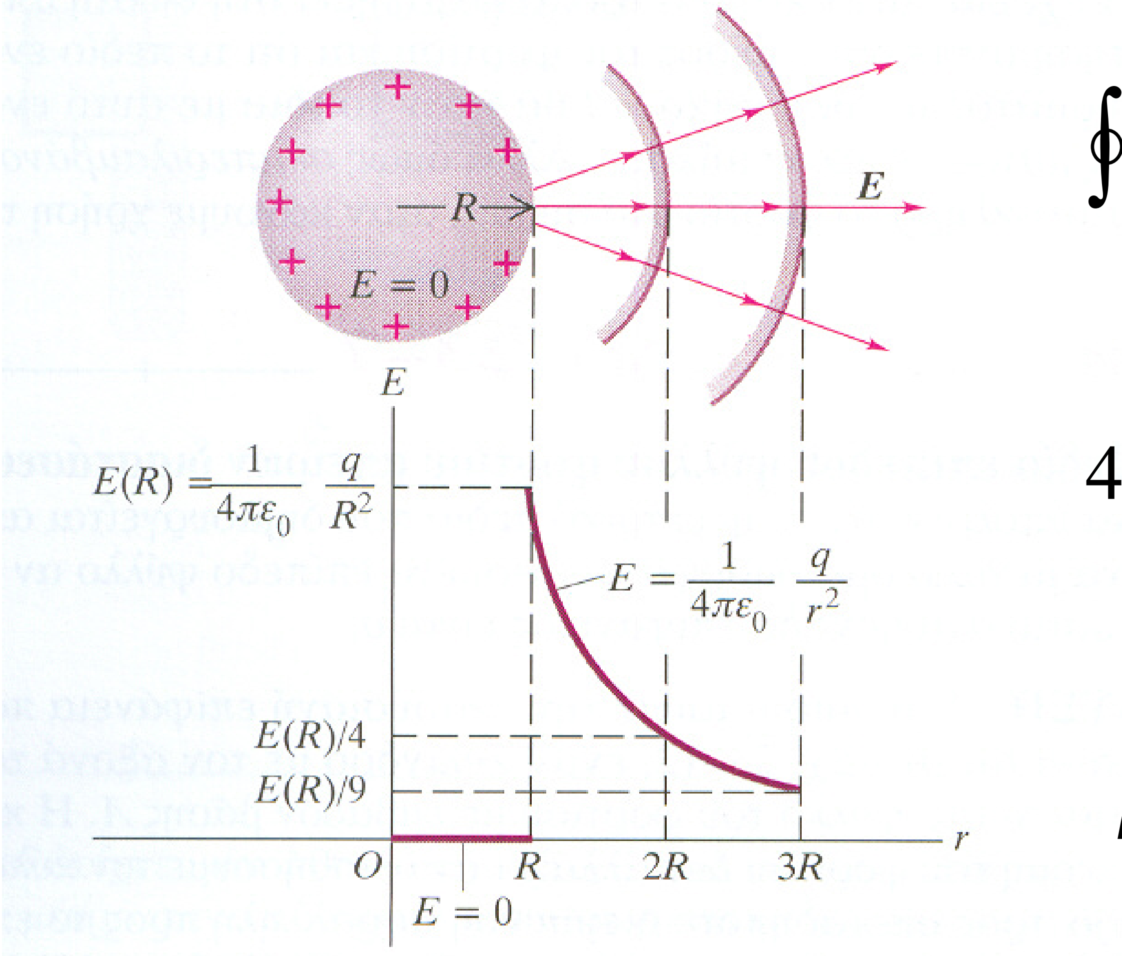
• Ο νόμος του Gauss είναι χρήσιμη σχέση μόνο όταν το σύστημα έχει ισχυρή συμμετρία.

3. Ασκήσεις

Α1) Πεδίο μιας φορτισμένης αγώγιμης σφαίρας. Τοποθετούμε φορτίο q σε μία συμπαγή αγώγιμη σφαίρα ακτίνας R. Να υπολογιστεί το ηλεκτρικό πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο μέσα και έξω από τη σφαίρα.

Λύση

- Το φορτίο βρίσκεται στην επιφάνεια της σφαίρας.
- Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας το φορτίο είναι κατανεμημένο ομοιόμορφα πάνω σε όλη την επιφάνεια.
- Η διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου σε οποιοδήποτε σημείο έξω από τη σφαίρα πρέπει να συμπίπτει με την ακτινική ευθεία μεταξύ του κέντρου και του σημείου.



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$4\pi r^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

- Το πεδίο που προκαλείται από την φορτισμένη σφαίρα είναι το ίδιο με αυτό που δημιουργείται αν το φορτίο είναι συγκεντρωμένο στο κέντρο της.
- Στο όριο (R$\rightarrow$0) η σφαίρα γίνεται σημειακό φορτίο. Με αυτό τον τρόπο καταλήγουμε στον νόμο του Coulomb από τον νόμο του Gauss.
- Στο εσωτερικό της σφαίρας, όπως και σε οποιοδήποτε στερεό αγωγό όταν τα φορτία είναι σε ηρεμία, το πεδίο είναι μηδέν.
- Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή τη μέθοδο για έναν αγώγιμο σφαιρικό φλοιό (ένα σφαιρικό αγωγό με μία ομόκεντρη σφαιρική κοιλότητα στο κέντρο).

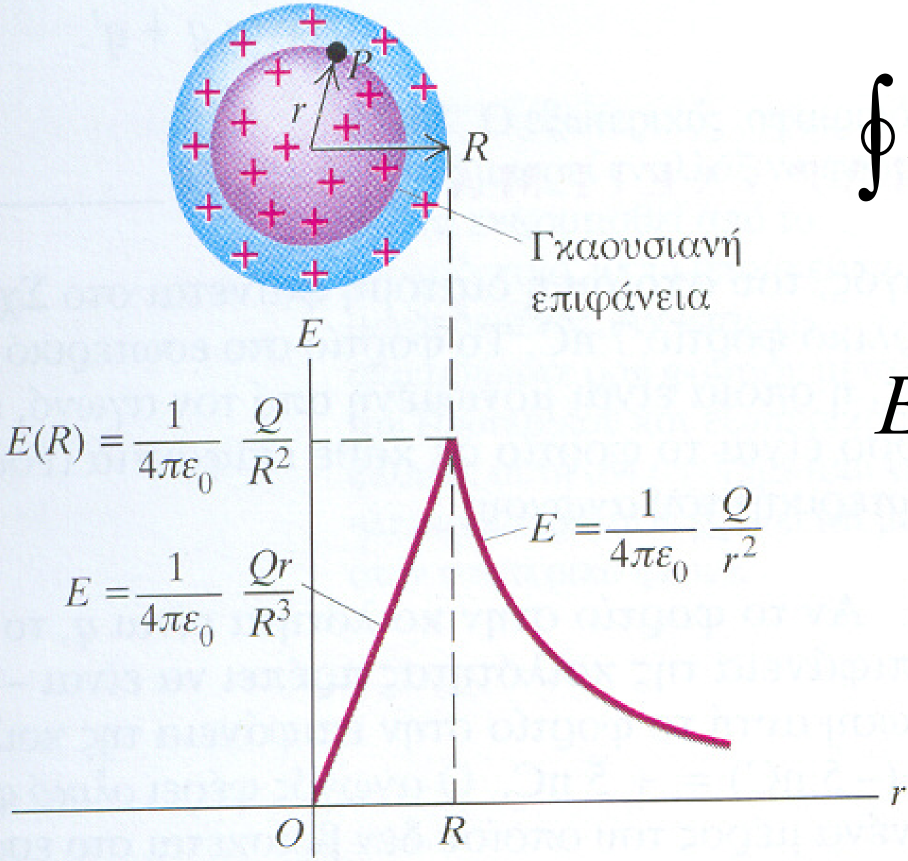
Α2) Ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα. Ηλεκτρικό φορτίο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο σε ολόκληρο τον όγκο μιας μονωτικής σφαίρας με ακτίνα R. Το ολικό φορτίο είναι Q. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο σε όλο τον χώρο.

Λύση

- Στον χώρο εκτός της σφαίρας οι υπολογισμοί ταυτίζονται με αυτούς της άσκησης Α1.

- Στον χώρο εντός της σφαίρας επιλέγοντας κατάλληλη επιφάνεια Gauss ισχύει:

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \qquad Q' = \rho . V' = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\frac{4}{3}\pi r^3 = Q\frac{r^3}{R^3}$$



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q'}{\varepsilon_0} \qquad 4\pi r^2 E = \frac{Qr^3}{\varepsilon_0 R^3}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qr}{R^3}$$

Στο κέντρο (r = 0), E = 0, όπως θα περιμέναμε από τη συμμετρία.

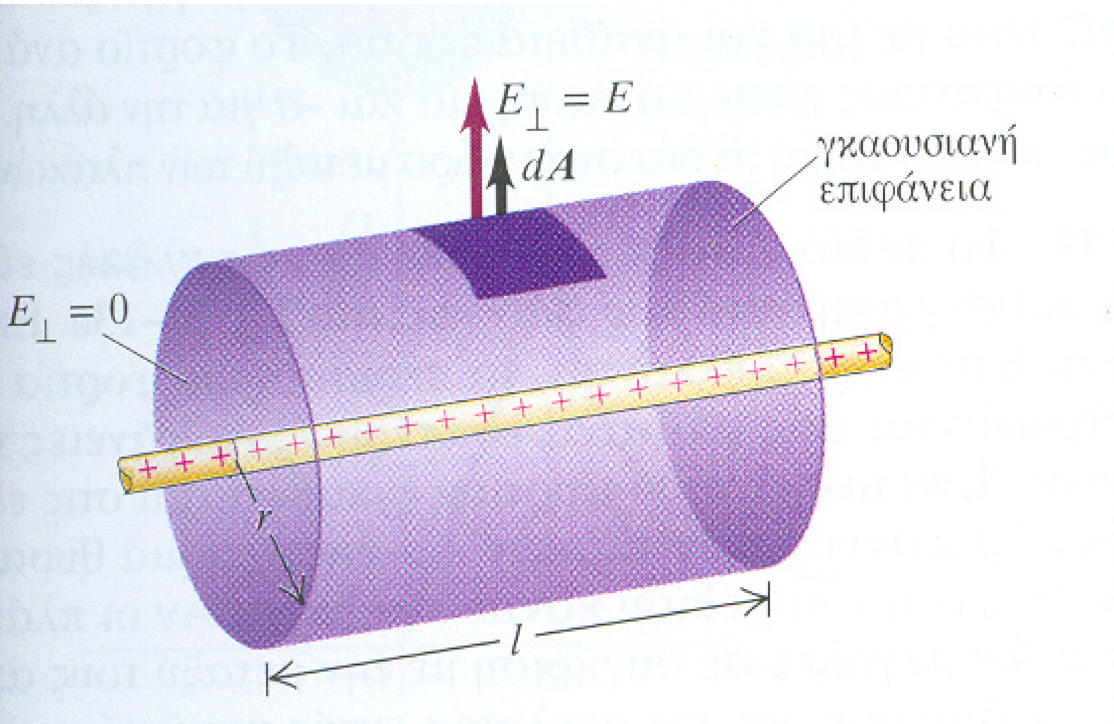
Στην επιφάνεια της σφαίρας (r = R) το πεδίο έχει το ίδιο μέτρο σαν να ήταν συγκεντρωμένο το φορτίο στο κέντρο της σφαίρας.

Α3) Πεδίο γραμμικού φορτίου. Ηλεκτρικό φορτίο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο κατά μήκος ενός σύρματος πολύ μεγάλου μήκους. Το φορτίο ανά μονάδα μήκους είναι λ. Ποιο είναι το ηλεκτρικό πεδίο;

Λύση

- Το πεδίο δεν μπορεί να έχει συνιστώσα παράλληλη προς το σύρμα (διάκριση του ενός άκρου του σύρματος από το άλλο).
- Το πεδίο δεν μπορεί να έχει συνιστώσα εφαπτόμενη σε κύκλο του οποίου το επίπεδο είναι κάθετο στο σύρμα με το κέντρο του στο σύρμα (γιατί αυτή η κατεύθυνση και όχι η άλλη).
- Άρα το πεδίο κατευθύνεται ακτινικά.

Χρησιμοποιούμε σαν επιφάνεια Gauss έναν κύλινδρο με ακτίνα r, μήκος l και άξονά του το σύρμα.



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q'}{\varepsilon_0}$$

$$2\pi r l . E = \frac{\lambda . l}{\varepsilon_0}$$

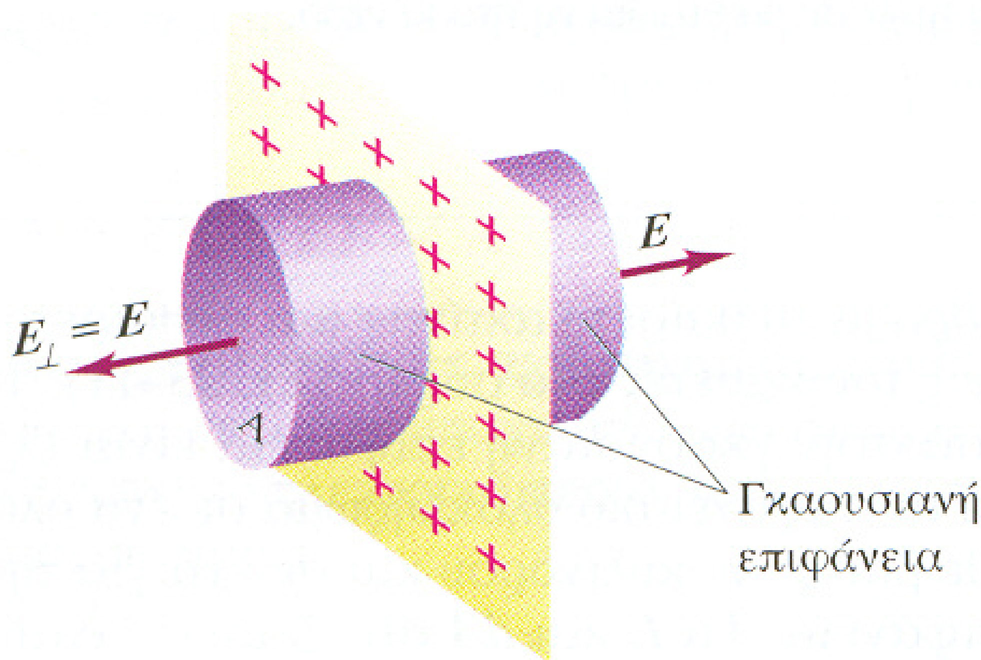
$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda}{r}$$

Μόνο το φορτίο που βρίσκεται μέσα στην επιφάνεια Gauss λαμβάνεται υπ' όψη; (συμμετρία του προβλήματος).

A4) Πεδίο επίπεδου φορτίου απείρων διαστάσεων. Να υπολογιστεί το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από ένα μεγάλο ομοιόμορφα φορτισμένο επίπεδο φύλλο αν το φορτίο ανά μονάδα επιφάνειας είναι σ.

Λύση

- Σε κάθε σημείο το Ε είναι κάθετο στο επίπεδο με φορά προς το εξωτερικό της επιφάνειας (αν η σ είναι θετική).
- Το πεδίο έχει σταθερό μέτρο Ε σε σταθερή απόσταση από την κάθε μία πλευρά της επιφάνειας.
- Η επιφάνεια Gauss είναι κύλινδρος συμμετρικός ως προς το φύλλο του φορτίου.



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q'}{\varepsilon_0}$$

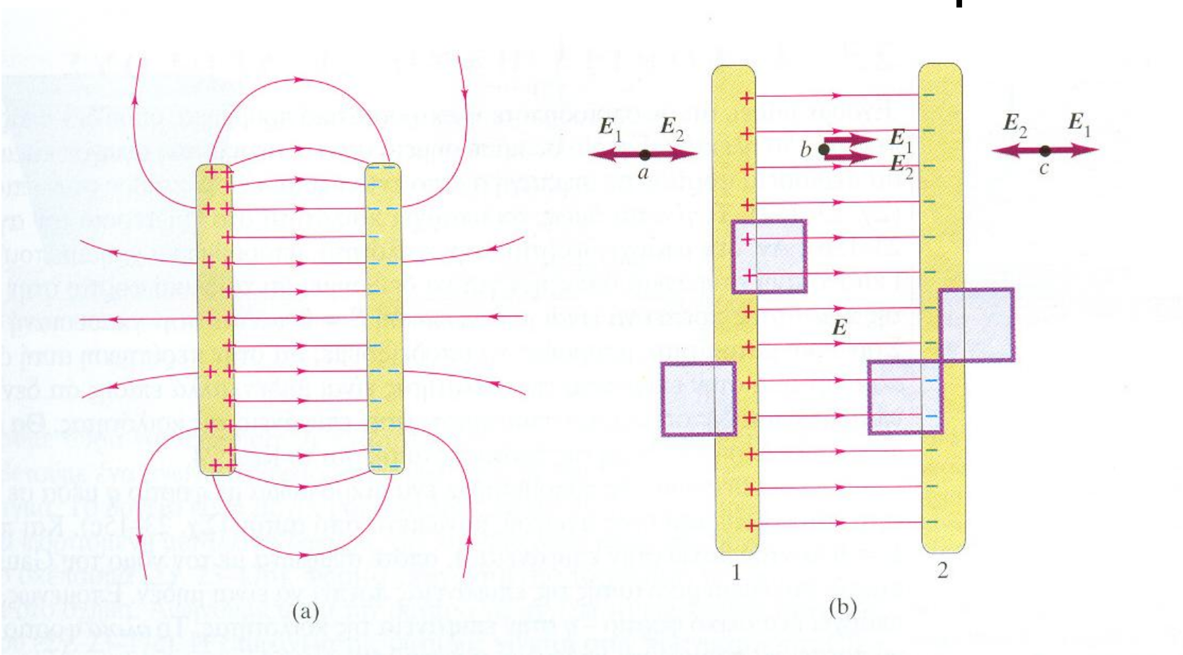
$$2A \cdot E = \frac{\sigma \cdot A}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Αυτή είναι μία καλή προσέγγιση για σημεία που βρίσκονται κοντά στην επιφάνεια (σε σύγκριση με τις διαστάσεις) και όχι κοντά στα άκρα πεπερασμένης επιφάνειας. Εκεί το πεδίο θεωρείται σχεδόν ομογενές και κάθετο στο επίπεδο.

Α5) Πεδίο μεταξύ παράλληλων αγώγιμων πλακών με αντίθετα φορτία. Δύο μεγάλες παράλληλες αγώγιμες πλάκες φορτίζονται με ίσα και αντίθετα φορτία. Το φορτίο ανά μονάδα επιφάνειας είναι +σ για τη μία και -σ για την άλλη. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο στον χώρο μεταξύ των πλακών.

Λύση



Λόγω του Α4 παραδείγματος είναι **μόνο** στο χώρο μεταξύ των πλακών.

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$