

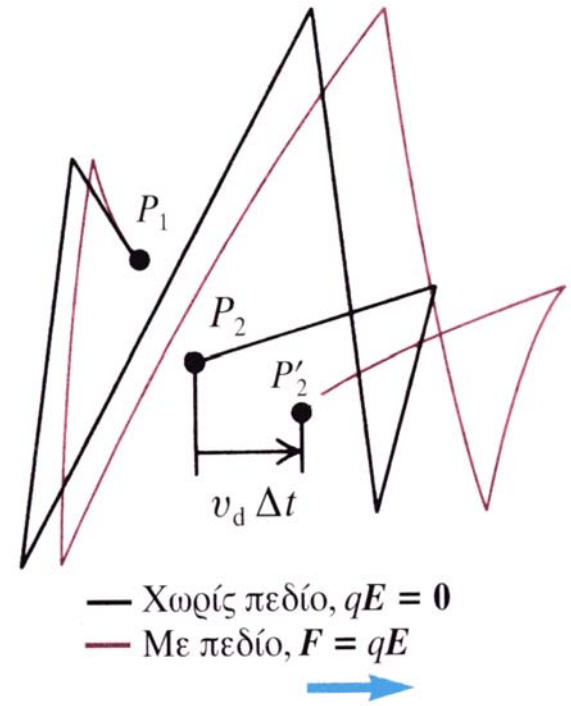
1. Ρεύμα

Ρεύμα είναι οποιαδήποτε κίνηση φορτίων μεταξύ δύο περιοχών. Για να διατηρηθεί σταθερή ροή φορτίου σε αγωγό πρέπει να ασκείται μια σταθερή δύναμη στα κινούμενα φορτία.

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

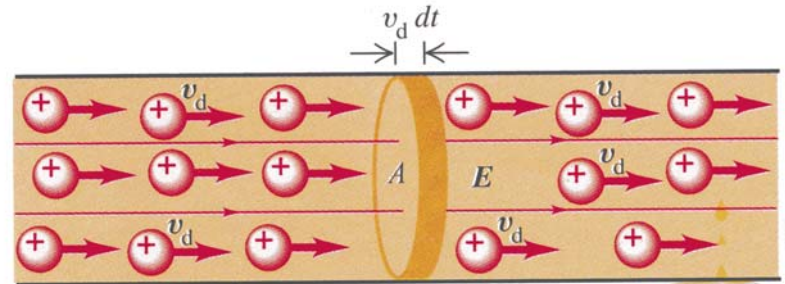
Η δύναμη αυτή δημιουργεί ολίσθηση στην κατεύθυνση της **επιπρόσθετα** της τυχαίας κινήσεως.

Το ηλεκτρικό πεδίο παράγει έργο στα κινούμενα φορτία και η προκύπτουσα κινητική ενέργεια μεταφέρεται στο υλικό μέσω μη ελαστικών αλληλεπιδράσεων με τα ιόντα. Αυτή η μεταφορά ενέργειας αυξάνει την μέση ενέργεια ταλάντωσης των ιόντων και επομένως την θερμοκρασία του υλικού.



Έστω εγκάρσια τομή αγωγού στο οποίο κινούνται θετικά φορτία. Το ρεύμα ορίζεται σαν:

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad 1A = 1 \frac{C}{\text{sec}}$$



Το φορτίο που εξέρχεται από τον κύλινδρο του σχήματος σε χρόνο dt είναι:

$$dQ = qnAv_d dt \Rightarrow I = \frac{dQ}{dt} = qnAv_d \Rightarrow J = \frac{I}{A} = qnv_d$$

Στην γενική περίπτωση πολλών ειδών φορέων έχουμε:

$$I = A \sum_{i=1}^n q_i n_i v_{di} \Rightarrow J = \sum_{i=1}^n q_i n_i v_{di}$$

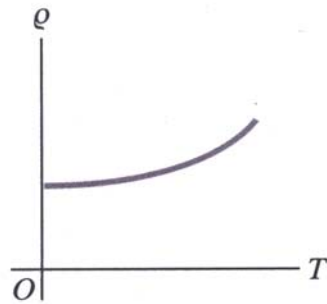
2. Ειδική Αντίσταση

• Στα μέταλλα η πυκνότητα ρεύματος J είναι ανάλογη προς το ηλεκτρικό πεδίο E . Ο συντελεστής αναλογίας λέγεται **ειδική αντίσταση** ρ και εξαρτάται από τις ιδιότητες του υλικού.

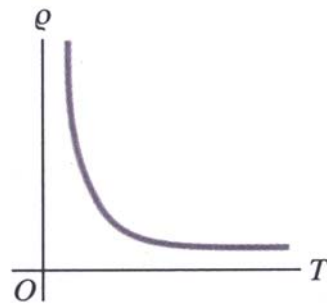
$$E = \rho J \Rightarrow J = \gamma E$$

Η αναλογία μεταξύ J και E για ένα μεταλλικό αγωγό σε σταθερή θερμοκρασία καλείται **Νόμος του Ohm** και δεν είναι γενική ιδιότητα της ύλης.

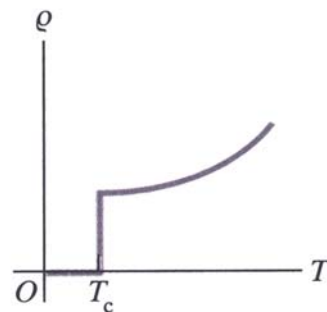
Όσο μεγαλύτερη είναι η ειδική αντίσταση τόσο ισχυρότερο πεδίο απαιτείται για να προκαλέσει δεδομένη πυκνότητα ρεύματος. Οι ειδικές αντιστάσεις των μονωτών είναι μεγαλύτερες αυτών των μετάλλων – κραμάτων κατά παράγοντα της τάξης του 10^{22} .



(a) Μέταλλο



(b) Ημιαγωγός



(c) Υπεραγωγός

• Η ειδική αντίσταση **μεταλλικού** αγωγού αυξάνει σχεδόν πάντα με την αύξηση της θερμοκρασίας. Για μικρές θερμοκρασίες (μέχρι 100°C) ισχύει κατά προσέγγιση:

$$\rho_T = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$$

Οι **ημιαγωγοί** έχουν ειδική αντίσταση μεταξύ μετάλλων και μονωτών. Η ειδική αντίσταση ενός ημιαγωγού ελαττώνεται ραγδαία με την αύξηση της θερμοκρασίας και εξαρτάται από μικρές ποσότητες προσμείξεων.

Σε μερικά υλικά και σε μια θερμοκρασία T_C παρατηρείται αλλαγή φάσης και η ειδική αντίσταση μηδενίζεται απότομα (**υπεραγωγιμότητα**).

• Αν δεν υπάρχει πεδίο τα ελεύθερα ηλεκτρόνια στα μέταλλα κινούνται ευθύγραμμα ανάμεσα στις συγκρούσεις, σε τυχαίες διευθύνσεις και δεν εμφανίζουν συνισταμένη μετατόπιση. Όταν υπάρχει πεδίο οι διαδρομές καμπυλώνονται. Η παρέκκλιση λ είναι:

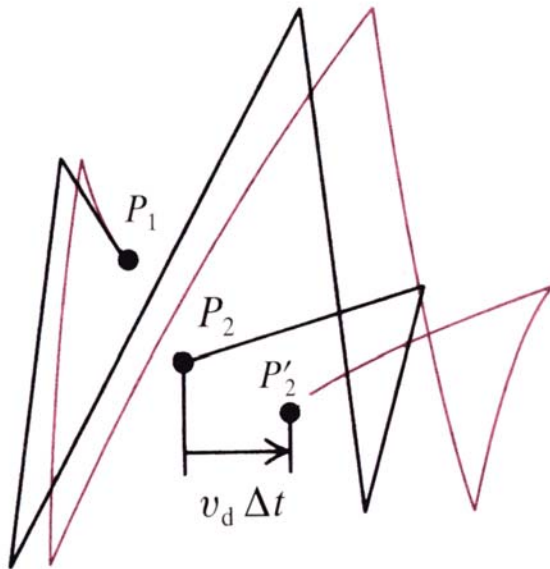
$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow \frac{d^2 \lambda}{dt^2} = \frac{qE}{m} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2$$

$$\Delta l = \sum_i \lambda_i = k \lambda_\mu$$

$$v_d = \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{k \lambda_\mu}{k t_\mu} = \frac{\lambda_\mu}{t_\mu} = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t_\mu$$

$$J = nq v_d = \frac{nq^2 t_\mu}{2m} E \Rightarrow E = \rho J$$

$$\rho = \frac{2m}{nq^2 t_\mu}$$



— Χωρίς πεδίο, $qE = 0$

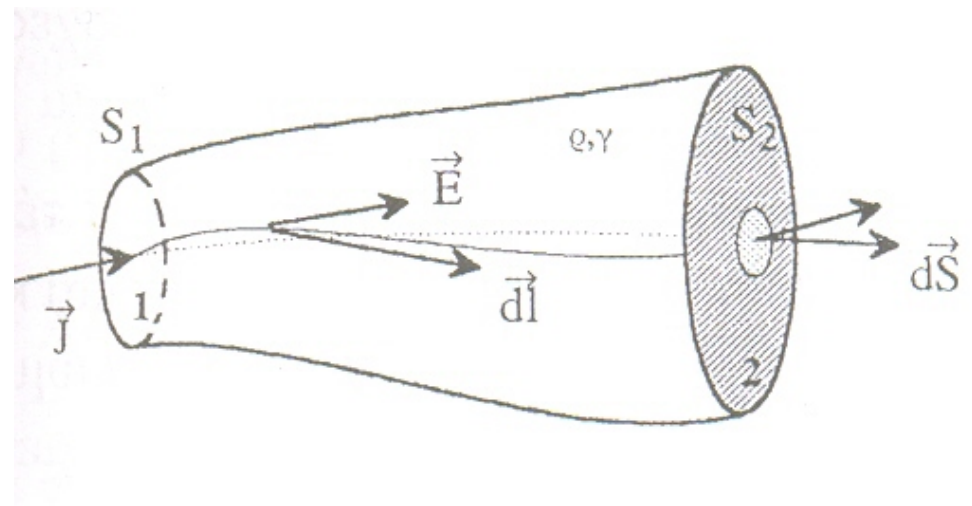
— Με πεδίο, $F = qE$



3. Αντίσταση

• Η αντίσταση ενός αγωγού ορίζεται σύμφωνα με την εξίσωση που ακολουθεί. Ένας αγωγός υπακούει στον **νόμο του Ohm** αν η αντίστασή του είναι **σταθερή** (απλή αναλογία V και I ή E και J).

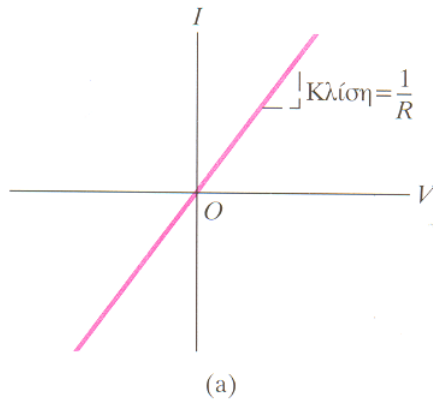
$$R = \frac{V_{12}}{I} = \frac{\int_{S_1}^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\int_{(S)} \vec{J} \cdot d\vec{S}}$$



Η σχέση αυτή ισχύει σε όγκο που περιορίζεται από:

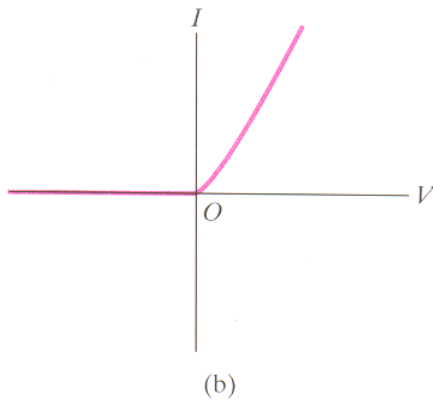
α) τις ισοδυναμικές επιφάνειες (S_1 και S_2) και

β) την επιφάνεια που ορίζουν οι πεδιακές γραμμές, που ξεκινούν από την περίμετρο της S_1 και καταλήγουν στην περίμετρο της S_2 .

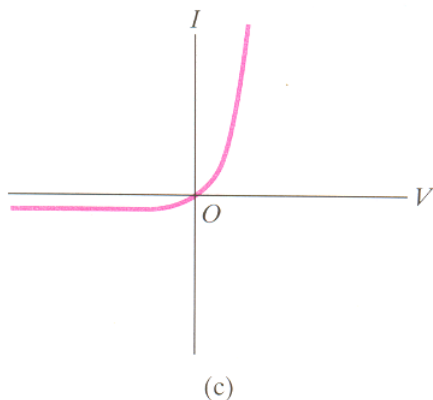


• Σε αντιστάτη που υπακούει τον νόμο του Ohm, η γραφική παράσταση $I=f(V)$ είναι ευθεία κλίσης $1/R$. Σε μικρές θερμοκρασίες (μέχρι 100°C) ισχύει προσέγγιση:

$$R_T = R_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$$

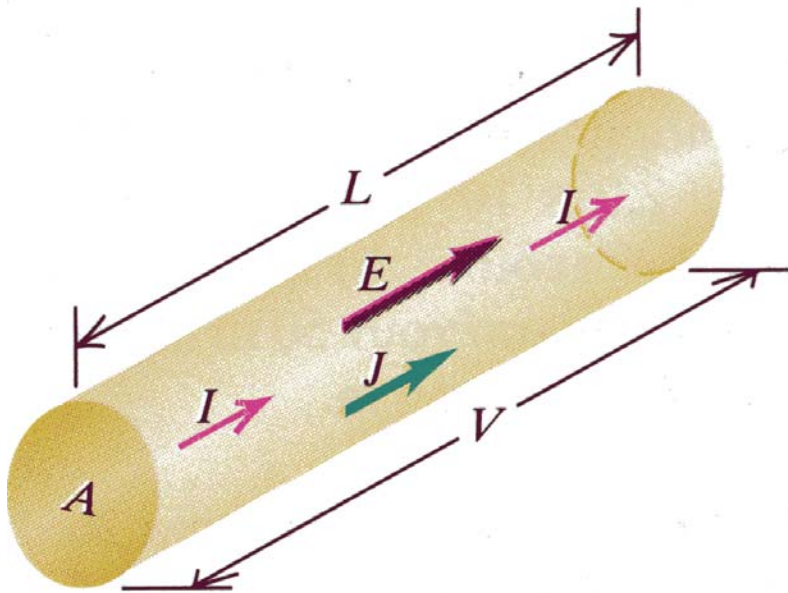


Στην δίοδο ηλεκτρονική λυχνία για θετικές τάσεις ανόδου σε σχέση με την κάθοδο είναι $I=cV^{3/2}$. Για ανάστροφες πολικότητες το ρεύμα είναι εξαιρετικά μικρό.



Στην κρυσταλλοδίοδο η συμπεριφορά είναι αρκετά ασύμμετρη.

- Σε ομογενή αγωγό που υπακούει στον νόμο του Ohm και έχει σταθερή διατομή η πυκνότητα ρεύματος και η ένταση του πεδίου είναι παντού σταθερές. Τότε:



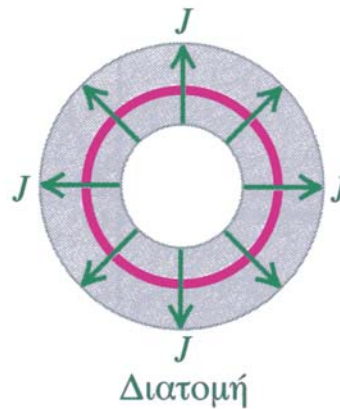
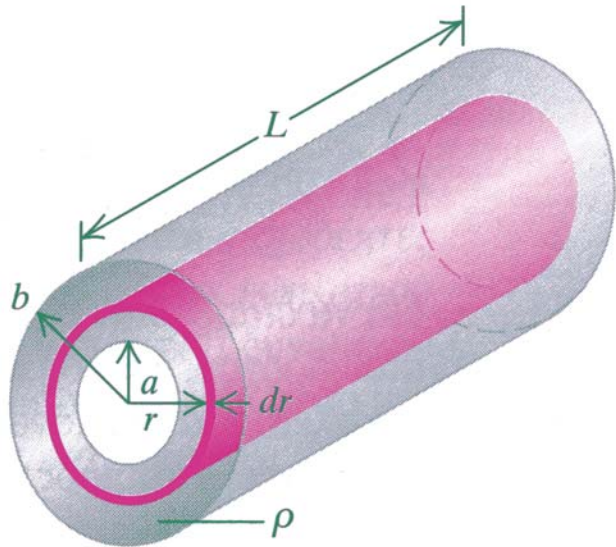
$$R = \frac{V_{12}}{I} = \frac{\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\int_{(S)} \vec{J} \cdot d\vec{A}} \Rightarrow$$

$$R = \frac{\int_1^2 E \cdot dl}{\int_{(S)} J \cdot dA} = \frac{El}{JA} \Rightarrow$$

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

4. Ασκήσεις

Σωλήνας έχει μήκος L , εσωτερική ακτίνα a και εξωτερική ακτίνα b . Είναι κατασκευασμένος από υλικό με ειδική αντίσταση ρ . Ποια η αντίσταση μεταξύ της εσωτερικής και εξωτερικής επιφάνειας (ισοδυναμικών επιφανειών).



Θεωρώ λεπτό κυλινδρικό φλοιό εσωτερικής διαμέτρου r και πάχους dr . Τότε:

$$dR = \frac{\rho dr}{2\pi r L} \Rightarrow R = \frac{\rho}{2\pi L} \int_a^b \frac{dr}{r} \Rightarrow R = \frac{\rho}{2\pi L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

5. Ηλεκτρεγερτική Δύναμη

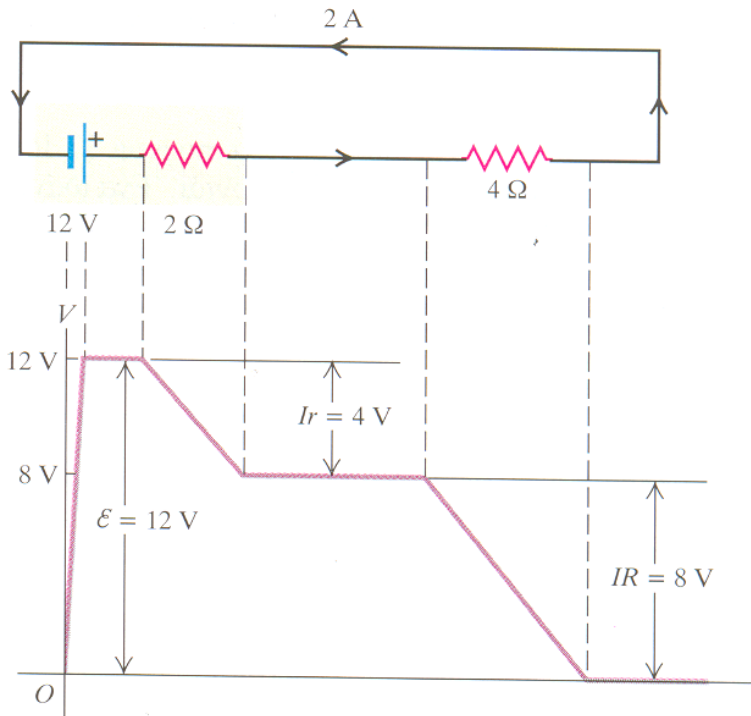
Σε ένα αντιστάτη ηλεκτρικού κυκλώματος τα θετικά φορτία κινούνται προς την κατεύθυνση του χαμηλότερου δυναμικού λόγω της ηλεκτρικής δύναμης. Η αιτία που ωθεί τα θετικά φορτία από χαμηλότερο σε υψηλότερο δυναμικό καλείται **ηλεκτρεγερτική δύναμη (E)** και είναι η ενέργεια ανά μονάδα φορτίου που προσφέρεται από την πηγή.

- Σε μια ιδανική πηγή ηλεκτρεγερτικής δύναμης είναι:

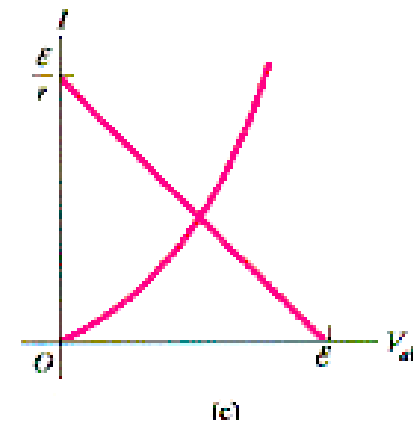
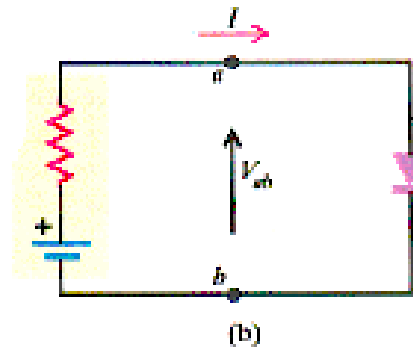
$$V_{ab} = IR \Rightarrow E = IR \Rightarrow I = \frac{E}{R}$$

- Σε μια πραγματική πηγή ηλεκτρεγερτικής δύναμης τα φορτία αντιμετωπίζουν εσωτερική ωμική αντίσταση r .

$$V_{ab} = IR \Rightarrow E - Ir = IR \Rightarrow I = \frac{E}{R + r}$$



• Γραφική παράσταση της μεταβολής του δυναμικού σε κλειστό κύκλωμα (θεωρώ το δυναμικό στον αρνητικό πόλο της μπαταρίας μηδέν).



• Γραφική επίλυση κυκλώματος που περιέχει μη γραμμική διάταξη (δίοδο). Το σημείο λειτουργίας είναι η τομή των $I=f(V_{ab})$ της διόδου και $V_{ab}=E-Ir$ της πηγής.

6. Ενέργεια και Ισχύς

Το έργο που παράγεται επί του φορτίου q , καθώς αυτό διέρχεται από στοιχείο ηλεκτρικού κυκλώματος είναι:

$$W = qV_{ab}$$

Αν το ρεύμα είναι I και σε χρόνο dt διέρχεται φορτίο dq είναι:

$$dW = V_{ab}dq = V_{ab}Idt \Rightarrow P = \frac{dW}{dt} = V_{ab}I$$

• Αν το στοιχείο του κυκλώματος είναι ωμικός αντιστάτης:

$$P = V_{ab}I = I^2 R = \frac{V_{ab}^2}{R}$$

Τα φορτία συγκρούονται με άτομα του αντιστάτη και μεταφέρουν μέρος της ενέργειάς τους σε αυτά. Είτε η θερμοκρασία του αντιστάτη αυξάνει ή κάποια ροή θερμότητας εγκαταλείπει τον αντιστάτη ή συμβαίνουν και τα δύο.

- Η ηλεκτρική ισχύς **εξόδου** πηγής είναι:

$$P = V_{ab}I = (E - Ir)I = EI - I^2r$$

Ο όρος EI δίνει τον ρυθμό μεταφοράς ενέργειας στα φορτία με μετατροπή μη ηλεκτρικής ενέργειας σε ηλεκτρική. Ο όρος I^2r δίνει τον ρυθμό κατανάλωσης της ενέργειας στην εσωτερική αντίσταση της πηγής.

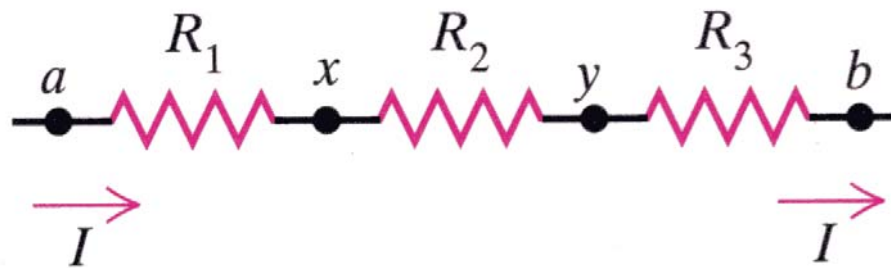
- Η ηλεκτρική ισχύς **φόρτισης (εισόδου)** πηγής είναι:

$$P = V_{ab}I = (E + Ir)I = EI + I^2r$$

Ο όρος EI δίνει τον ρυθμό μετατροπής ηλεκτρικής ενέργειας σε μη ηλεκτρική. Ο όρος I^2r δίνει τον ρυθμό κατανάλωσης της ενέργειας στην εσωτερική αντίσταση της πηγής.

7. Αντιστάτες σε σειρά και παράλληλα

• Όταν αντιστάτες συνδέονται διαδοχικά, με τρόπο που επιτρέπει μόνο μια μοναδική διαδρομή του ρεύματος, έχουμε σύνδεση σε **σειρά**. Η ισοδύναμη αντίσταση (που διαρρέεται από το ίδιο συνολικό ρεύμα και έχει την ίδια διαφορά δυναμικού) είναι:



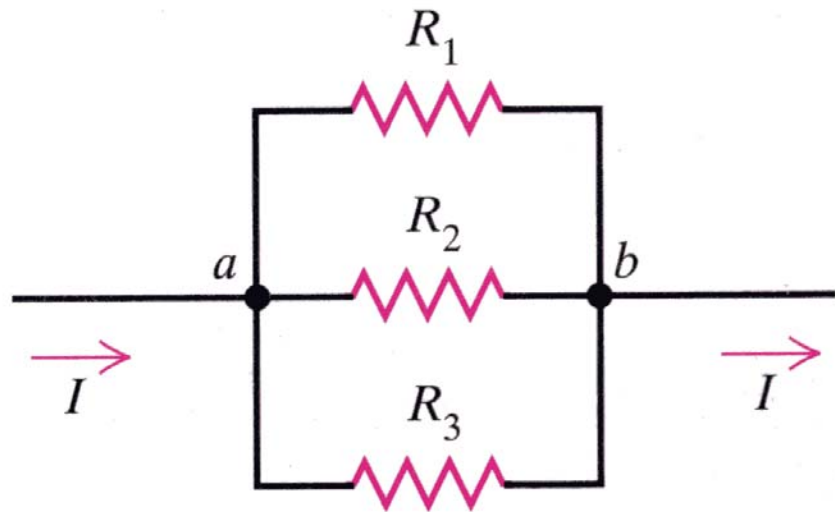
$$V_{ab} = IR_{eq}$$

$$V_{ab} = V_{ax} + V_{xy} + V_{yb} = I(R_1 + R_2 + R_3)$$

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 \Rightarrow R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i$$

• Όταν αντιστάτες συνδέονται με κοινά άκρα, ώστε ο καθένας να παρέχει μια διαφορετική διαδρομή του ρεύματος, έχουμε σύνδεση **παράλληλα**. Η ισοδύναμη αντίσταση είναι:

$$I = \frac{V_{ab}}{R_{eq}}, \quad I = I_1 + I_2 + I_3 = V_{ab} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$



$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

8. Κανόνες του Kirchhoff

- **Κόμβος** σε ένα κύκλωμα είναι ένα σημείο στο οποίο συνενώνονται τρεις ή περισσότεροι αγωγοί. **Βρόχος** σε ένα κύκλωμα είναι ένας οποιοσδήποτε κλειστός αγωγίμος δρόμος.
- **Κανόνας των κόμβων:** Το αλγεβρικό άθροισμα των ρευμάτων σε οποιοσδήποτε κόμβο είναι μηδέν.

$$\sum_{i=1}^n I = 0$$

Ο κανόνας των κόμβων βασίζεται στην **διατήρηση** του ηλεκτρικού φορτίου.

- **Κανόνας των βρόχων:** Το αλγεβρικό άθροισμα των διαφορών δυναμικού κατά μήκος οποιουδήποτε βρόχου είναι μηδέν.

$$\sum_{i=1}^n V = 0$$

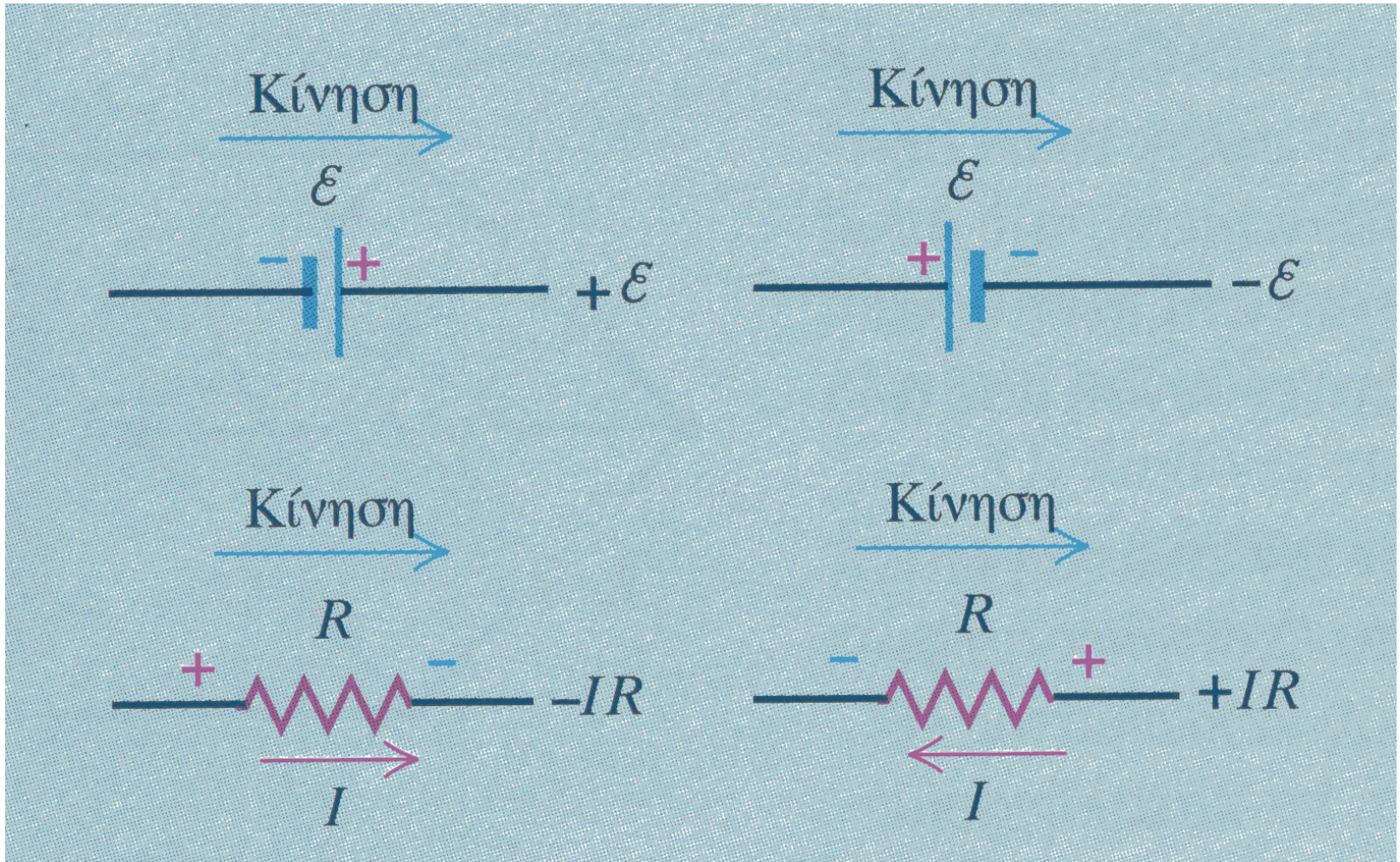
Ο κανόνας των βρόχων βασίζεται στο ότι το ηλεκτροστατικό πεδίο είναι **διατηρητικό**.

Στην εφαρμογή του ακολουθούμε τις εξής συμβάσεις:

α) Επιλέγουμε κάποια φορά ρεύματος για κάθε τμήμα του κυκλώματος.

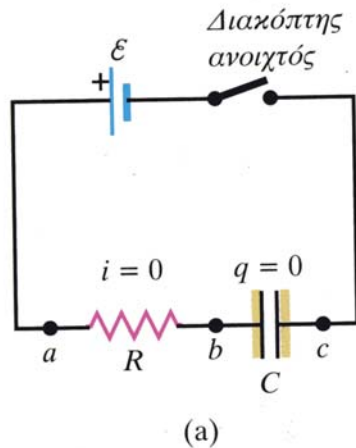
β) Όταν διερχόμαστε από αντιστάτη κατά την φορά του ρεύματος το IR θεωρείται αρνητικό, αφού το ρεύμα ακολουθεί φορά ελάττωσης του δυναμικού. Όταν διερχόμαστε αντίθετα στην φορά του ρεύματος το IR θεωρείται θετικό, αφού το ρεύμα ακολουθεί φορά ελάττωσης του δυναμικού.

γ) Όταν διερχόμαστε από πηγή κατά την φορά αύξησης του δυναμικού ($- \rightarrow +$) η ΗΕΔ θεωρείται θετική. Όταν διερχόμαστε κατά την φορά μείωσης του δυναμικού ($+ \rightarrow -$) η ΗΕΔ θεωρείται αρνητική.



9. Κυκλώματα R, C

• **Φόρτιση Πυκνωτού:** Έστω q το φορτίο του πυκνωτή και i το ρεύμα του κυκλώματος την τυχαία χρονική στιγμή t μετά το κλείσιμο του διακόπτη. Οι στιγμιαίες διαφορές δυναμικού είναι:



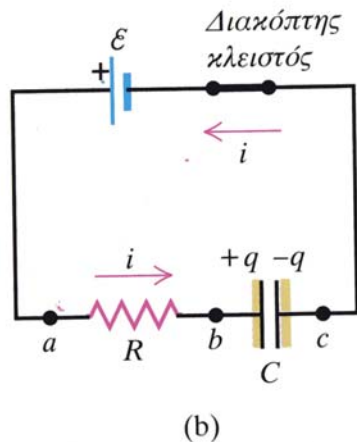
$$V_{ab} = iR, \quad V_{bc} = \frac{q}{C}$$

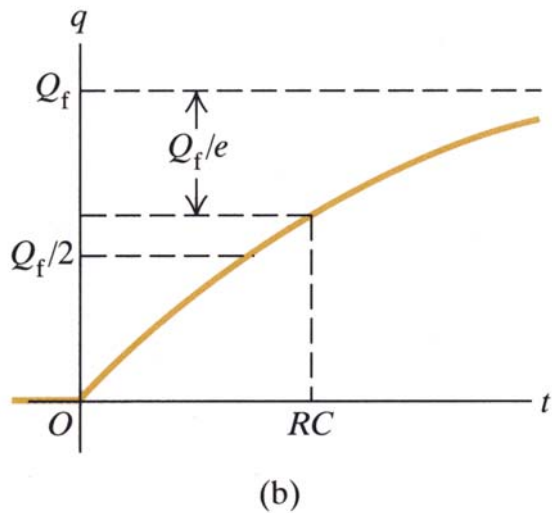
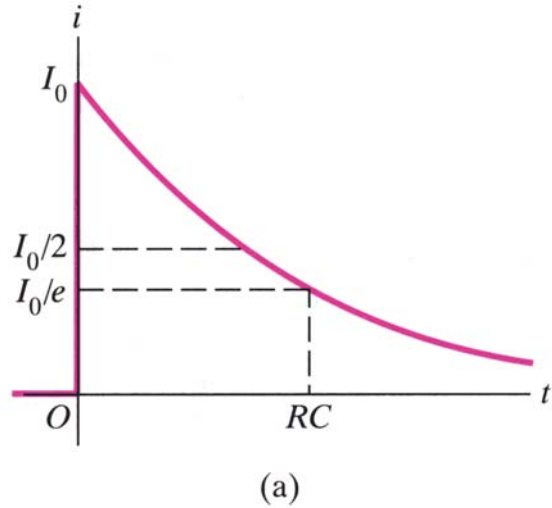
Από τον νόμο του Kirchhoff για βρόχους είναι:

$$E - iR - \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow i = \frac{E}{R} - \frac{q}{RC} \Rightarrow$$

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC}(q - EC) \Rightarrow \frac{dq}{q - EC} = -\frac{dt}{RC} \Rightarrow$$

$$\int_0^q \frac{dq'}{q' - EC} = \int_0^t \frac{dt'}{RC} \Rightarrow \ln \frac{q - EC}{-EC} = -\frac{t}{RC} \Rightarrow$$





$$\frac{q - EC}{-EC} = e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow q = EC \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

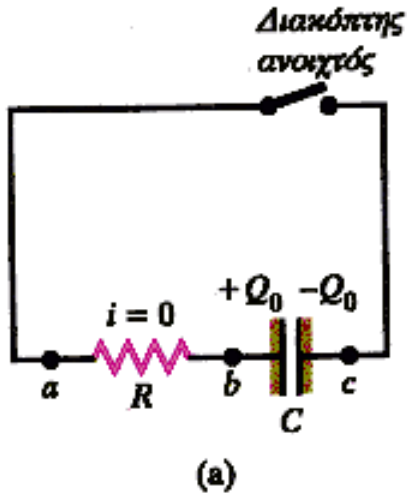
Το στιγμιαίο ρεύμα i είναι:

$$i = \frac{dq}{dt} = EC \left(-e^{-\frac{t}{RC}} \right) \left(-\frac{1}{RC} \right) \Rightarrow$$

$$i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

Η ποσότητα $\tau = RC$ καλείται σταθερά χρόνου και είναι ένα μέτρο του πόσο γρήγορα φορτίζεται ο πυκνωτής.

- **Εκφόρτιση Πυκνωτού:** Έστω Q_0 το φορτίο του πυκνωτή μετά την φόρτισή του. Απομακρύνουμε την μπαταρία και κλείνουμε το κύκλωμα ($t=0$). Από τον νόμο του Kirchhoff για βρόχους είναι:

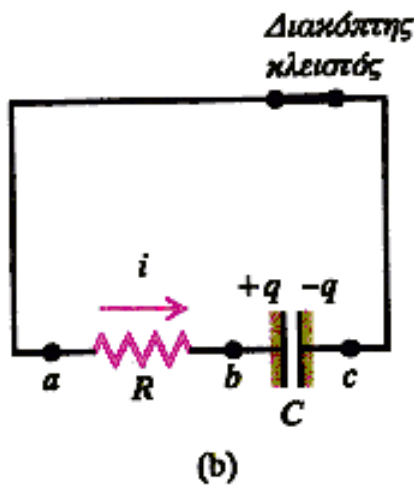


$$-iR - \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow i = -\frac{q}{RC} \Rightarrow$$

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC} \Rightarrow \frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC} \Rightarrow$$

$$\int_{Q_0}^q \frac{dq'}{q'} = -\int_0^t \frac{dt'}{RC} \Rightarrow \ln \frac{q}{Q_0} = -\frac{t}{RC} \Rightarrow$$

$$q = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$



Το στιγμιαίο ρεύμα i είναι:

$$i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow i = -\frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η φορά του ρεύματος είναι αντίθετη από αυτή που δεχθήκαμε.

Η ποσότητα $\tau=RC$ καλείται σταθερά χρόνου και είναι ένα μέτρο του πόσο γρήγορα εκφορτίζεται ο πυκνωτής.