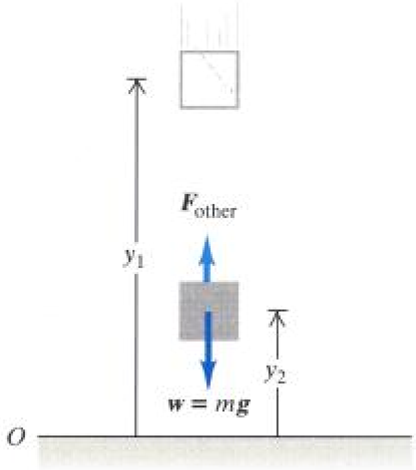
1. Δυναμική Ενέργεια και Διατηρητικές Δυνάμεις

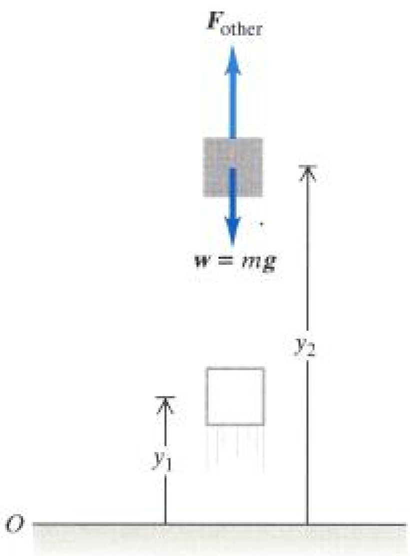
- Εξετάζοντας την αιώρα παρατηρούμε ότι στα ανώτατα σημεία η ενέργεια μοιάζει να έχει αποθηκευτεί υπό κάποια άλλη μορφή, που συνδέεται με το ύψος της πάνω από το έδαφος, και να μετατρέπεται και πάλι σε κινητική ενέργεια καθώς αιωρείται προς το κατώτατο σημείο.

Η ενέργεια που σχετίζεται με την θέση ονομάζεται **δυναμική ενέργεια** και οι δυνάμεις που μπορούν να συσχετιστούν με κάποιου είδους δυναμική ενέργεια ονομάζονται **διατηρητικές δυνάμεις**. Ένα σύστημα στο οποίο η ολική μηχανική ενέργεια, κινητική και δυναμική, είναι σταθερή ονομάζεται **διατηρητικό σύστημα.**

2. Βαρυτική Δυναμική Ενέργεια



(a)



(b)

- Βρισκόμαστε **κοντά στην επιφάνεια της γης**, ώστε το βάρος σώματος να είναι σταθερό. Το έργο που παράγεται από το βάρος όταν το σώμα εκτελεί πτώση είναι (θετικό):

$$W_{grav} = Fs = w(y_1 - y_2) \Rightarrow$$

$$W_{grav} = mgy_1 - mgy_2$$

Η έκφραση αυτή δίνει σωστό αποτέλεσμα και στην άνοδο του σώματος όπου το έργο είναι αρνητικό.

Μπορούμε λοιπόν να εκφράσουμε το παραγόμενο έργο σαν διαφορά των τιμών μιας ποσότητας στην αρχή και στο τέλος της μετατόπισης. Η ποσότητα αυτή ονομάζεται **Βαρυτική Δυναμική Ενέργεια (*U*).**

$$U = mgh$$

Συνεπώς:

$$W_{grav} = U_1 - U_2 = -\Delta U$$

Ø Αν το βάρος είναι η μοναδική δύναμη που δρα στο σώμα δηλαδή:

$$F_{other} = 0 \Rightarrow \; W_{tot} = W_{grav} = U_1 - U_2 = -\Delta U$$

Όμως: $$W_{tot} = K_2 - K_1$$

Δηλαδή: $$U_1 - U_2 = K_2 - K_1 \Rightarrow U_1 + K_1 = U_2 + K_2$$

$$mgy_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 = mgy_2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

Όταν το βάρος είναι η μόνη δύναμη που δρα στο σώμα, τότε **η ολική μηχανική ενέργεια *K*+*U* διατηρείται.** Από φυσική άποψη δεν ενδιαφέρει η τιμή της *U* σε συγκεκριμένο σημείο, αλλά μόνο η διαφορά της *U* ανάμεσα σε δύο σημεία.

Ø Αν το βάρος δεν είναι η μοναδική δύναμη που δρα στο σώμα:

$$F_{other} \neq 0 \Rightarrow \; W_{tot} = K_2 - K_1 \Rightarrow W_{grav} + W_{other} = K_2 - K_1$$

Όμως: $W_{grav} = U_1 - U_2$

Δηλαδή:

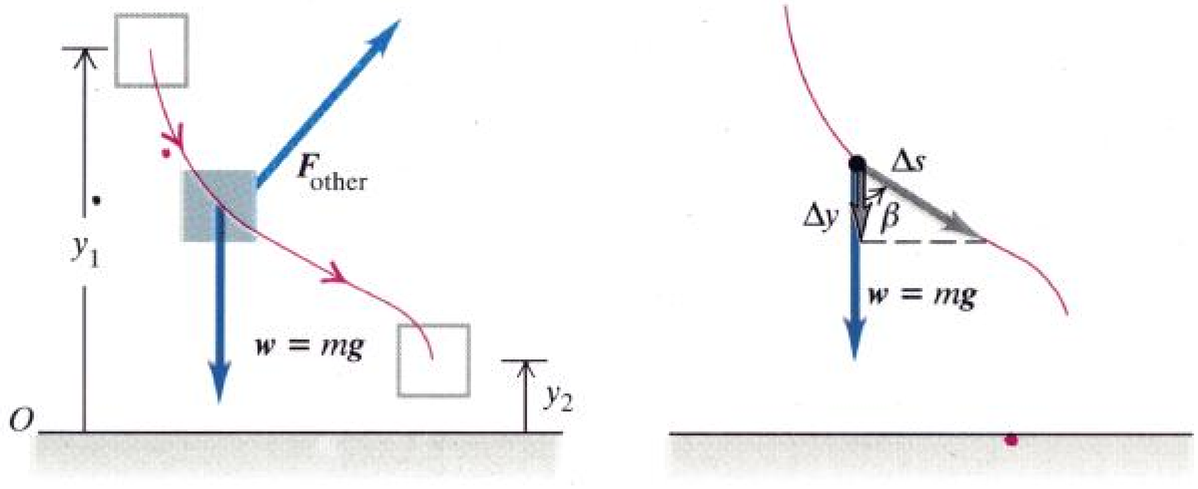
$$U_1 - U_2 + W_{other} = K_2 - K_1 \Rightarrow$$

$$U_1 + K_1 + W_{other} = U_2 + K_2$$

$$mgy_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 + W_{other} = mgy_2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

Το έργο που παράγεται από όλες τις δυνάμεις, εκτός της βαρυτικής, ισούται με την **μεταβολή** στην ολική μηχανική ενέργεια $K+U$ του συστήματος

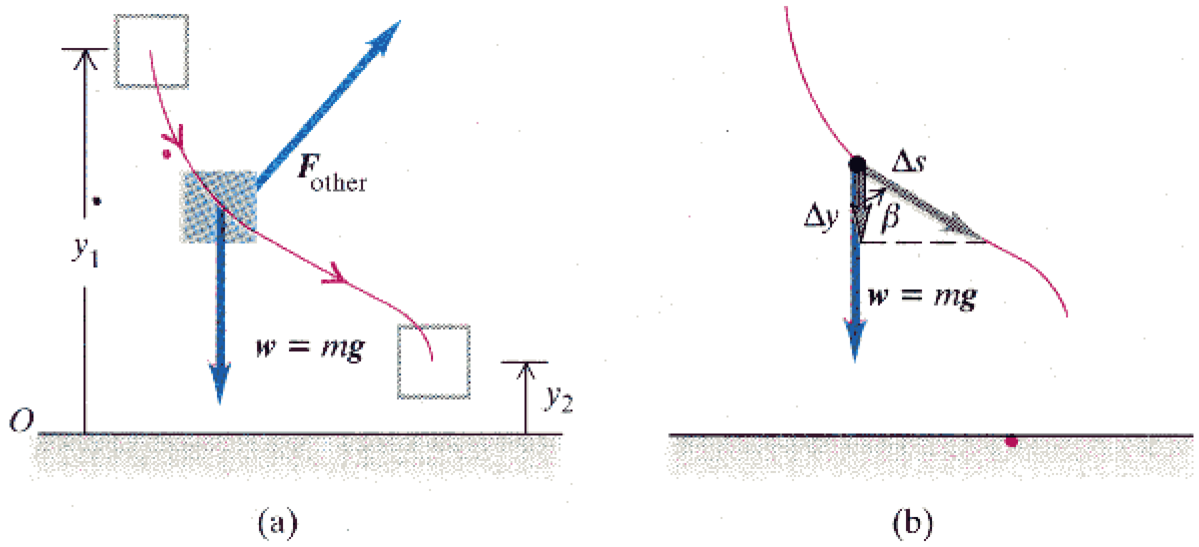
Ø Στην γενική περίπτωση καμπύλης τροχιάς την διαιρούμε σε μικρά τμήματα Δs. Τότε:



(a) (b)

$$\Delta W = mg\Delta s\cos b = -mg\Delta y \quad (\Delta W > 0,\ \ \Delta y < 0)$$

Όμως: $$W = -\sum_{i=1}^{n} mg\Delta y = -mg\sum_{i=1}^{n}\Delta y = -mg\left(y_2 - y_1\right)$$



Δηλαδή: $$W = mgy_1 - mgy_2 = U_1 - U_2$$

Το έργο που παράγεται από την βαρυτική δύναμη εξαρτάται μόνο από την κατακόρυφη μετατόπιση (y_2-y_1). Το έργο αυτό είναι ανεξάρτητο από οποιαδήποτε οριζόντια μετατόπιση συνυπάρχει.

3. Νόμος της Βαρύτητας

- Το βάρος ενός σώματος είναι το πιο γνώριμο παράδειγμα βαρυτικής έλξης. Σύμφωνα με το νόμο της βαρύτητας, κάθε υλικό σωμάτιο έλκει κάθε άλλο σωμάτιο με δύναμη που είναι ανάλογη του γινομένου των μαζών τους και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της αποστάσεως τους.

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad G = 6{,}673.10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}$$

Η αλληλεπίδραση μεταξύ δύο σωμάτων που έχουν σφαιρικά συμμετρικές κατανομές μάζας (πχ. Συμπαγείς σφαίρες ή σφαιρικοί φλοιοί) είναι η ίδια με αυτή που θα ασκείτο αν όλη η μάζα του κάθε σώματος ήταν συγκεντρωμένη στο κέντρο του.

4. Βάρος

- Προσομοιάζοντας την γη με σφαίρα το βάρος ενός μικρού σώματος είναι:

$$w = G\frac{mm_\Gamma}{r^2}$$

Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι:

$$g = G\frac{m_\Gamma}{r^2}$$

Το φαινομενικό βάρος ενός σώματος στην γη διαφέρει λίγο από τη βαρυτική δύναμη, γιατί η γη περιστρέφεται και έτσι μόνο προσεγγιστικά μπορεί να θεωρηθεί αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

5. Βαρυτική Δυναμική Ενέργεια

- Όταν η απόσταση από τη γη μεταβάλλεται αρκετά το βάρος δεν είναι πλέον σταθερό αλλά:

$$w = G\frac{mm_{\Gamma}}{r^2}$$

Το έργο που παράγεται από την βαρυτική δύναμη κατά την μετατόπιση από μια αρχική σε μια τελική θέση είναι:

$$W = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{w}\cdot d\vec{l} = \int_1^2 wdl\cos q = -\int_1^2 wdr \Rightarrow$$

$$W = -Gmm_{\Gamma}\int_1^2 \frac{dr}{r^2} = -Gmm_{\Gamma}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$W_{grav} = U_1 - U_2$$

με $$U = -G\frac{mm_\Gamma}{r}$$

Όταν το βάρος είναι η μόνη δύναμη που δρα στο σώμα, τότε **η ολική μηχανική ενέργεια *K*+*U* διατηρείται.** Από φυσική άποψη δεν ενδιαφέρει η τιμή της *U* σε συγκεκριμένο σημείο, αλλά μόνο η διαφορά της *U* ανάμεσα σε δύο σημεία.

Όταν είμαστε κοντά στην επιφάνεια της γης ($r = r_1 = r_2$) έχουμε:

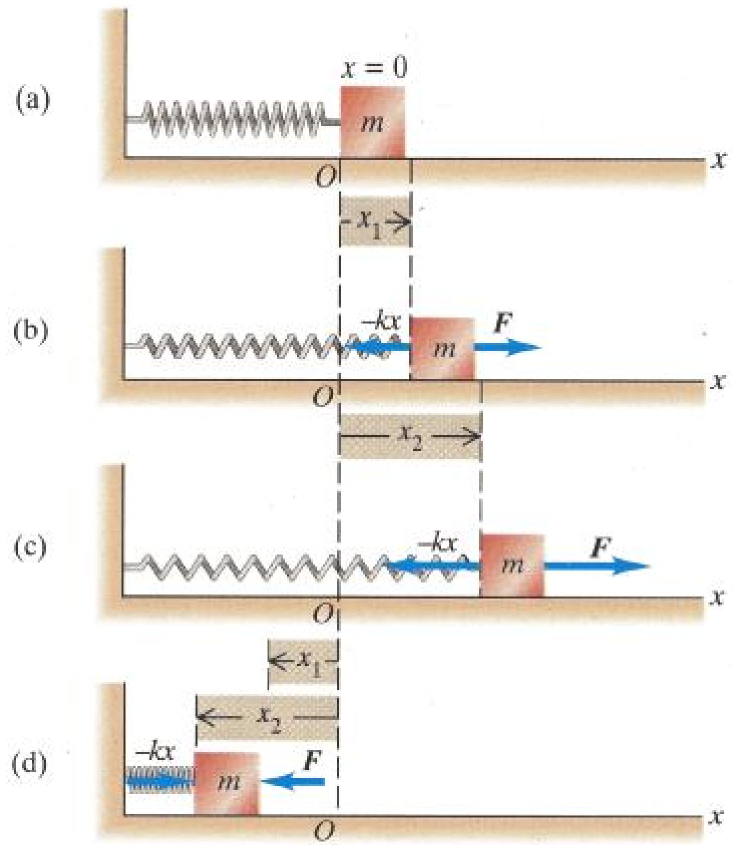
$$W_{grav} = Gmm_\Gamma \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2} = Gmm_\Gamma \frac{r_1 - r_2}{R_\Gamma^2} = mg\left(r_1 - r_2\right) \Rightarrow$$

$$W_{grav} = U_1 - U_2 \qquad \text{με} \qquad U = mgr$$

6. Ελαστική Δυναμική Ενέργεια

• Το έργο που παράγουμε επί ελατηρίου για επέκταση από x_1 σε x_2 είναι:

$$W = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2$$

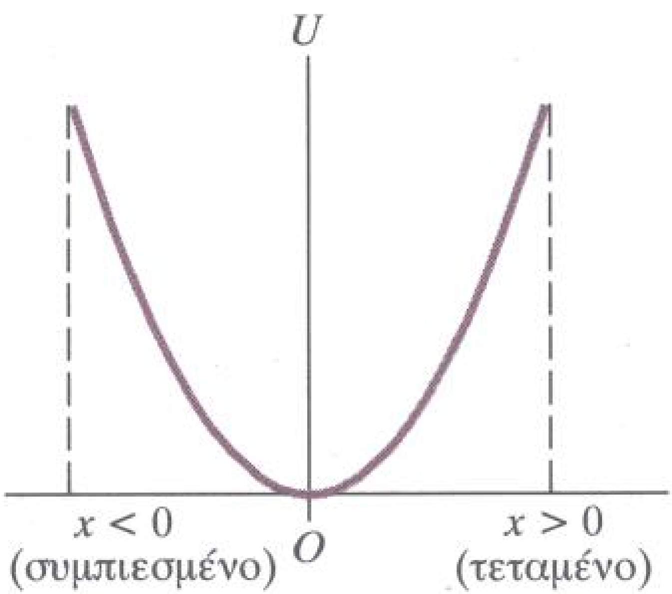


Το έργο που παράγεται από το ελατήριο επί του σώματος είναι (λόγω του τρίτου νόμου του Νεύτωνα):

$$W_{el} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2$$

Ορίζουμε την ελαστική δυναμική ενέργεια σαν:

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$



$$W_{el} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 = U_1 - U_2 = -\Delta U$$

$$W_{tot} = K_2 - K_1$$

- Αν η δύναμη του ελατηρίου είναι η μοναδική που παράγει έργο επί του σώματος τότε:

$$W_{tot} = W_{el} \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2$$

Στην περίπτωση αυτή η ολική ενέργεια διατηρείται.

- Αν και άλλες δυνάμεις παράγουν έργο επί του σώματος τότε:

$$W_{tot} = W_{el} + W_{other} = K_2 - K_1$$

$$W_{el} = U_1 - U_2$$

$$K_1 + U_1 + W_{other} = K_2 + U_2$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 + W_{other} = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2$$

Το έργο που παράγεται από όλες τις δυνάμεις πλην της ελαστικής ισούται με την μεταβολή της ολικής μηχανικής ενέργειας.

- Στην περίπτωση που έχουμε και ελαστικές και βαρυτικές δυνάμεις (σώμα που κρέμεται στο άκρο του ελατηρίου μέσα στο πεδίο βαρύτητας) ισχύει:

$$K_1 + U_1 + W_{other} = K_2 + U_2$$

όπου U_1 και U_2 οι τιμές της ολικής δυναμικής ενέργειας (βαρυτικής και ελαστικής) δηλαδή:

$$U = \frac{1}{2}kx^2 + mgh$$

Αν η βαρυτική και η ελαστική δύναμη είναι οι μοναδικές που παράγουν έργο επί του σώματος τότε:

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

7. Διατηρητικές και μη Διατηρητικές Δυνάμεις

Ø Μια δύναμη που προσφέρει την δυνατότητα αμφίδρομης μετατροπής μεταξύ δύο μορφών ενέργειας (κινητικής και δυναμικής) λέγεται **διατηρητική δύναμη**.

Το έργο που παράγει έχει τις ακόλουθες ιδιότητες :

• Μπορεί πάντα να εκφραστεί σαν διαφορά μεταξύ της αρχικής και της τελικής τιμής μιας συνάρτησης **δυναμικής ενέργειας**.

• Είναι αντιστρεπτό.

• Είναι ανεξάρτητο της τροχιάς του σώματος και εξαρτάται μόνο από την αρχική και την τελική θέση του.

• Αν η αρχική και την τελική θέση συμπίπτουν, το συνολικό έργο είναι μηδέν.

Αν όλο το παραγόμενο έργο στο σώμα παράγεται από διατηρητικές δυνάμεις, η ολική μηχανική ενέργεια $E=K+U$ είναι σταθερή.

- Για να περιγράψουμε τις ενεργειακές σχέσεις μη διατηρητικών δυνάμεων, πρέπει να εισαγάγουμε πρόσθετες μορφές ενέργειας σε μια πιο γενική αρχή διατήρησης της ενέργειας.

Όταν ένα σώμα ολισθαίνει σε μια ανώμαλη επιφάνεια, η θερμοκρασία αυξάνεται. Η ενέργεια που συνδέεται με την μεταβολή αυτή ονομάζεται **εσωτερική ενέργεια**.

8. Δύναμη και Δυναμική Ενέργεια

• Θεωρούμε κίνηση κατά μήκος μιας ευθείας με συντεταγμένη *x*. Έστω $F_x(x)$ η δύναμη και $U(x)$ η δυναμική ενέργεια. Σε κάθε μετατόπιση το έργο *W* που παράγεται ισούται με:

$$W = -\Delta U \Rightarrow F_x^{av}(x)\Delta x = -\Delta U \Rightarrow$$

$$F_x^{av}(x) = -\frac{\Delta U}{\Delta x} \Rightarrow F_x(x) = -\frac{dU}{dx}$$

Στις τρεις διαστάσεις ($U(x,y,z)$) ισχύουν τα ίδια, αφού κατά την μετατόπιση σε οποιοδήποτε άξονα οι δυνάμεις εκτός του άξονα αυτού είναι κάθετες στην μετατόπιση και συνεπώς δεν παράγουν έργο. Επομένως:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

Στον υπολογισμό των μερικών παραγώγων θεωρούμε τις δύο άλλες συντεταγμένες σταθερές.

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right) \Rightarrow$$

$$\vec{F} = -\nabla U$$

Αυτός ο διανυσματικός τελεστής ονομάζεται κλίση ή βαθμίδα. Το παραγόμενο από αυτόν διάνυσμα κατευθύνεται στην μέγιστη μεταβολή της βαθμωτής συνάρτησης.

- **Παράδειγμα**

Να υπολογιστεί η κλίση των βαθμωτών πεδίων:

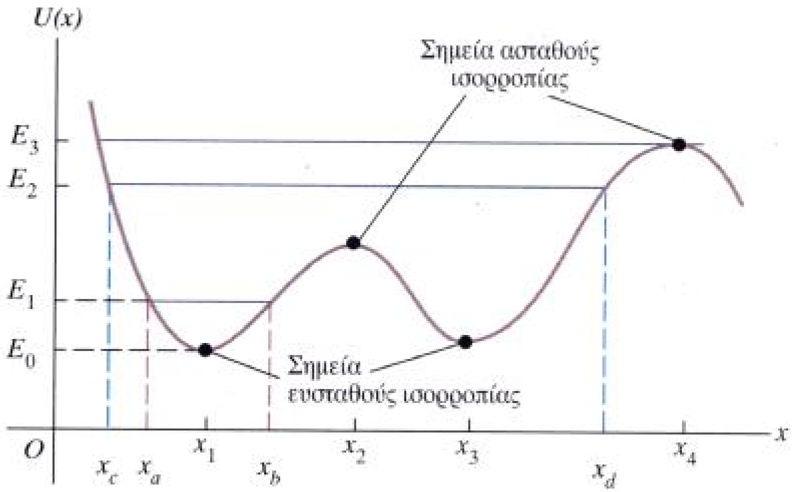
$$\Phi_1(r) = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{και} \quad \Phi_2(r) = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

α) $$\nabla\Phi_1 = \frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\vec{k} = \frac{x}{r}\vec{i} + \frac{y}{r}\vec{j} + \frac{z}{r}\vec{k} = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{e}_r$$

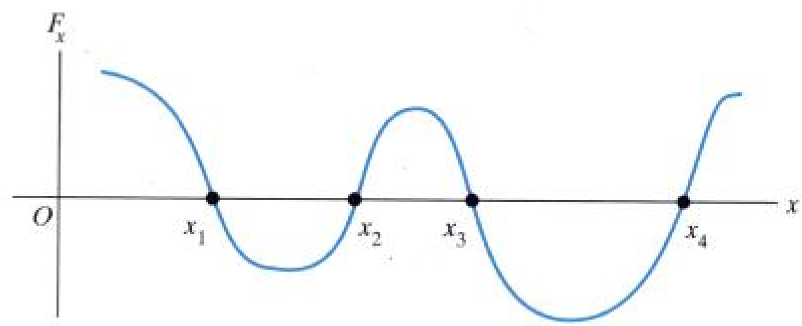
β) $$\nabla\Phi_2 = \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}\vec{k} =$$

$$= \frac{-x}{r^3}\vec{i} + \frac{-y}{r^3}\vec{j} + \frac{-z}{r^3}\vec{k} = -\frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{1}{r^2}\vec{e}_r$$

9. Ενεργειακά Διαγράμματα



(a)



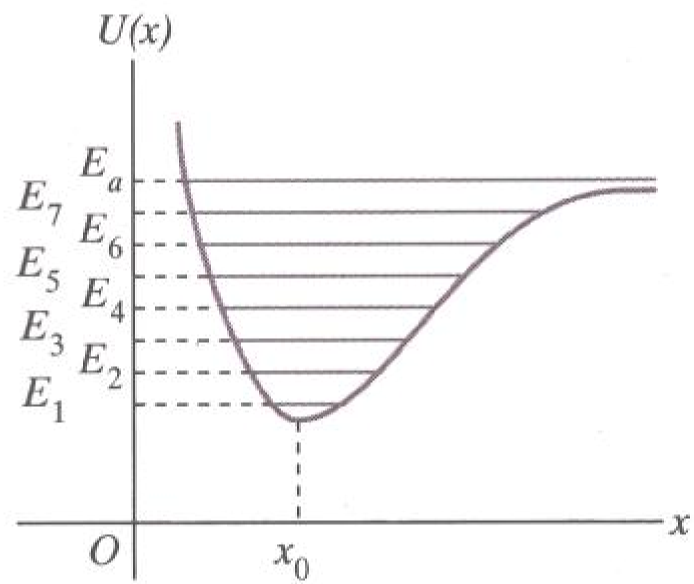
(b)

Σε μια καμπύλη δυναμικής ενέργειας

- Κάθε ελάχιστο είναι μια θέση ευσταθούς ισορροπίας.
- Κάθε μέγιστο είναι μια θέση ασταθούς ισορροπίας.

Ολικές ενέργειες E_1 ($x_a \leftrightarrow x_b$) και E_2 ($x_c \leftrightarrow x_d$) αντιστοιχούν με κίνηση σε φρέαρ δυναμικού. Ολική ενέργεια μεγαλύτερη της E_3 αντιστοιχεί σε ενέργεια ‘‘διαφυγής’’.

Στην κβαντική μηχανική οι δυνατές ποσότητες ολικής ενέργειας που μπορεί να έχει ένα σύστημα σχηματίζουν ένα **σύνολο ενεργειακών σταθμών**. Στο σχήμα απεικονίζεται η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας για την αλληλεπίδραση σε διατομικό μόριο.



Η ενέργεια E_α είναι η ελάχιστη ολική ενέργεια διάσπασης του μορίου σε δύο ξεχωριστά άτομα.