ΒΕΣ 06 – Προσαρμοστικά Συστήματα στις Τηλεπικοινωνίες

Θεωρία Στοχαστικών Σημάτων: Εκτίμηση φάσματος, Παραμετρικά μοντέλα

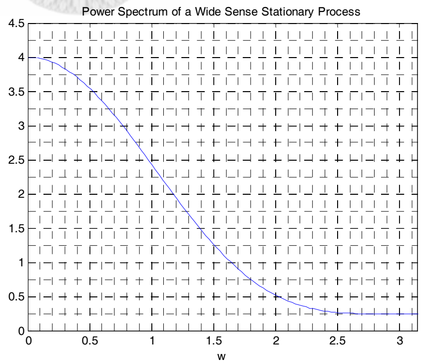
ΒΕΣ 06: Προσαρμοστικά Συστήματα στις Τηλεπικοινωνίες

Βιβλιογραφία Ενότητας

- *Benvenuto [2002]: Κεφάλαιο 1*
- *Widrow [1985]: Chapter 3*
- *Haykin [2001]: Chapter 3*
- *Sayed [2003]: Chapter 1*
- *Boroujeny [1999]: Chapter 1*

© 2007 Nicolas Tsapatsoulis

Εισαγωγή



- Το φάσμα ισχύος μιας υπό την ευρεία έννοια στοχαστικής διεργασίας μας δίνει πληροφορίες για τη διεργασία στο πεδίο της συχνότητας (συχνοτικό της περιεχόμενο).
  - Οι πληροφορίες αυτές είναι αντίστοιχες με αυτές που δίνει στο πεδίο του χρόνου η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης
  - Σε πρακτικό επίπεδο η εκτίμηση φάσματος ισχύος μιας στοχαστικής διεργασίας είναι πολύ σημαντική για την σχεδίαση τηλεπικοινωνιακών συστημάτων μετάδοσης της διεργασίας
- Παραδείγματα τέτοιων χρήσεων είναι η κατανομή καναλιών για μετάδοση φωνής, η σχεδίαση διαμορφωτών, η σχεδίαση κωδικοποιητών φωνής κ.ο.κ

ΒΕΣ 06: Προσαρμοστικά Συστήματα στις Τηλεπικοινωνίες

Πίνακας αυτοσυσχέτισης

- Όταν μελετάμε στοχαστικά σήματα (διεργασίες) αυτό που καταγράφουμε είναι ένα μέρος (απαρτιζόμενο από M δείγματα) μιας πραγμάτωσης της διαδικασίας, το οποίο ονομάζουμε διάνυσμα παρατήρησης και το συμβολίζουμε με **u**(n).
  - **u**(n) = [u(n) u(n-1) … u(n-M+1)]^T
    (T δηλώνει το ανάστροφο ενός διανύσματος ή πίνακα).
- Ορίζουμε ως πίνακα αυτοσυσχέτισης **R** της στοχαστικής διαδικασίας X(n) από την οποία προέρχεται το διάνυσμα παρατήρησης **u**(n) την ποσότητα:

$$R = E\left[\mathbf{u}(n)\mathbf{u}^H(n)\right]$$ όπου *H* δηλώνει το αναστρόφο και συζυγές

Πίνακας αυτοσυσχέτισης (II)

- Αν η στοχαστική διαδικασία X(n) είναι υπό την ευρεία έννοια στάσιμη ο πίνακας αυτοσυσχέτισης εκφράζεται ως:

$$R = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \dots & r(M-1) \\ r(-1) & r(0) & & r(M-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r(-M+1) & r(-M+2) & \dots & r(0) \end{bmatrix}$$

ΒΕΣ 06: Προσαρμοστικά Συστήματα στις Τηλεπικοινωνίες

☑ Εισαγωγή
★ Πίνακας Αυτοσυσχέτισης
☐ Μοντέλα Στοχαστικών Διεργασιών
☐ Φάσμα Ισχύος Στοχαστικών Διεργασιών
☐ Εκτίμηση Φάσματος

Ιδιότητες του πίνακα αυτοσυσχέτισης

1. Ο πίνακας αυτοσυσχέτισης μιας υπό την ευρεία έννοια στοχαστικής διεργασίας είναι Ερμιτιανός (Hermitian), είναι δηλαδή ίσος με τον αναστροφοσυζυγή του.

$$R^H = R$$

   - Το πρακτικό αποτέλεσμα της παραπάνω ιδιότητας είναι ότι ισχύει *r(-k) = r*(k)* για κάθε *k*. Άρα για την εκτίμηση του πίνακα αυτοσυσχέτισης χρειάζονται μόνο *M* τιμές και όχι *2M-1*.

$$R = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \dots & r(M-1) \\ r^*(1) & r(0) & & r(M-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r^*(M-1) & r(M-2) & \dots & r(0) \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί ο πίνακας αυτοσυσχέτισης της στοχαστικής διεργασίας *X(n) = v(n) + 0.5v(n-1)* όπου *v(n)* είναι λευκός θόρυβος με μέση τιμή $\mu_v=0$ και διασπορά σ_v^2

Ιδιότητες του πίνακα αυτοσυσχέτισης (ΙΙ)

2. Ο πίνακας αυτοσυσχέτισης μιας υπό την ευρεία έννοια στοχαστικής διεργασίας είναι Toeplitz, δηλαδή όλα τα στοιχεία της κύριας διαγώνιου είναι ίσα μεταξύ τους καθώς επίσης και όλα τα στοιχεία των παράλληλων προς τη κύρια διαγώνιο είναι ίσα μεταξύ τους.

$$R = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \ldots & r(M-1) \\ r^*(1) & r(0) & & r(M-2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r^*(M-1) & \ldots & r(M-2) & \ldots & r(0) \end{bmatrix}$$

3. Ο πίνακας αυτοσυσχέτισης είναι πάντα θετικά ημιορισμένος, δηλαδή ισχύει $x^H R x \geq 0, \quad \forall x$
και σχεδόν πάντα θετικά ορισμένος $x^H R x > 0, \quad \forall x$ Η πρακτική συνέπεια της ιδιότητας αυτής είναι ότι ο πίνακας R είναι σχεδόν πάντα αντιστρέψιμος (υπάρχει ο R^{-1})

Ιδιότητες του πίνακα αυτοσυσχέτισης (ΙΙΙ)

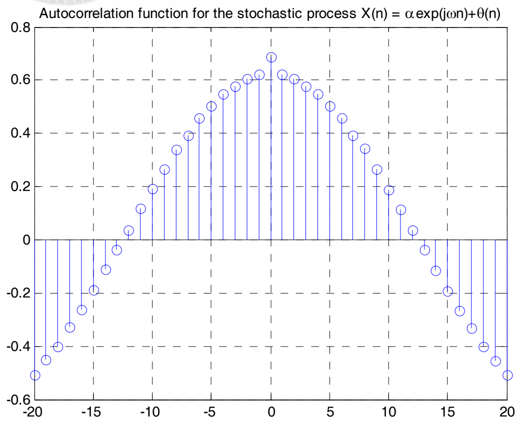
4. Ο πίνακας αυτοσυσχέτισης R_{M+1} βασισμένος σε M+1 παρατηρήσεις σχετίζεται με το πίνακα αυτοσυσχέτισης R_M βασισμένο σε M σημεία με τις σχέση:

$$R_{M+1} = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \ldots & r(M) \\ r^*(1) & r(0) & & r(M-1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r^*(M) & r^*(M-1) & \ldots & r(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(0) & \mathbf{r}^H \\ \mathbf{r} & R_M \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}^H = [r(1) \quad r(2) \quad \ldots \quad r(M)]$$

Το πρακτικό αποτέλεσμα της ανωτέρω ιδιότητας είναι ότι ο πίνακας αυτοσυσχέτισης μπορεί να υπολογιστεί αναδρομικά. Εκμετάλλευση αυτού του γεγονότος γίνεται σχεδόν από όλους τους αλγορίθμους σχεδίασης προσαρμοστικών συστημάτων

Άσκηση (Ι)



1. Έστω η στοχαστική διεργασία

$$X(n) = ae^{j\omega n} + \theta \qquad n = 0 \ldots M$$

η οποία αντιστοιχεί σε ένα ημιτονοειδές σήμα ($ae^{j\omega n}$) στο οποίο έχει επιδράσει θόρυβος θ με μέση τιμή $\mu_\theta = 0$ και διασπορά σ_θ^2 (ο θόρυβος είναι μια στάσιμη στοχαστική διεργασία).

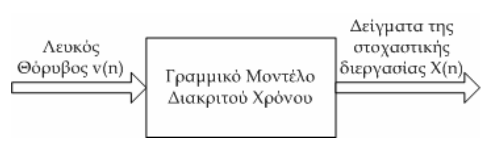
Στο σχήμα δίνεται η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της X(n). Να υπολογιστεί το πλάτος *α* και η συχνότητα *ω* του ημιτονοειδούς σήματος

Μοντέλα Στοχαστικών Διεργασιών

- Με τον όρο μοντέλο εννοούμε κάθε μαθηματική περιγραφή η οποία μπορεί να περιγράψει σε επαρκή βαθμό μια φυσική διεργασία.
- Ιδιαίτερη σημασία δίνεται στη μοντελοποίηση ενός συστήματος με γραμμικά μοντέλα διότι με αυτό τον τρόπο είναι ευκολότερη η μελέτη τους.
- Οι στοχαστικές διαδικασίες μπορούν να μοντελοποιηθούν ως γραμμικά μοντέλα διεγειρόμενα από λευκό Γκαουσσιανό θόρυβο με μηδενική μέση τιμή και διασπορά σ_v^2 όπως φαίνεται στο κατωτέρω σχήμα. Για το λευκό θόρυβο ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$E[v(n)] = \mu_v = 0$$

$$E[v(n)v^*(k)] = r(k) = \begin{cases} \sigma_v^2 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$



Μοντέλα Στοχαστικών Διεργασιών (II)

- Ο στόχος της μοντελοποίησης μιας στοχαστικής διεργασίας X(n) είναι ή εύρεση του βέλτιστου γραμμικού μοντέλου το οποίο την περιγράφει, δηλαδή:
  - Δημιουργεί 'δείγματα' της διεργασίας τα οποία ταιριάζουν με τα πραγματικά
  - Έχει συμπαγή περιγραφή (λίγες παραμέτρους)
- Υπάρχουν τρεις κατηγορίες γραμμικών μοντέλων για μια στοχαστική διεργασία:
  - Τα αυτοαναδρομικά (AR – Auto Regressive) στα οποία δεν γίνεται χρήση παρελθουσών τιμών της εισόδου (δηλαδή του θορύβου *v(n)*)
  - Τα μοντέλα κινητού μέσου όρου (MA - Moving Average) στα οποία δεν γίνεται χρήση παρελθουσών τιμών της εξόδου (δηλαδή προηγουμένων δειγμάτων της διεργασίας x(n))
  - Τα αυτοαναδρομικά μοντέλα κινητού μέσου όρου (ARMA - Auto Regressive Moving Average)

Αυτοαναδρομικά Μοντέλα (AR – Auto Regressive)

- Τα αυτοαναδρομικά μοντέλα είναι το πιο συχνά χρησιμοποιούμενα μοντέλα για τη περιγραφή στοχαστικών διεργασιών. Ο λόγος είναι η δυνατότητα εύκολης εκτίμησης των παραμέτρων τους από μια σειρά από παρατηρήσεις μέσω γραμμικών εξισώσεων.
- Έστω μια πραγμάτωση *u(n), u(n-1), … u(n-M)* της στοχαστικής διεργασίας X(n). Η στοχαστική διεργασία X(n) μπορεί να μοντελοποιηθεί από ένα AR μοντέλο τάξης M αν ισχύει η εξίσωση διαφορών: $u(n)+a_1^* u(n-1)+\ldots+a_M^* u(n-M)=v(n)$

  όπου v(n) είναι λευκός θόρυβος. Οι παράμετροι a_i^* ($i=1,..M$) αποτελούν το μοντέλο της στοχαστικής διεργασίας X(n).
- Αν υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Z στην ανωτέρω σχέση έχουμε

$$U(z)=H_G(z)V(z)$$

$$H_G(z)=\frac{1}{(1-p_1 z^{-1})(1-p_2 z^{-1})\ldots(1-p_M z^{-1})}$$

Αυτοαναδρομικά Μοντέλα (II)

- Η συνάρτηση $H_G(z)$ αποτελεί τη συνάρτηση μεταφοράς τη στοχαστικής διεργασίας και είναι μια συνάρτηση με πόλους (p_1, p_2, …,p_M) μόνο.
- Από τη μορφή της συνάρτησης μεταφοράς $H_G(z)$ είναι φανερό ότι το μοντέλο της στοχαστικής διεργασίας X(n) αντιστοιχεί σε ένα IIR φίλτρο.
- Για στάσιμες στοχαστικές διεργασίες όλοι οι πόλοι της $H_G(z)$ είναι εντός του μοναδιαίου κύκλου.

Παράδειγμα: Να ελεγχθεί η στασιμότητα της στοχαστικής διεργασίας X(n) η οποία περιγράφεται από τη σχέση. Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς και να υπολογιστούν οι πόλοι της.

$x(n) = v(n)+0.75v(n-1)-0.25v(n-2)$

Μοντέλα κινητού μέσου όρου (MA – Moving Average)

- Έστω μια πραγμάτωση *u(n), u(n-1), … u(n-M)* της στοχαστικής διεργασίας X(n). Η στοχαστική διεργασία X(n) μπορεί να μοντελοποιηθεί από ένα MA μοντέλο τάξης K αν ισχύει η εξίσωση διαφορών: $u(n) = v(n) + b_1^* v(n-1) + \ldots + b_K^* v(n-K)$

  όπου v(n) είναι λευκός θόρυβος. Οι παράμετροι b_i^* ($i=1,..K$) αποτελούν το μοντέλο της στοχαστικής διεργασίας X(n).
- Αν υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Z στην ανωτέρω σχέση έχουμε

$$U(z) = H_G(z)V(z)$$

$$H_G(z) = (1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1})\ldots(1 - z_K z^{-1})$$

  - Η συνάρτηση $H_G(z)$ αποτελεί τη συνάρτηση μεταφοράς τη στοχαστικής διεργασίας και είναι μια συνάρτηση με μηδενικά (z_1, z_2, …,z_K) μόνο.
  - Από τη μορφή της συνάρτησης μεταφοράς $H_G(z)$ είναι φανερό ότι το μοντέλο της στοχαστικής διεργασίας X(n) αντιστοιχεί σε ένα FIR φίλτρο.

Αυτοαναδρομικά μοντέλα κινητού μέσου όρου (ARMA)

- Έστω μια πραγμάτωση *u(n), u(n-1), … u(n-M)* της στοχαστικής διεργασίας X(n). Η στοχαστική διεργασία X(n) μπορεί να μοντελοποιηθεί από ένα ARMA μοντέλο τάξης (M,K) αν ισχύει η εξίσωση διαφορών:

$$u(n)+a_1^* u(n-1)+\ldots+a_K^* u(n-K)=v(n)+b_1^* v(n-1)+\ldots+b_K^* v(n-K)$$

όπου v(n) είναι λευκός θόρυβος. Οι παράμετροι a_i^* (*i=1,..M*), b_i^* (*i=1,..K*) αποτελούν το μοντέλο της στοχαστικής διεργασίας X(n).

- Αν υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Z στην ανωτέρω σχέση έχουμε

$$U(z)=H_G(z)V(z)$$

$$H_G(z)=\frac{(1-z_1 z^{-1})(1-z_2 z^{-1})\ldots(1-z_K z^{-1})}{(1-p_1 z^{-1})(1-p_2 z^{-1})\ldots(1-p_M z^{-1})}$$

  - Η συνάρτηση $H_G(z)$ αποτελεί τη συνάρτηση μεταφοράς τη στοχαστικής διεργασίας και είναι μια ρητή συνάρτηση του z με μηδενικά (z_1, z_2, …,z_K) και πόλους (p_1, p_2, …,p_M).

ΒΕΣ 06: Προσαρμοστικά Συστήματα στις Τηλεπικοινωνίες

☑ Εισαγωγή
☑ Πίνακας Αυτοσυσχέτισης
★ Μοντέλα Στοχαστικών Διεργασιών
☐ Φάσμα Ισχύος Στοχαστικών Διεργασιών
☐ Εκτίμηση Φάσματος

Εξισώσεις Yule-Walker

- Για τον υπολογισμό του μοντέλου AR, τάξης M, μιας στοχαστικής διεργασίας με δεδομένη τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης *r(k)* (αν δεν είναι δεδομένη χρησιμοποιείται μια εκτίμηση της $\hat{r}(k)$) χρειάζεται:
  - Η εκτίμηση των συντελεστών a_i^* (*i=1,..M*)
  - Η εκτίμηση της διασποράς σ_v^2 του λευκού θορύβου
- Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις Yule-Walker οι οποίες είναι γραμμικές:

$$\begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \ldots & r(M) \\ r^*(1) & r(0) & & r(M-2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r^*(M-1) & r^*(M-2) & \ldots & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \ldots \\ w_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^*(1) \\ r^*(2) \\ \ldots \\ r^*(M) \end{bmatrix}$$

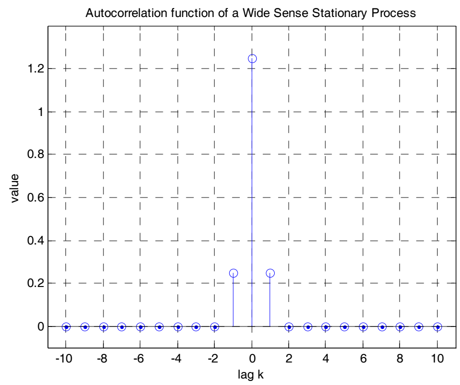
$$a_k=-w_k \qquad k=1,2,\ldots,M$$

- Η λύση των ανωτέρω εξισώσεων δίνεται με τη αντιστροφή του πίνακα R, και σύμφωνα με τη σχέση: $\mathbf{w}=R^{-1}\mathbf{r}$

Εξισώσεις Yule-Walker (II)

- Η διασπορά σ_v^2 του λευκού θορύβου δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_v^2 = \sum_{k=0}^{M} a_k r(k)$$



Παράδειγμα: Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης μιας στοχαστικής διεργασίας X(n) απεικονίζεται στο διπλανό σχήμα.

Να βρεθεί το μοντέλο AR δεύτερης τάξης (M = 2) της διεργασίας

Φάσμα Ισχύος Στοχαστικών Διεργασιών

- Το φάσμα ισχύος μιας υπό την ευρεία έννοια στοχαστικής διεργασίας X(n) με συνάρτηση αυτοσυσχέτισης *r(k)* δίνεται από τη σχέση:

$$S_X(\omega) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} r(l) e^{-j\omega l}$$

  είναι δηλαδή ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier (DFT) της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης.

- Το φάσμα ισχύος δίνει το συχνοτικό περιεχόμενο μιας στοχαστικής διεργασίας. Ορίζεται, δε, με τη βοήθεια της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης επειδή οι πραγματώσεις της διαδικασίας μπορεί να διαφέρουν πολύ η μία από την άλλη και επιπλέον μπορεί να έχουν στιγμιαία πολύ μεγάλες τιμές.

Εκτίμηση Φάσματος

- Η εκτίμηση φάσματος μιας στοχαστικής διεργασίας είναι εξαιρετικά σημαντική γιατί μας επιτρέπει να σχεδιάσουμε τηλεπικοινωνιακά συστήματα μεγάλης απόδοσης.
  - Έστω για παράδειγμα ότι επιθυμούμε να ισοσταθμίσουμε ένα τηλεπικοινωνιακό δίαυλο η συμπεριφορά του οποίου παρουσιάζει στοχαστική συμπεριφορά. Αν μπορέσουμε να εκτιμήσουμε το φάσμα ισχύος του διαύλου μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα σύστημα αντιστάθμισης που να εξουδετερώνει αυτή τη συμπεριφορά.

- Υπάρχουν δύο κατηγορίες τεχνικών για εκτίμηση του φάσματος ισχύος μιας υπό την ευρεία έννοια στοχαστικής διαδικασίας:
  - Οι παραμετρικές μέθοδοι οι οποίες βασίζονται στην μοντελοποίηση της διεργασίας με ένα μοντέλο AR, MA ή ARMA,
  - Οι μη παραμετρικές μέθοδοι οι οποίες βασίζονται είτε στην εκτίμηση της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης από μια πραγμάτωση της διεργασίας είτε στην εύρεση του τετραγώνου του διακριτού μετασχηματισμού Fourier από μια πραγμάτωση της διεργασίας.

☑ Εισαγωγή
☑ Πίνακας Αυτοσυσχέτισης
☑ Μοντέλα Στοχαστικών Διεργασιών
☑ Φάσμα Ισχύος Στοχαστικών Διεργασιών
★ Εκτίμηση Φάσματος

Παραμετρικές μέθοδοι

- Όπως είδαμε νωρίτερα η μοντελοποίηση μιας στοχαστικής διεργασίας X(n) με ένα μοντέλο AR βασίζεται στην εξίσωση διαφορών:

$$u(n) + a_1^* u(n-1) + \ldots + a_M^* u(n-M) = v(n)$$

  - Το φάσμα ισχύος της διεργασίας δίνεται τότε από τη σχέση:

$$S_X(\omega) = \frac{\sigma_v^2}{|A(\omega)|^2} = \frac{\sigma_v^2}{A(e^{j\omega})A(e^{-j\omega})}$$

$$A(e^{-j\omega}) = 1 + \sum_{k=1}^{M} a_k^* e^{-j\omega k}$$

    όπου η διασπορά του λευκού θορύβου που διεγείρει το AR μοντέλο και a_i^* ($i=1,\ldots,M$) είναι οι συντελεστές του AR μοντέλου.

  - Από τις ανωτέρω σχέσεις είναι φανερό ότι η εκτίμηση του φάσματος ισχύος της διεργασίας ανάγεται στην εκτίμηση ενός AR μοντέλου για τη διεργασία (βλέπε εξισώσεις Yule-Walker)

Παραμετρικές μέθοδοι (ΙΙ)

- Αντίστοιχες σχέσεις με την περίπτωση μοντελοποίησης μιας στοχαστικής διεργασίας X(n) με ένα μοντέλο AR έχουμε και για τις περιπτώσεις μοντελοποίησης με MA και ARMA μοντέλα:
  - Για MA μοντελοποιηση έχουμε την εξίσωση διαφορών:

$$u(n) = v(n) + b_1^* v(n-1) + \ldots + b_K^* v(n-K)$$

  - Το φάσμα ισχύος της διεργασίας δίνεται τότε από τη σχέση:

$$S_X(\omega) = \sigma_v^2 \left|B(\omega)\right|^2 = \sigma_v^2 B(e^{j\omega}) B(e^{-j\omega})$$

$$B(e^{-j\omega}) = 1 + \sum_{k=1}^{K} b_k^* e^{-j\omega k}$$

  - Για ARMA μοντελοποίηση έχουμε την εξίσωση διαφορών:

$$u(n) + a_1^* u(n-1) + \ldots + a_K^* u(n-K) = v(n) + b_1^* v(n-1) + \ldots + b_K^* v(n-K)$$

  - Το φάσμα ισχύος της διεργασίας δίνεται τότε από τη σχέση:

$$S_X(\omega) = \sigma_v^2 \frac{\left|B(\omega)\right|^2}{\left|A(\omega)\right|^2} = \sigma_v^2 \frac{B(e^{j\omega}) B(e^{-j\omega})}{A(e^{j\omega}) A(e^{-j\omega})}$$

$$A(e^{-j\omega}) = 1 + \sum_{k=1}^{M} a_k^* e^{-j\omega k} \qquad B(e^{-j\omega}) = \sum_{k=0}^{K} b_k^* e^{-j\omega k}$$

ΒΕΣ 06: Προσαρμοστικά Συστήματα στις Τηλεπικοινωνίες

☑ Εισαγωγή
☑ Πίνακας Αυτοσυσχέτισης
☑ Μοντέλα Στοχαστικών Διεργασιών
☑ Φάσμα Ισχύος Στοχαστικών Διεργασιών
★ Εκτίμηση Φάσματος

Μη παραμετρικές μέθοδοι

- Οι μη παραμετρικές μέθοδοι εκτίμησης του φάσματος ισχύος βασίζονται είτε στο περιοδόγραμμα:

$$S_X(\omega) = \frac{1}{N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} u(k) e^{-j\omega k} \right|^2 = \frac{1}{N} \left| \mathrm{X}(e^{-j\omega}) \right|^2$$

όπου u(0),…,u(N-1) είναι τα δείγματα μιας πραγμάτωση της διεργασίας.

Είτε στη εκτίμηση της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης:

$$S_X(\omega) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \hat{r}(k) e^{-j\omega k}$$

© 2007 Nicolas Tsapatsoulis