ΒΕΣ 06 – Προσαρμοστικά Συστήματα στις Τηλεπικοινωνίες

Προσαρμοστικοί Αλγόριθμοι Υλοποίησης Βέλτιστων Ψηφιακών Φίλτρων:

Ο αλγόριθμος Least Mean Square (LMS)

Βιβλιογραφία Ενότητας

- *Benvenuto [2002]: Κεφάλαιο 3*
- *Widrow [1985]: Chapter 4*
- *Haykin [2001]: Chapter 9*
- *Sayed [2003]: Chapter 4*
- *Boroujeny [1999]: Chapter 4*
- *Bose [2003]: Chapter 8*
- *Chassaing [2004]: Chapter 7*

Εισαγωγή

- Ο αλγόριθμος LMS είναι μια αναδρομική τεχνική επίλυσης των εξισώσεων Wiener-Hoph η οποία βασίζεται στη λογική του αλγορίθμου Steepest Descent.
  - Σε αντίθεση με τον Steepest Descent δεν χρειάζεται τη γνώση του πίνακα αυτοσυσχέτισης R_u της στοχαστικής διεργασίας εισόδου, ούτε και το διάνυσμα ετεροσυσχέτισης p_{du} της επιθυμητής εξόδου d(n) με τη διεργασία εισόδου u(n)
  - Επιτυγχάνει ικανοποιητική προσέγγιση της λύσης Wiener χωρίς όμως να την επιτυγχάνει ακριβώς εξαιτίας του γεγονότος ότι προσεγγίζει το πίνακα αυτοσυσχέτισης R_u με στιγμιαίες τιμές της εισόδου . Για την ίδια αιτία είναι περισσότερο ευαίσθητος στην επιλογή του βήματος προσέγγισης μ από ότι ο αλγόριθμος Steepest Descent.

Ο Αλγόριθμος Least Mean Square

- Έχουμε ήδη δει ότι η λύση στο πρόβλημα του βέλτιστου γραμμικού φιλτραρίσματος δίνεται από τις εξισώσεις Wiener-Hoph:

$$\mathbf{R}_u \mathbf{w} = \mathbf{p}_{du}$$

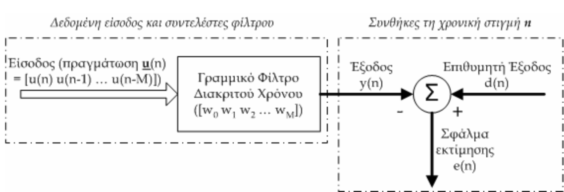
  - Η ανωτέρω λύση ελαχιστοποιεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα:

$$J(\mathbf{w}) = E[\{d(n) - \mathbf{w}^T \mathbf{u}(n)\}^2] = \sigma_d^2 - 2\mathbf{w}^T \mathbf{p}_{du} + \mathbf{w}^T \mathbf{R}_u \mathbf{w}$$

  - Ο αλγόριθμος Steepest Descent βρίσκει αναδρομικά τη λύση Wiener (με κατάλληλη επιλογή της παραμέτρου μ και της τάξης του φίλτρου M) με χρήση των εξισώσεων

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu \nabla J(\mathbf{w})$$

$$\nabla J(\mathbf{w}) = -2\mathbf{p}_{du} + 2\mathbf{R}_u \mathbf{w}$$



Ο Αλγόριθμος Least Mean Square (II)

- Δεδομένου ότι:
  a) Η γνώση του πίνακα αυτοσυσχέτισης R_u της στοχαστικής διεργασίας εισόδου και του διανύσματος ετεροσυσχέτισης p_{du} της επιθυμητής εξόδου d(n) με τη διεργασία εισόδου u(n) δεν είναι συνήθως εφικτή χρειάζεται εκτίμηση τους
  b) Εκτίμηση του R_u και του p_{du} με πολλές πραγματώσεις της διεργασίας εισόδου u(n) είναι συνήθως μη πρακτική και πολλές φορές αδύνατη χρειάζεται η εκτίμηση τους να γίνει από μια και μόνο πραγμάτωση με χρήση χρονικών μέσων όρων
  c) Η αξία των προσαρμοστικών συστημάτων έγκειται στην ικανότητα τους να μεταβάλλονται παρακολουθώντας τις μεταβολές του σήματος εισόδου, η εκτίμηση των R_u και του p_{du} γίνεται με πεπερασμένο αριθμό δειγμάτων από μια πραγμάτωση.
- Στον αλγόριθμο LMS έχουμε διαδοχικές εκτιμήσεις των R_u και του p_{du} με βάση τα *M* (τάξη προσαρμοστικού φίλτρου) πιο πρόσφατα δείγματα της διεργασίας εισόδου

Ο Αλγόριθμος Least Mean Square (III)

$\hat{\mathbf{R}}_u = \hat{\mathbf{R}}_u(n) = \mathbf{u}(n)\mathbf{u}(n)^T$

όπου:

$\mathbf{u}(n) = [u(n) \quad u(n-1) \quad \dots \quad u(n-M)]$

και M = τάξη του φίλτρου που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της λύσης Wiener

$\hat{\mathbf{p}}_{du} = \hat{\mathbf{p}}_{du}(n) = d(n)\mathbf{u}(n)$

όπου:

$d(n)$ = το πιο πρόσφατο δείγμα της επιθυμητής εξόδου

- Οι εξισώσεις για τον αλγόριθμο LMS γίνονται τότε:

$$\begin{aligned}\mathbf{w}(n+1) &= \mathbf{w}(n) + 2\mu(\hat{\mathbf{p}}_{du}(n) - 2\hat{\mathbf{R}}_u(n)\mathbf{w}(n)) \\ &= \mathbf{w}(n) + 2\mu\mathbf{u}(n)(d(n) - \mathbf{u}^T(n)\mathbf{w}(n)) \\ &= \mathbf{w}(n) + 2\mu\mathbf{u}(n)(d(n) - \mathbf{w}^T(n)\mathbf{u}(n)) \\ &= \mathbf{w}(n) + 2\mu\mathbf{u}(n)e(n)\end{aligned}$$

όπου

$y(n) = \mathbf{w}^T(n)\mathbf{u}(n) =$ έξοδος του προσαρμοστικού φίλτρου

$e(n) = d(n) - y(n) =$ σφάλμα προσέγγισης

$\mathbf{w}(n) = [w_0(n) \quad w_1(n) \quad \dots \quad w_M(n)]^T =$ συντελεστές του προσρμοστικού φίλτρου τη χρονική στιγμή n

- Για την υλοποίηση του αλγορίθμου LMS χρειάζεται επομένως σε κάθε χρονική στιγμή *n* να είναι γνωστά (να μπορούν να υπολογιστούν) τα:
  - **w**(n), e(n), d(n)

Παράδειγμα

- Δίνονται τα πρώτα 10 δείγματα μιας πραγμάτωσης u(n) μιας στοχαστικής διεργασίας:

  u = [0.5974 1.5976 1.7693 0.7887 1.8604 1.5746 0.6044 1.2861 0.9583 0.8370]
- Αν η επιθυμητή έξοδος είναι:

  d = [0.8084 0.8734 0.9325 0.9855 1.0321 1.0722 1.1056 1.1323 1.1525 1.1661]
  - Να εφαρμοσθεί ο αλγόριθμος LMS και να βρεθούν οι διαδοχικές εκτιμήσεις του βέλτιστου φίλτρου Wiener 2 συντελεστών (**w** = [w_0 w_1]). Χρησιμοποιείστε μ = 0.02
- Θεωρήστε ότι για τα πιο πάνω δεδομένα ξέρουμε ότι

$$\mathbf{R}_u = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 \\ 0.6 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{p}_{du} = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

  - Εφαρμόστε τον αλγόριθμο Steepest Descent για 10 επαναλήψεις και βρείτε τις διαδοχικές εκτιμήσεις του βέλτιστου φίλτρου Wiener 2 συντελεστών.
  - Συγκρίνετε τα αποτελέσματα

Σύγκλιση αλγορίθμου LMS

- Με τον όρο σύγκλιση εννοούμε την προοδευτική προσέγγιση της βέλτιστης λύσης $\mathbf{w}_0$ από το διάνυσμα $\mathbf{w}(n)$ όσο αυξάνεται το *n*.
  - Όπως και στη περίπτωση του αλγορίθμου Steepest Descent η σύγκλιση εξαρτάται από τη επιλογή της παραμέτρου μ (step size parameter).
  - Πρέπει να σημειωθεί ότι δεδομένων των διαδοχικών εκτιμήσεων για τον πίνακα αυτοσυσχέτισης R_u μη προσεκτική επιλογή του μ μπορεί να οδηγήσει σε εσφαλμένα αποτελέσματα
- Όπως είδαμε για να έχουμε σύγκλιση στον Steepest Descent χρειάζεται: $\|\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{R}_u\| < 1$

  το οποίο μεταφράζεται στη σχέση $0 < \mu < \frac{2}{\lambda_{\max}}$

  όπου λ_{max} είναι η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του πίνακα αυτοσυσχέτισης R_u.

Σύγκλιση αλγορίθμου LMS (II)

- Επεκτείνοντας τη προηγούμενη σχέση για τον LMS έχουμε:

$$\left\|\mathbf{I}-2\mu\hat{\mathbf{R}}_u(n)\right\|<1$$

$$\left\|\mathbf{I}-2\mu\mathbf{u}(n)\mathbf{u}^T(n)\right\|<1$$

- Ο πίνακας $\hat{\mathbf{R}}_u(n)=\mathbf{u}(n)\mathbf{u}^T(n)$ έχει μια μοναδική ιδιοτιμή η οποία είναι ίση με

$$\lambda=\lambda_{\max}=\mathbf{u}^T(n)\mathbf{u}(n)=\sum_{i=0}^{M}u^2(n-i)$$

Επομένως για να έχουμε σύγκλιση χρειάζεται:

$$0<\mu<\frac{2}{\lambda_{\max}}\Leftrightarrow 0<\mu<\frac{2}{\sum_{i=0}^{M}u^2(n-i)}$$

- Από τη θεωρητική ανάλυση της σύγκλισης αποδεικνύεται ότι η επιλογή του μ πρέπει να είναι ακόμη πιο αυστηρή (tr = ίχνος πίνακα):

$$0<\mu<\frac{1}{3tr\{\hat{\mathbf{R}}_u\}}\Leftrightarrow 0<\mu<\frac{1}{3\sum_{i=0}^{M}u^2(n-i)}$$

Παράδειγμα

- Δίνονται τα πρώτα 10 δείγματα μιας πραγμάτωσης u(n) μιας στοχαστικής διεργασίας:

u = $[0.5974 \quad 1.5976 \quad 1.7693 \quad 0.7887 \quad 1.8604 \quad 1.5746 \quad 0.6044 \quad 1.2861 \quad 0.9583 \quad 0.8370]$

- Ο πίνακας αυτοσυσχέτισης της διεργασίας είναι: $\mathbf{R}_u=\begin{bmatrix}1 & 0.6\\ 0.6 & 1\end{bmatrix}$

1. Να βρεθούν οι τιμές του μ για τις οποίες ο αλγόριθμος Steepest Descent συγκλίνει προς τη λύση Wiener
2. Να βρεθούν οι τιμές του μ για τις οποίες ο αλγόριθμος LMS συγκλίνει προς τη λύση Wiener όταν έχουμε M = 2, 8.

Απάντηση:

1. Για τον Steepest Descent το μ είναι ανεξάρτητο από την τάξη του φίλτρου
   $0<\mu<\frac{2}{1.6}$
2. Για τον LMS έχουμε M=2 => $0<\mu<\frac{1}{3\cdot 7.2}$, M=8 => $0<\mu<\frac{1}{3\cdot 15.87}$

Προσέγγιση της λύσης Wiener

- Σε αντίθεση με το αλγόριθμο Steepest Descent ο αλγόριθμος LMS προσεγγίζει αλλά δεν φτάνει ποτέ στη λύση Wiener, επομένως δεν φτάνει ποτέ στο ελάχιστο του Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος:

$$J(\mathbf{w}) = \sigma_d^2 - 2\mathbf{w}^T\mathbf{p}_{du} + \mathbf{w}^T\mathbf{R}_u\mathbf{w}$$

το ελάχιστο της ανωτέρω συνάρτησης (που αντιστοιχεί στη λύση Wiener), δίνεται από τη σχέση:

$$J_{\min} = \sigma_d^2 - \mathbf{p}_{du}^T\mathbf{w}_o = \sigma_d^2 - \mathbf{p}_{du}^T\mathbf{R}_u^{-1}\mathbf{p}_{du}$$

Η υπέρβαση του ανωτέρω ελάχιστου μετά από μεγάλο αριθμό επαναλήψεων (εκτελέσεων των αναδρομών του LMS) συμβολίζεται με:

$$J_{ex}(\infty) = J(\infty) - J_{\min}$$

όπου:

$$J(\infty) = \lim_{n\to\infty}\{J(\mathbf{w}(n))\} = \lim_{n\to\infty}\{\sigma_d^2 - 2\mathbf{w}^T(n)\mathbf{p}_{du} + \mathbf{w}(n)^T\mathbf{R}_u\mathbf{w}(n)\}$$

ΒΕΣ 06: Προσαρμοστικά Συστήματα στις Τηλεπικοινωνίες

☑ Εισαγωγή
☑ Ο αλγόριθμος LMS
☑ Σύγκλιση αλγορίθμου LMS
★ Προσέγγιση της λύσης Wiener
☐ Παραδείγματα

Προσέγγιση της λύσης Wiener (II)

- Η ποσότητα $J_{ex}(\infty)$ ονομάζεται υπέρβαση ελάχιστου σφάλματος ή απορρύθμιση (misadjustment)

- Η ποσότητα: $M_F = \dfrac{J_{ex}(\infty)}{J_{\min}}$

ονομάζεται παράγοντας απορρύθμισης (misadjustment factor) και δίνεται από τη σχέση:

$$M_F = \frac{\mu \cdot tr\{\hat{R}_u(n)\}}{1 - 2\mu \cdot tr\{\hat{R}_u(n)\}} = \frac{\mu \cdot \sum_{i=0}^{M} u^2(n-i)}{1 - 2\mu \cdot \sum_{i=0}^{M} u^2(n-i)}$$

όπου tr{·} δηλώνει το ίχνος του πίνακα

Προσέγγιση της λύσης Wiener (III)

- Με βάση τα προηγούμενα είναι φανερό ότι ο παράγοντας απορρύθμισης M_F ελαχιστοποιείται όταν ισχύει η σχέση: $2\mu\sum_{i=0}^{M}u^2(n-i)=1$
- Σε κάθε περίπτωση όμως πρέπει να διασφαλίζεται ότι: $2\mu\cdot\sum_{i=0}^{M}u^2(n-i)\le 1$ ώστε ο παράγοντας απορρύθμισης να παραμένει θετικός.
- Για μικρές τιμές του M_F (M_F <<0.1) έχουμε:

  $$M_F \approx \mu\cdot tr\{\hat{R}_u(n)\} = \mu\cdot\sum_{i=0}^{M}u^2(n-i)$$

  δηλαδή ο παράγοντας απορρύθμισης είναι ανάλογος με την τάξη του φίλτρου

- Από τα παραπάνω είναι εμφανές ότι όσο αυξάνουμε την τάξη του φίλτρου (M) τόσο πρέπει να μειώνουμε την παράμετρο μ ώστε:
  - να διασφαλίζεται η σύγκλιση του αλγορίθμου LMS,
  - να ελαχιστοποιείται ο παράγοντας απορρύθμισης

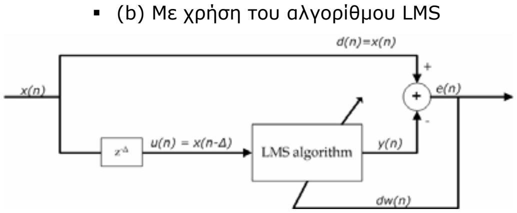
ΒΕΣ 06: Προσαρμοστικά Συστήματα στις Τηλεπικοινωνίες

Παραδείγματα

- Στο επόμενο σχήμα δίνεται η βασική διάταξη γραμμικής πρόβλεψης με τη χρήση του αλγορίθμου LMS:
  - Το επιθυμητό σήμα *d(n)* είναι ίσο με την πρόβλεψη Δ δείγματα μπροστά (συνήθως Δ=1)
  - Το σήμα u(n) χρησιμοποιείται για την πρόβλεψη.

Παράδειγμα:

  - Δίνεται το σήμα x(n) το οποίο αποτελεί πραγμάτωση μιας στοχαστικής διεργασίας. Να βρεθεί γραμμικός προβλέπτης δύο συντελεστών ([w_1 w_2]) για πρόβλεψη της τιμής x(n+1) με
    - (a) Λύση των εξισώσεων Wiener-Hoph
    - (b) Με χρήση του αλγορίθμου LMS



$$R = E\{\mathbf{u}(n)\mathbf{u}^*(n)\} = E\{\mathbf{x}(n-1)\mathbf{x}^*(n-1)\}$$

$$p = E\{d(n)\mathbf{u}^*(n)\} = E\{x(n)\mathbf{x}^*(n-1)\}$$

$$\mathbf{w} = R^{-1}p$$

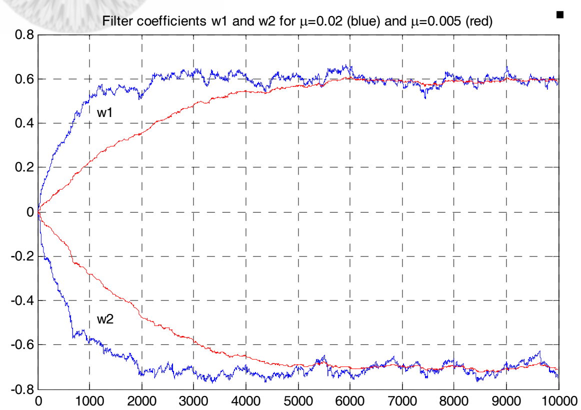
Γραμμικός προβλέπτης

- Έστω x(n) = a_1x(n-1)+a_2x(n-2)+v(n), όπου v(n) είναι λευκός θόρυβος με μέση τιμή μ_v=0 και διασπορά σ_v^2. Ο γραμμικός προβλέπτης (συντελεστές **w**) πρέπει να μπορεί να εκτιμήσει τις τιμές a_1 και a_2.

- Είσοδοι:
  - Τάξη φίλτρου *M*
  - Βήμα προσέγγισης *μ*
  - ***x****(n)* στοχαστική είσοδος στο φίλτρο
  - **w**(0) αρχικές τιμές για το φίλτρο

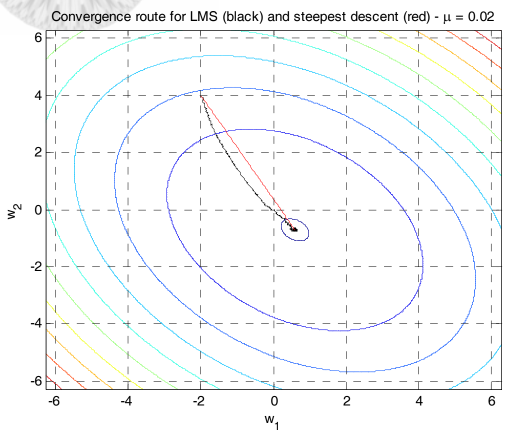
- Έξοδοι
  - y(n) = $\mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n) = \hat{d}(n)$ = έξοδος προσαρμοστικού φίλτρου
  - e(n) = d(n)-y(n) = σφάλμα προσέγγισης
  - **w**(n+1) = **w**(n)+2μe(n)**x**(n)

Γραμμικός προβλέπτης (II)



- Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η σταδιακή προσέγγιση των τιμών a_1 (=0.6) και a_2 (=-0.7225) από τους συντελεστές του φίλτρου [w1 w2] με τη βοήθεια του αλγορίθμου LMS.
  - Παρατηρούμε ότι η επιλογή του *μ* καθορίζει το ρυθμό σύγκλισης

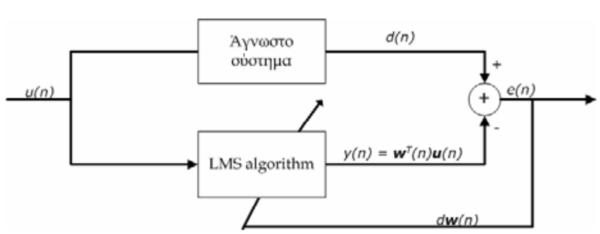
Γραμμικός προβλέπτης (ΙΙΙ)



- Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η σταδιακή προσέγγιση των τιμών a_1 (=0.6) και a_2 (=-0.7225) από τους συντελεστές του φίλτρου [w1 w2] με τη βοήθεια του
  - αλγορίθμου LMS (μαύρο).
  - Steepest descent (κόκκινο)
- Για σκοπούς καλύτερης επισκόπισης η αρχική τιμή του φίλτρου είναι **w** = [-2 4]

Αναγνώριση συστήματος

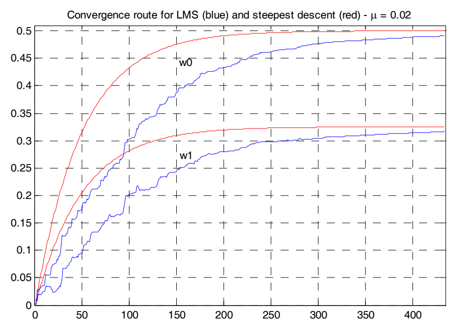
- Στο επόμενο σχήμα δίνεται η βασική διάταξη αναγνώρισης συστήματος με τη χρήση του αλγορίθμου LMS:
  - Το επιθυμητό σήμα *d(n)* είναι ίσο με την απόκριση του άγνωστου συστήματος
  - Το σήμα u(n) είναι συνήθως λευκός θόρυβος ώστε να διασφαλίζεται ότι η απόκριση του άγνωστου συστήματος και του προσαρμοστικού φίλτρου συμπίπτει για μια ευρεία ζώνη συχνοτήτων.



Αναγνώριση συστήματος (II)

- Έστω ότι το άγνωστο σύστημα περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς: $H(z) = \dfrac{0.5 + 0.2z^{-1} + 0.1z^{-2}}{1 - 0.25z^{-1}}$
- Για μοντελοποίηση του ανωτέρω συστήματος με FIR φίλτρο τάξης 5 (6 συντελεστών) η βέλτιστη λύση (λύση Wiener) είναι:

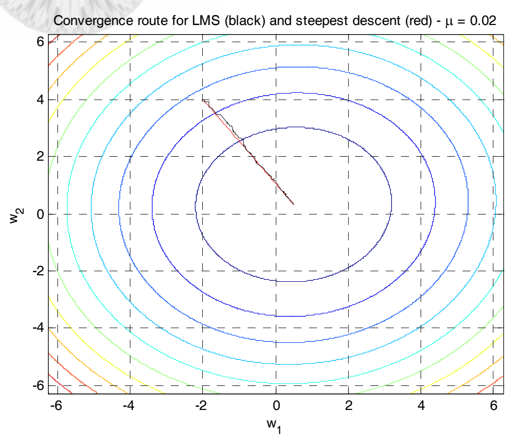
$$\mathbf{w}_o = [0.5 \;\; 0.325 \;\; 0.1812 \;\; 0.0453 \;\; 0.0113 \;\; 0.0028]^T$$



Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η σταδιακή προσέγγιση των τιμών w_0 (=0.5) και w_1 (=0.325) με τη βοήθεια του αλγορίθμου LMS (μπλε καμπύλες) και Steepest Descent.

- Παρατηρούμε ότι η σύγκλιση του αλγορίθμου steepest descent είναι αυστηρά μονότονη κάτι το οποίο δεν ισχύει για τον LMS

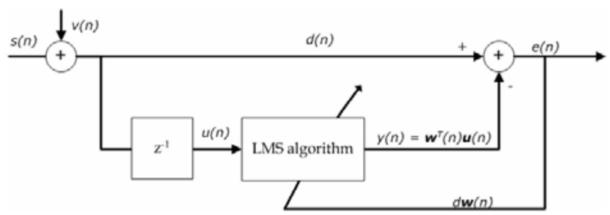
Αναγνώριση συστήματος (III)



- Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η σταδιακή προσέγγιση των τιμών w_0 (=0.5) και w_1 (=0.325) w2] με τη βοήθεια του:
  - αλγορίθμου LMS (μαύρο).
  - Steepest descent (κόκκινο)
- Για σκοπούς καλύτερης επισκόπισης η αρχική τιμή του φίλτρου είναι **w** = [-2 4]

Ενεργή απομόνωση θορύβου

- Στο επόμενο σχήμα δίνεται η βασική διάταξη για την ενεργή απομόνωση θορύβου που επιδρά σε ένα σήμα με τη χρήση του αλγορίθμου LMS:
  - Δεδομένου ότι το επιθυμητό σήμα *s(n)* δεν είναι διαθέσιμο το προσαρμοστικό σύστημα χρησιμοποιείται σε διάταξη γραμμικής πρόβλεψης.
  - Η υπόθεση που γίνεται είναι ότι μέσω του αλγόριθμου LMS μπορεί να προβλεφθεί μόνο το σήμα εισόδου s(n) και όχι ο θόρυβος v(n)



ΒΕΣ 06: Προσαρμοστικά Συστήματα στις Τηλεπικοινωνίες

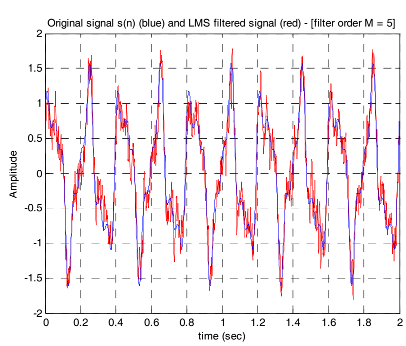
☑ Εισαγωγή
☑ Ο αλγόριθμος LMS
☑ Σύγκλιση αλγορίθμου LMS
☑ Προσέγγιση της λύσης Wiener
★ Παραδείγματα

Ενεργή απομόνωση θορύβου (II)

- Έστω ότι το άγνωστο σήμα εισόδου s(n) περιγράφεται από τη σχέση:

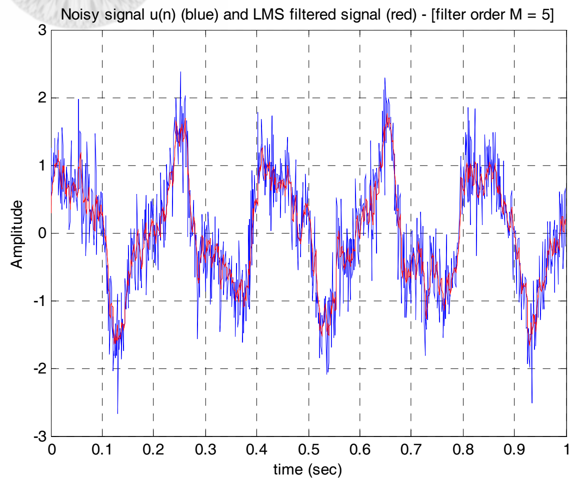
$$s(n) = \sin(2\pi 10t + \frac{\pi}{10}) + 0.4\sin(2\pi 25t + \frac{\pi}{4}) + 0.25\sin(2\pi 40t + \frac{\pi}{3})$$

- Στο ανωτέρω σήμα επιδρά λευκός θόρυβος με Γκαουσσιανή κατανομή, μέση τιμή $\mu_v=0$ και διασπορά $\sigma_v^2=0.16$.



- Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το φιλτραρισμένο σήμα (με τη βοήθεια των συντελεστών **w** που έχουν εκτιμηθεί με τη βοήθεια του αλγορίθμου LMS) σε αντιπαραβολή με το αρχικό σήμα χωρίς θόρυβο (κόκκινη και μπλε καμπύλη αντίστοιχα).

Ενεργή απομόνωση θορύβου (ΙΙΙ)



- Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το φιλτραρισμένο σήμα (με τη βοήθεια των συντελεστών **w** που έχουν εκτιμηθεί με τη βοήθεια του αλγορίθμου LMS) σε αντιπαραβολή με το θορυβώδες σήμα (κόκκινη και μπλε καμπύλη αντίστοιχα).

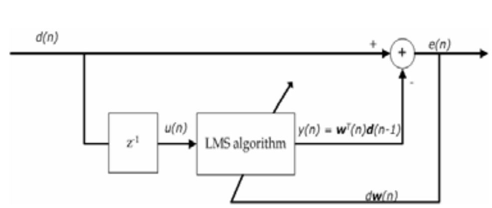
☑ Εισαγωγή
☑ Ο αλγόριθμος LMS
☑ Σύγκλιση αλγορίθμου LMS
☑ Προσέγγιση της λύσης Wiener
★ Παραδείγματα

Εκτίμηση Φάσματος Στοχαστικών Διεργασιών

- Στο επόμενο σχήμα δίνεται η βασική διάταξη για την εκτίμηση φάσματος μιας στοχαστικής διεργασίας d(n).
  - Το προσαρμοστικό σύστημα χρησιμοποιείται σε διάταξη γραμμικής πρόβλεψης.

$$\hat{d}(n) = \mathbf{w}(n)^T \mathbf{d}(n-1) \qquad \hat{D}(z) = \frac{1}{1 - w_1(n)z^{-1} - w_2(n)z^{-2} - \ldots - w_M(n)z^{-M}} = \frac{1}{A(z)}$$

$$\mathbf{w}(n)^T = [w_1(n) \quad w_2(n) \quad \ldots \quad w_M(n)]$$

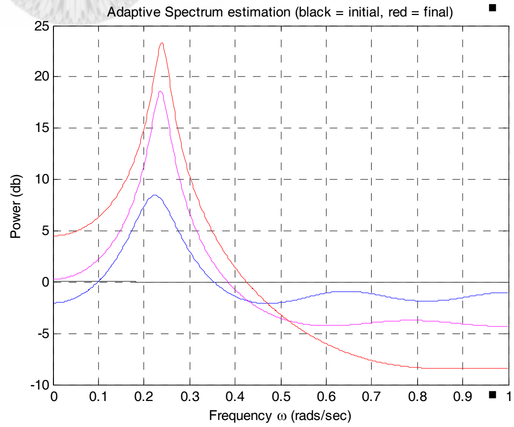


$$\hat{S}_D(\omega) = \frac{K}{|A(\omega)|^2} = \frac{K}{A(e^{j\omega})A(e^{-j\omega})}$$

$$A(e^{-j\omega}) = 1 - \sum_{k=1}^{M} w_k^*(n) e^{-j\omega k}$$

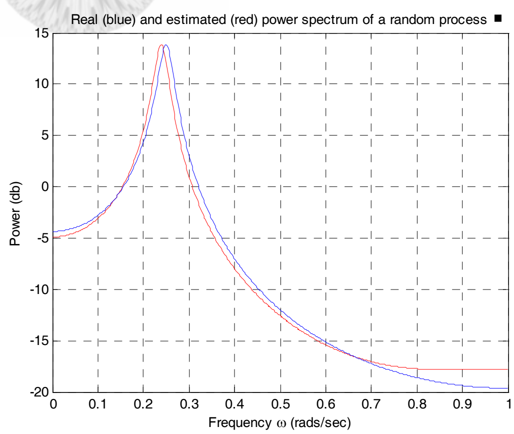
K = σταθερός αριθμός που αντιστοιχεί στο μη προβλέψιμο κομμάτι της διεργασίας (ισχύς θορύβου)

Εκτίμηση Φάσματος Στοχαστικών Διεργασιών (II)



- Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι διαδοχικές εκτιμήσεις του φάσματος ισχύος της στοχαστικής διεργασίας εισόδου.
  - Καμπύλη με μαύρο χρώμα: αρχική (1 δείγμα) εκτίμηση
  - Μπλε χρώμα: εκτίμηση μετά από 100 δείγματα
  - Ροζ χρώμα: εκτίμηση μετά από 1000 δείγματα
  - Κόκκινο χρώμα: τελική εκτίμηση
- Τα παραπάνω λήφθηκαν με μ = 0.001 και M = 5;

Εκτίμηση Φάσματος Στοχαστικών Διεργασιών (III)



- Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το φάσμα ισχύος της στοχαστικής διεργασίας εισόδου (μπλε χρώμα) και η εκτίμηση του με τη βοήθεια του αλγορίθμου LMS (κόκκινο χρώμα)