ΒΕΣ 06 – Προσαρμοστικά Συστήματα στις Τηλεπικοινωνίες

Προσαρμοστικοί Αλγόριθμοι Υλοποίησης Βέλτιστων Ψηφιακών Φίλτρων:

Παραλλαγές του αλγόριθμου Least Mean Square (LMS)

- Εισαγωγή
- Αλγόριθμοι προσήμου
- Κανονικοποιημένος LMS
- Leaky LMS
- LMS με μεταβλητό κέρδος προσαρμογής (μ)
- Παραδείγματα

Βιβλιογραφία Ενότητας

- *Benvenuto [2002]: Κεφάλαιο 3*
- *Widrow [1985]: Chapter 5*
- *Haykin [2001]: Chapter 9*
- *Sayed [2003]: Chapter 4*
- *Boroujeny [1999]: Chapter 2*
- *Bose [2003]: Chapter 8*
- *Chassaing [2004]: Chapter 7*

Εισαγωγή

- Η αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου LMS οδήγησε στη δημιουργία πολλών παραλλαγών του.
- Οι περισσότερες από τις παραλλαγές αυτές LMS έχουν προκύψει με ευρυστικό τρόπο, και που στοχεύουν συνήθως σε κάποιο από τα ακόλουθα:
  - Βελτίωση της ταχύτητας σύγκλισης προς τη λύση Wiener
  - Αντιμετώπιση της ανεπαρκούς εκτίμησης του πίνακα αυτοσυσχέτισης R_u.
  - Ελάττωση της υπολογιστικής πολυπλοκότητας του
  - Μείωση του παράγοντα απορρύθμισης (απόκλιση από τη λύση Wiener στη μόνιμη κατάσταση)

Αλγόριθμοι LMS με βάση το πρόσημο

- Σύνοψη του αλγορίθμου LMS:

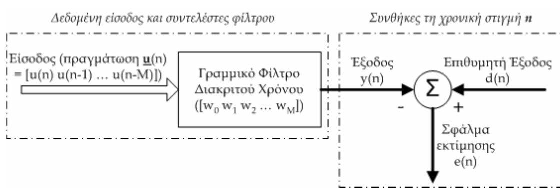
$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + 2\mu\mathbf{u}(n)e(n)$$

όπου:

$$e(n) = d(n) - y(n)$$

$$y(n) = \mathbf{u}^T(n)\mathbf{w}(n)$$

$$0 < \mu < \frac{2}{tr\{R_u\}}$$



$\mathbf{u}(n) = [u(n) \quad u(n-1) \quad \ldots \quad u(n-M)]^T =$ τα $M+1$ πιο πρόσφατα δείγματα της στοχαστικής διεργασίας εισόδου,

$\mathbf{w}(n) = [w_0(n) \quad w_1(n) \quad \ldots \quad w_M(n)]^T =$ συντελεστές φίλτρου, τάξης M, τη χρονική στιγμή n.

☑ Εισαγωγή
★ Αλγόριθμοι προσήμου
☐ Κανονικοποιημένος LMS
☐ Leaky LMS
☐ LMS με μεταβλητό κέρδος προσαρμογής (μ)
☐ Παραδείγματα

Αλγόριθμοι LMS με βάση το πρόσημο

- Στους αλγορίθμους LMS με βάση το πρόσημο στην εξίσωση προσαρμογής δεν χρησιμοποιείται η τιμή του σφάλματος *e(n)* ή του διανύσματος εισόδου (***u***(*n*)) αλλά μόνο τα πρόσημα τους (*sign(e(n)*) ή *sign(**u**(n))*
- Στόχος είναι η ελάττωση της υπολογιστικής πολυπλοκότητας του αλγορίθμου LMS.
- Οι πιο διαδεδομένοι αλγόριθμοι LMS με βάση το πρόσημο είναι:
  a) Ο sign LMS
  b) Ο data-sign LMS
  c) Ο sign-sign LMS

☑ Εισαγωγή
★ Αλγόριθμοι προσήμου
☐ Κανονικοποιημένος LMS
☐ Leaky LMS
☐ LMS με μεταβλητό κέρδος προσαρμογής (μ)
☐ Παραδείγματα

Sign LMS

- Η εξίσωση προσαρμογής του αλγόριθμο sign LMS είναι:

Ο αλγόριθμος sign LMS ελαχιστοποιεί το σφάλμα:

$$J(\mathbf{w}(n)) = E\{|e(n)|\}$$

σε αντίθεση με τον απλό LMS που ελαχιστοποιεί το σφάλμα:

$$J(\mathbf{w}(n)) = E\{\|e(n)\|^2\}$$

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + 2\mu \cdot sign\{e(n)\} \cdot \mathbf{u}(n)$$

όπου με $sign\{\cdot\}$ συμβολίζεται η συνάρτηση προσήμου:

$$sign\{e(n)\} = \begin{cases} 1 & e(n) > 0 \\ 0 & e(n) = 0 \\ \text{-}1 & e(n) < 0 \end{cases}$$

- Σε σχέση με τον απλό LMS η τιμή του σφάλματος προσέγγισης *e(n)* έχει αντικατασταθεί από το πρόσημο του σφάλματος *e(n).*
  - Δεδομένου ότι ο υπολογισμός του προσήμου πραγματοποιείται πολύ γρήγορα σε υλοποιήσεις με υλικό (hardware implementation) ο αλγόριθμος sign LMS είναι διαδεδομένος σε πρακτικές εφαρμογές ειδικά όταν συνδυάζεται με επιλογή του μ της μορφής $\mu = 2^{-K}$, K= φυσικός αριθμός (ο πολλαπλασιασμός του μ με το **u**(n) επιτυγχάνεται με K ολισθήσεις δεξιά)

☑ Εισαγωγή
★ Αλγόριθμοι προσήμου
☐ Κανονικοποιημένος LMS
☐ Leaky LMS
☐ LMS με μεταβλητό κέρδος προσαρμογής (μ)
☐ Παραδείγματα

Data-Sign LMS

- Η εξίσωση προσαρμογής του αλγόριθμο data-sign LMS είναι:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + 2\mu \cdot e(n) \cdot sign\{\mathbf{u}(n)\}$$

όπου με $sign\{\mathbf{u}(n)\}$ δηλώνεται η εφαρμογή της συνάρτηση προσήμου $sign\{\cdot\}$ σε κάθε στοιχείο του διανύσματος $\mathbf{u}$(n)

- Σε σχέση με τον απλό LMS οι τιμές των δειγμάτων εισόδου *u(n-i)*, i=0…M έχουν αντικατασταθεί από τα αντίστοιχα πρόσημα
- Όπως και στην περίπτωση του sign-LMS ο υπολογισμός του προσήμου πραγματοποιείται πολύ γρήγορα και επιταχύνει την εκτέλεση του αλγορίθμου σε υλοποιήσεις με υλικό

☑ Εισαγωγή
★ Αλγόριθμοι προσήμου
☐ Κανονικοποιημένος LMS
☐ Leaky LMS
☐ LMS με μεταβλητό κέρδος προσαρμογής (μ)
☐ Παραδείγματα

Sign-Sign LMS

- Η εξίσωση προσαρμογής του αλγόριθμο sign-sign LMS είναι:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + 2\mu \cdot sign\{e(n)\} \cdot sign\{\mathbf{u}(n)\}$$

όπου με $sign\{\mathbf{u}(n)\}$ δηλώνεται η εφαρμογή της συνάρτηση προσήμου $sign\{\cdot\}$ σε κάθε στοιχείο του διανύσματος $\mathbf{u}$(n)

- Σε σχέση με τον απλό LMS:
  - η τιμή του σφάλματος προσέγγισης *e(n)* έχει αντικατασταθεί από το πρόσημο του σφάλματος *e(n)*.
  - Οι τιμές των δειγμάτων εισόδου *u(n-i)*, i=0…M έχουν αντικατασταθεί από τα αντίστοιχα πρόσημα
- Όπως και στην περίπτωση του sign-LMS ο υπολογισμός του προσήμου πραγματοποιείται πολύ γρήγορα και επιταχύνει την εκτέλεση του αλγορίθμου σε υλοποιήσεις με υλικό

☑ Εισαγωγή
★ Αλγόριθμοι προσήμου
☐ Κανονικοποιημένος LMS
☐ Leaky LMS
☐ LMS με μεταβλητό κέρδος προσαρμογής (μ)
☐ Παραδείγματα

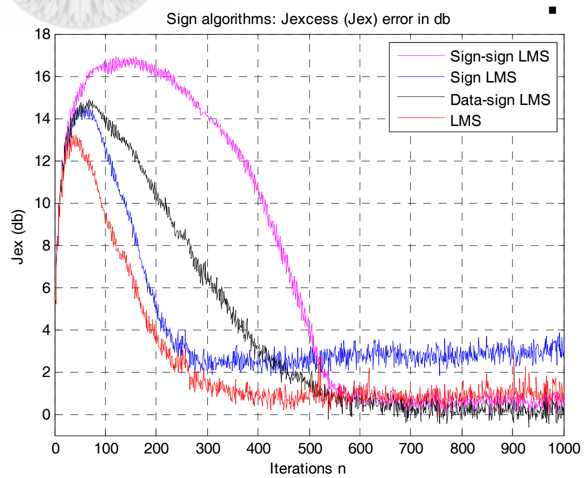
Παράδειγμα

- Έστω $x(n) = a_1x(n-1)+a_2x(n-2)+v(n)$, όπου $v(n)$ είναι λευκός θόρυβος με μέση τιμή $\mu_v=0$ και διασπορά σ_v^2. Να εφαρμοστούν οι αλγόριθμοι (i) LMS, (ii) sign LMS, (iii) data-sign LMS, (iii) sign-sign LMS για τον υπολογισμό των τιμών a_1 και a_2., δεδομένων 10 πραγματώσεων $\mathbf{u}_i(n)$ (i =1 …10).

- Να συγκρίνεται:
  (α) την ταχύτητα σύγκλισης των αλγορίθμων,
  (β) το σφάλμα απόκλισης από τη λύση Wiener,
  (γ) την ταχύτητα εκτέλεσης των αλγορίθμων

☑ Εισαγωγή
★ Αλγόριθμοι προσήμου
☐ Κανονικοποιημένος LMS
☐ Leaky LMS
☐ LMS με μεταβλητό κέρδος προσαρμογής (μ)
☐ Παραδείγματα

Παράδειγμα (συν.)



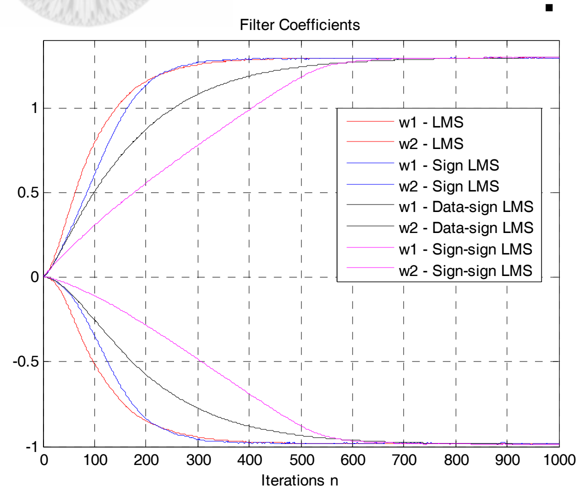
- Στο σχήμα δίνεται το μέσο σφάλμα απόκλισης από τη βέλτιστη λύση υπολογισμένο σε 500 πραγματώσεις:
  - Κόκκινο: LMS
  - Μπλε: Sign-LMS
  - Μαύρο: Data-Sign LMS
  - Ροζ: Sign-Sign LMS

Παρατηρήσεις:

- Ο αλγόριθμος sign LMS συγκλίνει γρηγορότερα αλλά έχει μεγαλύτερο σφάλμα στη μόνιμη κατάσταση

☑ Εισαγωγή
★ Αλγόριθμοι προσήμου
☐ Κανονικοποιημένος LMS
☐ Leaky LMS
☐ LMS με μεταβλητό κέρδος προσαρμογής (μ)
☐ Παραδείγματα

Παράδειγμα (συν.)



- Στο σχήμα δίνεται η προσέγγιση των συντελεστών του γραμμικού προβλέπτη (πραγματικές τιμές a_1=1.3, a_2=-0.995) από ένα προσαρμοστικό φίλτρο δύο συντελεστών ($[w_1\ w_2]$):
  - Κόκκινο: LMS
  - Μπλε: Sign-LMS
  - Μαύρο: Data-Sign LMS
  - Ροζ: Sign-Sign LMS

☑ Εισαγωγή
☑ Αλγόριθμοι προσήμου
★ Κανονικοποιημένος LMS
☐ Leaky LMS
☐ LMS με μεταβλητό κέρδος προσαρμογής (μ)
☐ Παραδείγματα

Κανονικοποιημένος LMS

- Στον αλγόριθμο LMS μεγάλες τιμές του διανύσματος εισόδου **u**(n) είναι δυνατό να δημιουργήσουν αστάθεια στην προσέγγιση της λύσης Wiener διότι μπορεί στιγμιαία να έχουμε: $\mu > \dfrac{2}{\sum_{i=0}^{M} u^2(n-i)}$

- Ο κανονικοποιημένος αλγόριθμος LMS (NLMS) αντιμετωπίζει αυτό το ενδεχόμενο τροποποιώντας την εξίσωση προσαρμογής σε:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \frac{\overline{\mu}}{\varepsilon + \mathbf{u}^T(n)\cdot\mathbf{u}(n)} e(n)\cdot\mathbf{u}(n)$$

όπου $\overline{\mu}$ είναι το τροποποιημένο κέρδος προσαρμογής και ε είναι μια θετική σταθερά που διασφαλίζει τον μη μηδενισμό του παραονομαστή στην ανωτέρω σχέση

☑ Εισαγωγή
☑ Αλγόριθμοι προσήμου
★ Κανονικοποιημένος LMS
☐ Leaky LMS
☐ LMS με μεταβλητό κέρδος προσαρμογής (μ)
☐ Παραδείγματα

Κανονικοποιημένος LMS (II)

- Οι επιλογές για τα $\bar{\mu}$ και ε βασίζονται στις παρακάτω ανισότητες

$$0 < \bar{\mu} < \frac{1}{M}, \quad 0 < \varepsilon << \frac{1}{M}$$

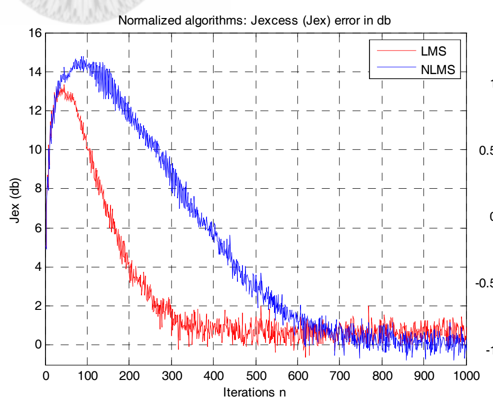
- Υπάρχει μια παραλλαγή του κανονικοποιημένου αλγόριθμου LMS γνωστή ως sign NLMS στην οποία η εξίσωση προσαρμογής είναι:

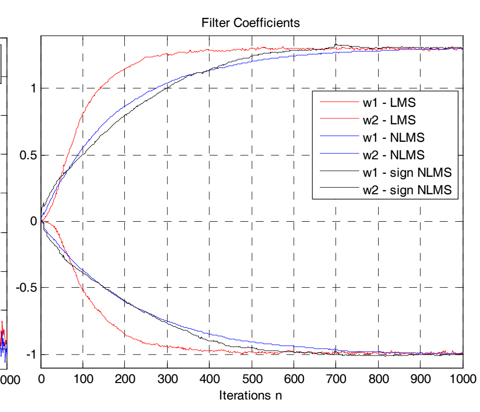
$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \frac{\bar{\mu}}{\varepsilon + \mathbf{u}^T(n)\cdot\mathbf{u}(n)} sign(e(n))\cdot\mathbf{u}(n)$$

- Οι κανονικοποιημένοι αλγόριθμοι LMS έχουν πιο αργή αλλά περισσότερο ομαλή σύγκλιση όπως φαίνεται στο παράδειγμα του γραμμικού προβλέπτη που ακολουθεί

☑ Εισαγωγή
☑ Αλγόριθμοι προσήμου
★ Κανονικοποιημένος LMS
☐ Leaky LMS
☐ LMS με μεταβλητό κέρδος προσαρμογής (μ)
☐ Παραδείγματα

Παράδειγμα: Επίδοση LMS και NLMS στη γραμμική πρόβλεψη





☑ Εισαγωγή
☑ Αλγόριθμοι προσήμου
☑ Κανονικοποιημένος LMS
★ Leaky LMS
☐ LMS με μεταβλητό κέρδος προσαρμογής (μ)
☐ Παραδείγματα

Leaky LMS

- Η εξίσωση προσαρμογής του αλγόριθμο Leaky (διαρρέων) LMS είναι:

$$\mathbf{w}(n+1) = (1-2\mu\cdot\alpha)\mathbf{w}(n) + 2\mu\cdot e(n)\cdot\mathbf{u}(n)$$

όπου $0 < \alpha << \frac{1}{2\mathrm{M}}$

- Η ανωτέρω εξίσωση ελαχιστοποιεί το σφάλμα:

$$J(\mathbf{w}(n)) = E\{\|e(n)\|^2\} + aE\{\|w(n)\|^2\}$$

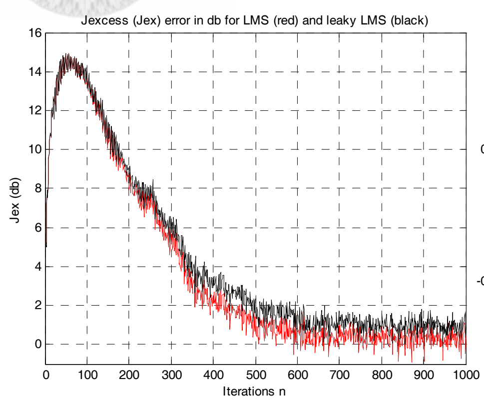
Δηλαδή ελαχιστοποιείται το μέσο τετραγωνικό σφάλμα με προσπάθεια οι συντελεστές του φίλτρου να κρατηθούν όσο το δυνατό μικρότεροι (αυτό είναι ιδιαιτέρα σημαντικό για υλοποίηση του αλγορίθμου LMS σε επεξεργαστές σταθερής υποδιαστολής)

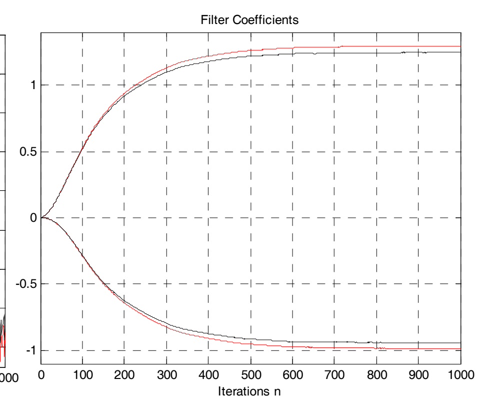
- Ο αλγόριθμος Leaky LMS δεν μπορεί να φτάσει στη λύση Wiener αλλά χρησιμοποιείται σε περιπτώσεις που ο πίνακας αυτοσυσχέτισης R_u της διεργασίας εισόδου δεν είναι καλά ορισμένος (μη αντιστρέψιμος)

$$\lim_{n\to\infty} E\{\mathbf{w}(n)\} = (R_u + aI)^{-1}p \text{ αντί για } \lim_{n\to\infty} E\{\mathbf{w}(n)\} = R_u^{-1}p$$

☑ Εισαγωγή
☑ Αλγόριθμοι προσήμου
☑ Κανονικοποιημένος LMS
★ Leaky LMS
☐ LMS με μεταβλητό κέρδος προσαρμογής (μ)
☐ Παραδείγματα

Παράδειγμα: Επίδοση LMS και leaky LMS (γραμμική πρόβλεψη)





☑ Εισαγωγή
☑ Αλγόριθμοι προσήμου
☑ Κανονικοποιημένος LMS
☑ Leaky LMS
★ LMS με μεταβλητό κέρδος προσαρμογής (μ)
☐ Παραδείγματα

LMS με μεταβλητό κέρδος προσαρμογής μ

- Στον αλγόριθμο LMS το κέρδος προσαρμογής μ πρέπει να αρκετά μικρό για να διασφαλίζεται η σύγκλιση και σχετικά μεγάλο για να έχουμε γρήγορη σύγκλιση.
  - Για τιμές του μ που διασφαλίζεται η σύγκλιση επιθυμούμε μεγάλο μ στις αρχικές επαναλήψεις και μικρότερο μ στη συνέχεια ώστε να ελαχιστοποιείται η απόκλιση από τη βέλτιστη λύση
- Στους αλγορίθμους με μεταβλητό κέρδος η εξίσωση προσαρμογής έχει τη μορφή:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + 2\mu(n) \cdot e(n)\mathbf{u}(n)$$

δηλαδή το μ μεταβάλλεται με το χρόνο

☑ Εισαγωγή
☑ Αλγόριθμοι προσήμου
☑ Κανονικοποιημένος LMS
☑ Leaky LMS
★ LMS με μεταβλητό κέρδος προσαρμογής (μ)
☐ Παραδείγματα

LMS με μεταβλητό κέρδος προσαρμογής μ (II)

Παραλλαγές αλγορίθμων LMS με μεταβλητό μ:

1. Δύο τιμές για το μ:

$$\mu(n) = \begin{cases} \mu_1 \text{ όταν } 0 \le \mathrm{n} \le \mathrm{K1} \\ \mu_2 \quad \text{ όταν } \mathrm{n} > \mathrm{K1} \end{cases} \qquad \mu_1 > \mu_2$$

2. Προοδευτικά μειούμενο μ:

$$\mu(n) = \frac{\mu_1}{\mu_2 + n} \qquad n \ge 0$$

3. μ ανάλογο του σφάλματος e(n):

$$\mu(n+1) = a_1\mu(n) + a_2|e(n)|^2 \quad a_1 \approx 1,\ a_2 << 1,\ \mu(n) \in [\mu_{\min} \ \ \mu_{\max}]$$

☑ Εισαγωγή
☑ Αλγόριθμοι προσήμου
☑ Κανονικοποιημένος LMS
☑ Leaky LMS
★ LMS με μεταβλητό κέρδος προσαρμογής (μ)
☐ Παραδείγματα

LMS με διανυσματικό κέρδος προσαρμογής μ

- Στον αλγόριθμο LMS με διανυσματικό κέρδος προσαρμογής μ (VLMS) η εξίσωση προσαρμογής έχει τη μορφή:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + 2e(n)\cdot\boldsymbol{\mu}(n)\mathbf{u}(n)$$

όπου ο τελεστής $\circ$ δηλώνει πολλαπλασιασμό στοιχείο προς στοιχείο

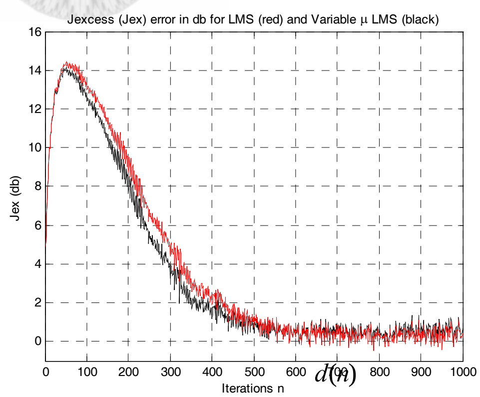
- Τα στοιχεία μ_i του διανύσματος **μ** μεταβάλλεται με το χρόνο ανάλογα σύμφωνα με τους πιο κάτω κανόνες:

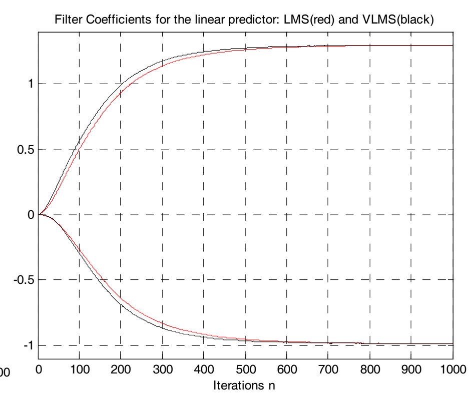
$$\mu_i(n+1) = \begin{cases} \frac{1}{a}\mu_i(n) & \text{αν η } i\text{ - στη συνιστώσα της βάθμωσης e(n)}\mathbf{u}\text{(n) στις τελευταίες m}_0\text{ επαναλήψεις έχει πάντα μεταβαλλόμενο πρόσημο} \\ a\cdot\mu_i(n) & \text{αν η } i\text{ - στη συνιστώσα της βάθμωσης δεν έχει ποτέ μεταβαλλόμενο πρόσημο στις τελευταίες m}_0\text{ επαναλήψεις} \end{cases}$$

$\mu_i(n) \in [\mu_{\min} \quad \mu_{\max}]$ τυπικές τιμές: $m_0 \in [1 \quad 3]$ $\quad a = 2$

☑ Εισαγωγή
☑ Αλγόριθμοι προσήμου
☑ Κανονικοποιημένος LMS
☑ Leaky LMS
★ LMS με μεταβλητό κέρδος προσαρμογής (μ)
☐ Παραδείγματα

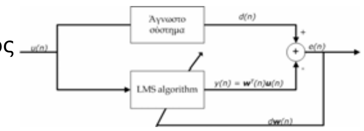
Παράδειγμα: Σύγκριση LMS και LMS με μεταβλητό μ





Παραδείγματα

- Στο επόμενο σχήμα δίνεται η βασική διάταξη αναγνώρισης συστήματος με τη χρήση του αλγορίθμου LMS:
  - Το επιθυμητό σήμα *d(n)* είναι ίσο με την απόκριση του άγνωστου συστήματος
  - Το σήμα u(n) είναι συνήθως λευκός θόρυβος



- Παράδειγμα:
  - Έστω ότι το άγνωστο σύστημα περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς:

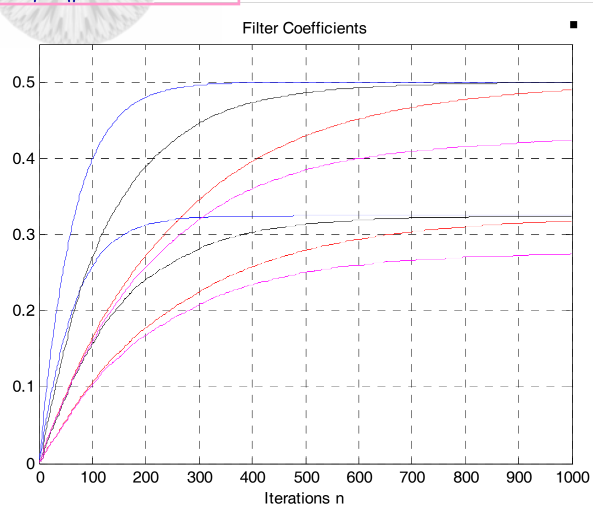
$$H(z) = \frac{0.5 + 0.2z^{-1} + 0.1z^{-2}}{1 - 0.25z^{-1}}$$

  - Για μοντελοποίηση του ανωτέρω συστήματος με FIR φίλτρο τάξης 5 (6 συντελεστών) η βέλτιστη λύση (λύση Wiener) είναι:

$$\mathbf{w}_o = [0.5 \quad 0.325 \quad 0.1812 \quad 0.0453 \quad 0.0113 \quad 0.0028]^T$$

  - Εφαρμόζουμε τους αλγορίθμους LMS, sign-LMS, NLMS, VLMS και εξετάζουμε τη σύγκλιση τους.

Αναγνώριση συστήματος (ΙΙ)



- Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η σταδιακή προσέγγιση των τιμών w_0 (=0.5) και w_1 (=0.325) με διάφορες παραλλαγές του αλγορίθμου LMS:
  - Κόκκινο: LMS
  - Μπλε: NLMS
  - Μαύρο: VLMS
  - Ροζ: Leaky LMS