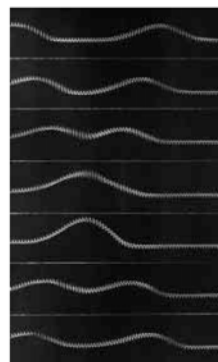


Γραμμικά φαινόμενα μηχανικών κυμάτων

- Υπέρθωση (επαλληλία) κυμάτων (superposition)
- Συμβολή (χωρική) κυμάτων (interference)
- Στάσιμα κύματα (standing waves)
- Κανονικοί τρόποι ταλάντωσης (normal modes)
- Διακροτήματα (beats): «συμβολή» στον χρόνο
- Κυματικός Συντονισμός
- Σύνθεση κυμάτων

Επαλληλία-Υπέρθωση Κυμάτων



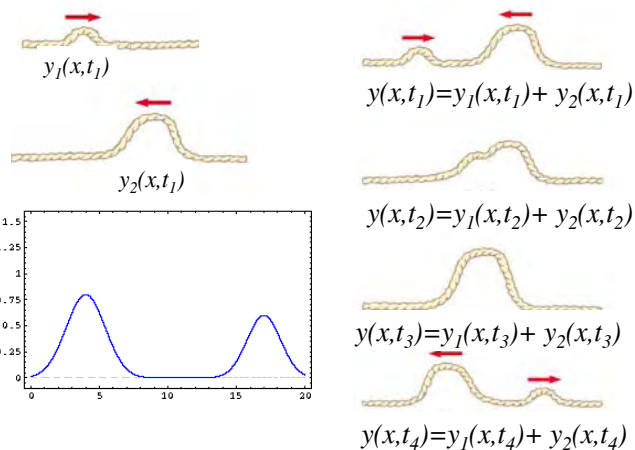
Επαλληλία (Υπέρθωση) Κυμάτων

Όταν i κύματα $y_i(x,t)$ ($i=2..n$) κινούνται στο ίδιο (γραμμικό) μέσο, η συνιστάμενη κυματική διαταραχή $y(x,t)$ περιγράφεται από το άθροισμα των κυματοσυναρτήσεων των i κυμάτων:

$$y(x,t) = \sum_i y_i(x,t), \text{ για κάθε } (x,t)$$

Όταν δύο ή περισσότερα γραμμικά κύματα κινούνται στο ίδιο μέσο, η ολική μετατόπιση των σημείων του μέσου ισούται με το διανυσματικό άθροισμα των μετατοπίσεων που προκαλεί κάθε κύμα στα υπό μελέτη σημεία.

Επαλληλία (υπέρθωση) Κυμάτων



Επαλληλία: Συμβολή κυμάτων

$$y(x,t_1) = y_1(x,t_1) + y_2(x,t_1)$$

Συνέπεια της αρχής της επαλληλίας:

$$y(x,t_2) = y_1(x,t_2) + y_2(x,t_2)$$

Γραμμικά κύματα (παλμοί) «περνούν το ένα μέσα από το άλλο» δίχως να αλληλεπιδρούν (αλλάζουν σχήμα)

$$y(x,t_3) = y_1(x,t_3) + y_2(x,t_3)$$

$$y(x,t_4) = y_1(x,t_4) + y_2(x,t_4)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Συμβολή αρμονικών κυμάτων

$$\left. \begin{aligned} y_1(x,t) &= A_0 \sin(kx - \omega t) \\ y_2(x,t) &= A_0 \sin(kx - \omega t - \phi) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) \Rightarrow$$

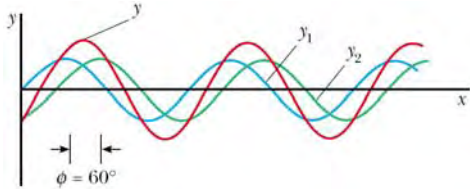
$$y(x,t) = A_0 [\sin(kx - \omega t) + \sin(kx - \omega t - \phi)]$$

$$\sin a + \sin b = 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$y(x,t) = \left(2A_0 \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \right) \times \sin\left(kx - \omega t - \frac{\phi}{2}\right)$$

Συμβολή αρμονικών κυμάτων

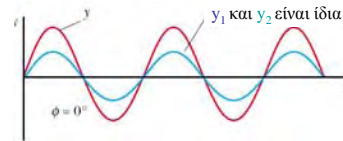
$$\left. \begin{aligned} y_1(x,t) &= A_0 \sin(kx - \omega t) \\ y_2(x,t) &= A_0 \sin(kx - \omega t - \varphi) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = \left(2A_0 \cos \frac{\varphi}{2} \right) \sin \left(kx - \omega t - \frac{\varphi}{2} \right)$$



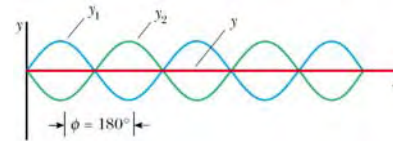
$$y_0 = 2A_0 \cos \frac{\varphi}{2} : 0 \dots 2A_0$$

Καταστρεπτική / Ενισχυτική Συμβολή

$$y = \left(2A_0 \cos \frac{\varphi}{2} \right) \sin \left(kx - \omega t - \frac{\varphi}{2} \right)$$



$\varphi = 2n\pi, n=0,1,2,\dots$
ενισχυτική συμβολή



$\varphi = (2n+1)\pi, n=0,1,2,\dots$
καταστρεπτική συμβολή

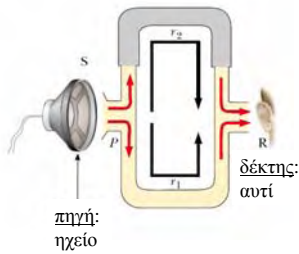
Συμβολή ηχητικών κυμάτων

Ενισχυτική συμβολή:

$$\Delta r = r_1 - r_2 = n\lambda$$

Καταστρεπτική συμβολή:

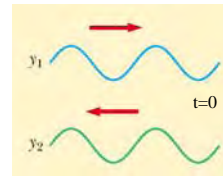
$$\Delta r = r_1 - r_2 = (2n+1) \frac{\lambda}{2}$$



Διαφορά διαδρομής Δr αντιστοιχεί σε διαφορά φάσης φ

$$\Delta r = \frac{\lambda}{2\pi} \varphi$$

Στάσιμα κύματα

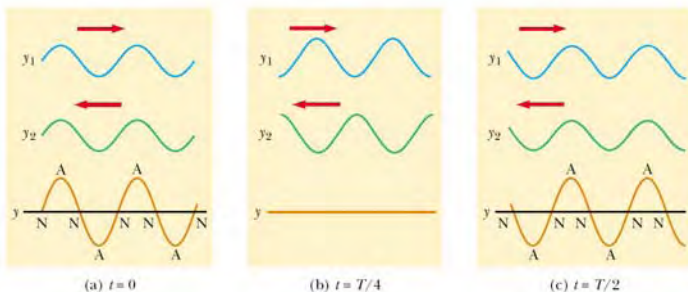


$$\left. \begin{aligned} y_1(x,t) &= A_0 \sin(kx - \omega t) \\ y_2(x,t) &= A_0 \sin(kx + \omega t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = [2A \sin(kx)] \cos(\omega t)$$

$$[\sin(a \pm \beta) = \sin a \cos \beta \pm \cos a \sin \beta]$$

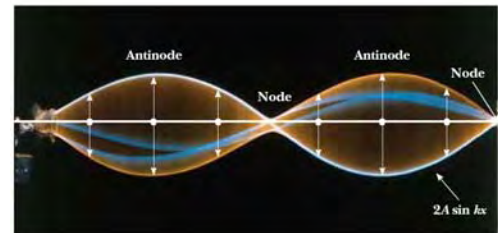
Στάσιμα κύματα

$$y = [2A \sin(kx)] \cos(\omega t)$$



Στάσιμα κύματα

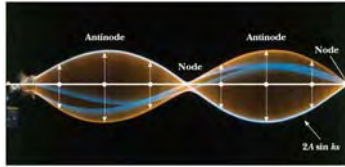
$$y = [2A \sin(kx)] \cos(\omega t)$$



Κόμβος, Δεσμός (**Node**): σημεία μηδενικού πλάτους
Αντίδεσμος, Κορυφή, Κοιλία (**Antinode**): σημεία μέγιστου πλάτους

Στάσιμα κύματα

$$y = [2A \sin(kx)] \cos(\omega t)$$



Πλάτος στάσιμου κύματος: $2A \sin(kx)$

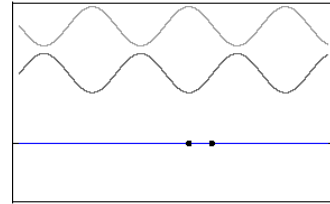
- Μέγιστο πλάτος $2A$ στους αντικόμβους όπου:

$$\sin kx = 1 \Rightarrow kx = (2N + 1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (2N + 1) \frac{\lambda}{4}$$

- Μηδενικό πλάτος στους δεσμούς όπου:

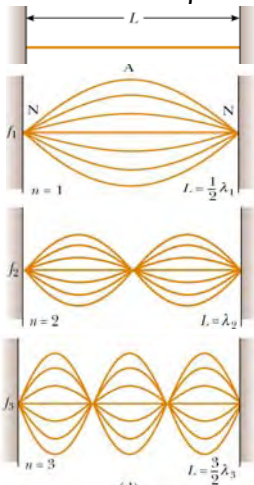
$$\sin kx = 0 \Rightarrow kx = N\pi \Rightarrow x = N \frac{\lambda}{2} \quad \text{Διάδοση ενέργειας;;;}$$

Στάσιμα κύματα



$$\left. \begin{aligned} y_1(x,t) &= A_0 \sin(kx - \omega t) \\ y_2(x,t) &= A_0 \sin(kx + \omega t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = [2A \sin(kx)] \cos(\omega t)$$

Κανονικοί τρόποι (ιδιοκαταστάσεις) ταλάντωσης



Κυματοσυνάρτηση:
 $y(x,t) = [2A \sin(kx)] \cos(\omega t)$
 Συνοριακές συνθήκες:
 $y(0,t) = y(L,t) = 0$

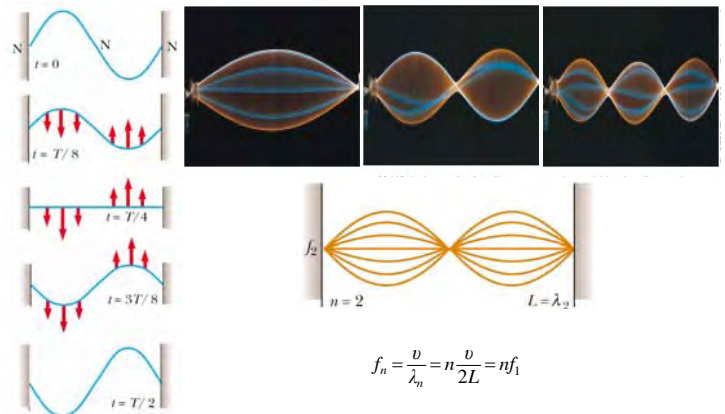
$$\sin(k_n L) = 0 \Rightarrow k_n L = n\pi \Rightarrow$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{v}{2L} = n f_1,$$

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Κανονικοί τρόποι (ιδιοκαταστάσεις) ταλάντωσης



$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{v}{2L} = n f_1$$

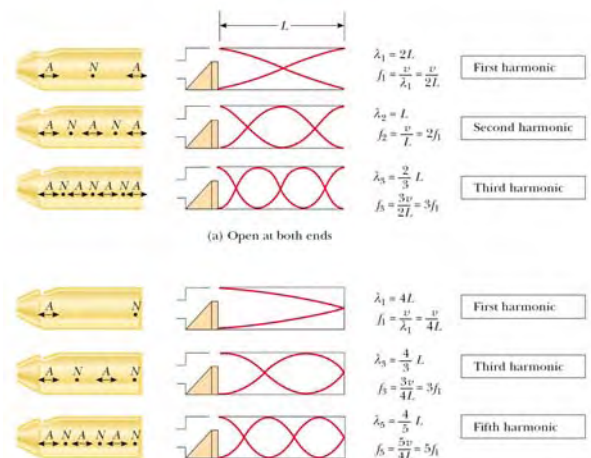
Κανονικοί τρόποι (ιδιοκαταστάσεις) ταλάντωσης



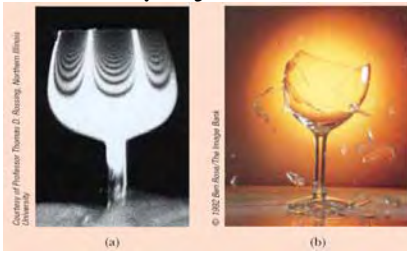
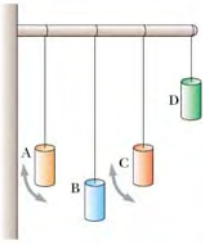
$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{v}{2L} = n f_1$$

<http://id.mind.net/~zona/mstm/physics/waves/standingWaves/standingWaves1/standingWaves1.html>

Στάσιμα κύματα σε αέρια



Συντονισμός



Διακροτήματα (Beats)

- Τα φαινόμενα συμβολής που έχουμε δει αναφέρονταν σε κύματα ίδιας συχνότητας (χωρική συμβολή)
- Κατά την υπέρθεση κυμάτων διαφορετικών συχνοτήτων θα έχουμε – σε δεδομένο σημείο x – συμβολή η οποία θα είναι καταστρεπτική ή ενισχυτική ανάλογα με την χρονική στιγμή t
- Όταν δύο κύματα παραπλήσιας συχνότητας ω_1, ω_2 συμβάλλουν, δημιουργούν μία κυματομορφή το πλάτος της οποίας – σε σημείο x – μεταβάλλεται περιοδικά με τον χρόνο. Το μέγιστο πλάτος αυτής της περιοδικής μεταβολής ονομάζεται **διακρότημα**.
- Η συχνότητα διακροτήματων είναι $\delta\omega = (\omega_1 - \omega_2)$

Διακροτήματα

$x = 0$

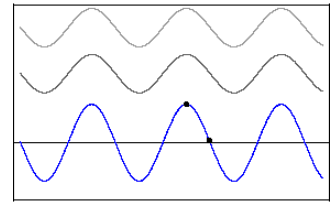
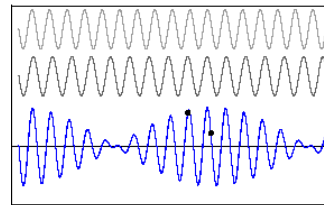
$$\left. \begin{aligned} y_1(0, t) &= A_0 \cos(2\pi f_1 t) \\ y_2(0, t) &= A_0 \cos(2\pi f_2 t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = y_1 + y_2 = A_0 (\cos 2\pi f_1 t + \cos 2\pi f_2 t)$$

$$\Rightarrow y = 2A_0 \cos \left[2\pi \left(\frac{f_1 - f_2}{2} \right) t \right] \cos \left[2\pi \left(\frac{f_1 + f_2}{2} \right) t \right]$$

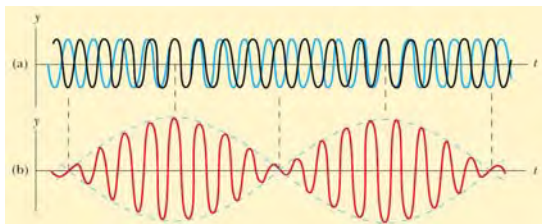
$$\left[\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \right]$$

Διακροτήματα

$$y = 2A_0 \cos \left[2\pi \left(\frac{f_1 - f_2}{2} \right) t \right] \cos \left[2\pi \left(\frac{f_1 + f_2}{2} \right) t \right]$$



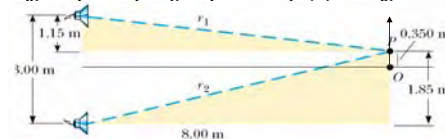
Διακροτήματα



$$y = 2A_0 \cos \left[2\pi \left(\frac{f_1 - f_2}{2} \right) t \right] \cos \left[2\pi \left(\frac{f_1 + f_2}{2} \right) t \right]$$

Παραδείγματα

Τα μεγάφωνα του σχήματος είναι συνδεδεμένα με την ίδια πηγή. Παρατηρητής ξεκινάει από το σημείο O και κινείται παράλληλα με την ευθεία που ενώνει τα δύο ηχεία. Στο σημείο P ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται το πρώτο ελάχιστο της έντασης του ήχου. Βρείτε την συχνότητα του παραγόμενου ήχου



[Interference animation](#)

Δύο κύματα με κυματοσυναρτήσεις $y_1 = (4\text{cm})\sin(3x - 2t)$ και $y_2 = (4\text{cm})\sin(3x + 2t)$ συγκροτούν στάσιμο κύμα.

- (a) Βρείτε την μέγιστη μετατόπιση της συνισταμένης κυματικής διαταραχής στο $x_0 = 2.3\text{cm}$
 (b) Υπολογίστε θέση δεσμών και αντιδεσμών

$$y = [2A \sin(kx)] \cos(\omega t)$$



330Hz

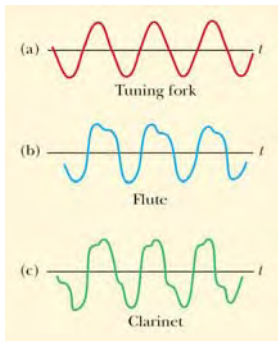


330Hz και 331Hz



330Hz και 340Hz

Μη αρμονικά κύματα – θ. Fourier

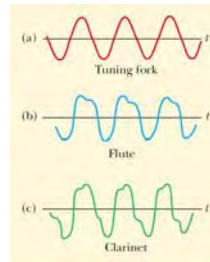
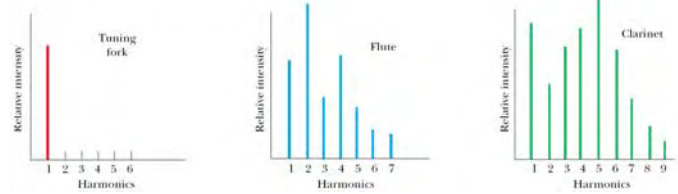


$$y(t) = y(t + T)$$

$$y(t) = \sum_n [A_n \sin(2\pi f_n t) + B_n \cos(2\pi f_n t)]$$

$$f_n = n f_1 = n \frac{1}{T}$$

Ανάλυση Fourier: Φάσμα συχνοτήτων



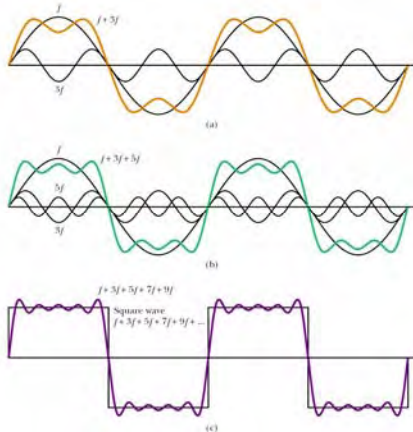
$$y(t) = y(t + T)$$

$$y(t) = \sum_n [A_n \sin(\omega_n t) + B_n \cos(\omega_n t)]$$

$$\omega_n = n \omega_1 = 2\pi f_n = n \frac{2\pi}{T}$$

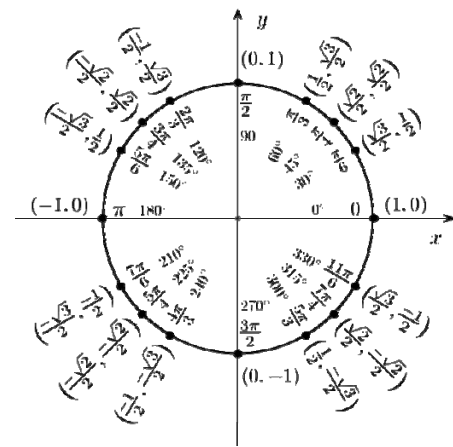
$$y_{fn} = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

Σύνθεση Fourier: Τετραγωνικός παλμός

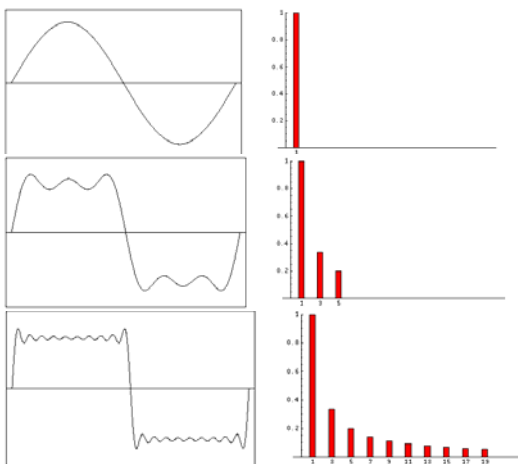


$$y(t) = \sum_n [A_n \sin(\omega_n t) + B_n \cos(\omega_n t)], \quad n = 1, 3, 5, 7, \dots, (2i + 1),$$

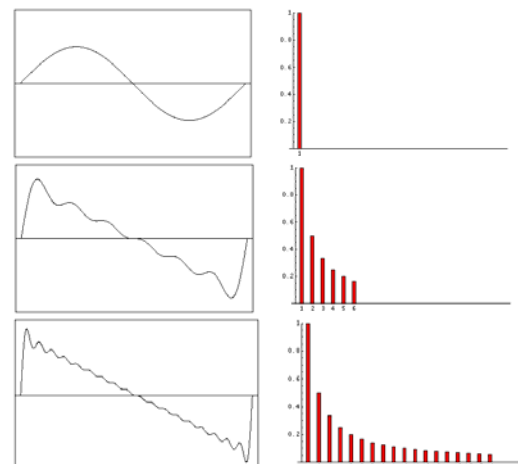
Τριγωνομετρικός κύκλος



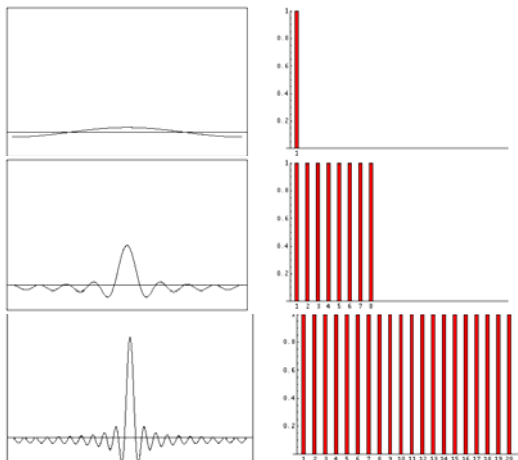
Τετραγωνικός παλμός



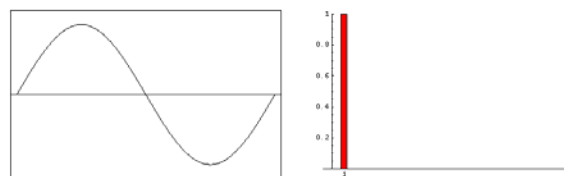
Πριονωτός παλμός



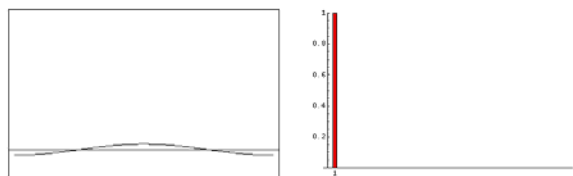
Κυματομάδα με πολλές συνιστώσες



Τετραγωνικός παλμός



Κυματομάδα με πολλές συνιστώσες



Πριονωτός παλμός

