



Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα

Οι εξισώσεις του Maxwell



$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt}$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα



Ο νόμος Ampere-Maxwell προέβλεψε ότι ένα χρονό-μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο παράγει μαγνητικό πεδίο, όπως και ένα μαγνητικό πεδίο που μεταβάλλεται με το χρόνο παράγει ηλεκτρικό πεδίο (v. Faraday). Η θεωρία του Maxwell προέβλεψε την ύπαρξη ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων που διαδίδονται στο κενό με την ταχύτητα του φωτός.

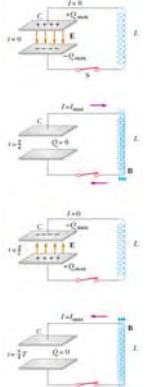
Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα:

- δημιουργούνται από επιταχυνόμενα ηλεκτρικά φορτία.
- είναι ταλαντούμενα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία, τα οποία είναι κάθετα μεταξύ τους και, κάθετα προς την κατεύθυνση διάδοσης της κυματικής διαταραχής (εγκάρσια κύματα)
- τα πλάτη των ταλαντούμενων πεδίων συνδέονται με $E=cB$
- σε μεγάλες αποστάσεις, τα πλάτη ελαττώνονται με την απόσταση $E, B \sim 1/r$
- μεταφέρουν ενέργεια, ορμή και στροφορμή και επομένως ασκούν πίεση στις επιφάνειες που προσπίπτουν

Οι ανακαλύψεις του Hertz



Ο Hertz απόδειξε με σειρά πειραμάτων ότι τα ραδιοκύματα έχουν τις ίδιες ιδιότητες: συμβολής, περίθλασης, ανάκλασης, διάθλασης και πόλωσης – όπως και το φως. Επίσης προσδιόρισε την ταχύτητα τους c μετρώντας τους δεσμούς από την συμβολή των ανακλώμενων κυμάτων!



ΗΜ κυματικές εξισώσεις στο κενό

Οι χρονοεξαρτημένες εξισώσεις του Maxwell για το κενό:

$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$ $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt}$ <p>(ολοκληρωτική μορφή)</p>	\Leftrightarrow	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ <p>(διαφορική μορφή)</p>
---	-------------------	--

όπου εν γένει: $\mathbf{E}(x, y, z) = E_x(x, y, z)\hat{i} + E_y(x, y, z)\hat{j} + E_z(x, y, z)\hat{k}$
 $\mathbf{B}(x, y, z) = B_x(x, y, z)\hat{i} + B_y(x, y, z)\hat{j} + B_z(x, y, z)\hat{k}$

ΗΜ κυματικές εξισώσεις στο κενό

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \Rightarrow$$

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) \Rightarrow 0 - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \Rightarrow \dots \Rightarrow \nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

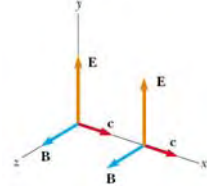
HM κυματικές εξισώσεις στο κενό

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z})$$

Υποθέτουμε ότι το **HM κύμα** είναι **επίπεδο** (οδεύει σε μία διεύθυνση, έστω x), και **γραμμικά πολωμένο** με το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου παράλληλο στον άξονα y και το διάνυσμα του μαγνητικού πεδίου παράλληλο στον z

δηλ. $\mathbf{E} = E_y(x,t) \hat{y}$, $\mathbf{B} = B_z(x,t) \hat{z}$.

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \mathbf{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} \end{aligned} \right\}$$



Τα E_y, B_z ικανοποιούν την κυματική εξίσωση με ταχύτητα $v = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}} = c$

Αρμονικά HM κύματα

Για τις εξισώσεις:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

Θεωρώ λύσεις αρμονικές της μορφής:

$$E = E_m \cos(kx - \omega t)$$

$$B = B_m \cos(kx - \omega t)$$

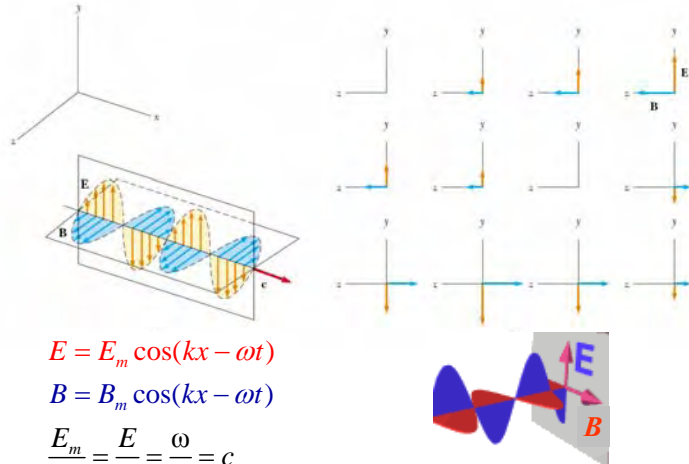
και εύκολα βρίσκω:

$$\frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda} = \lambda f = c$$

Παρόμοια:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t} \Rightarrow -k E_m \sin(kx - \omega t) = -\omega B_m \sin(kx - \omega t) \Rightarrow$$

$$\frac{E_m}{B_m} = \frac{E}{B} = c$$



$$E = E_m \cos(kx - \omega t)$$

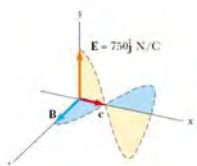
$$B = B_m \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{E_m}{B_m} = \frac{E}{B} = \frac{\omega}{k} = c$$

Ιδιότητες των Η/Μ κυμάτων στο κενό

- Οι λύσεις των χρονο-εξαρτημένων εξισώσεων Maxwell είναι κυματικής μορφής
- Τα η/μ κύματα οδεύουν στο κενό διάστημα με την ταχύτητα του φωτός $\sqrt{1/(\mu_0 \epsilon_0)} = c$
- Στα επίπεδα η/μ κύματα τα διανύσματα του \mathbf{E} και \mathbf{B} είναι *κάθετα* μεταξύ τους και *κάθετα* στην κατεύθυνση διάδοσης του κύματος
- Ο λόγος του πλάτους του ηλεκτρικού προς το πλάτος του μαγνητικού πεδίου ισούται με c
- Τα η/μ κύματα υπακούουν στην αρχή της επαλληλίας

Παράδειγμα: Αρμονικό επίπεδο η/μ κύμα συχνότητας $f=40$ MHz, διαδίδει προς την θετική κατεύθυνση του x . Σε κάποιο σημείο, κάποια στιγμή το ΗΠ λαμβάνει την μέγιστη τιμή των 750 N/C και είναι παράλληλο προς τον y . Υπολογίστε το μήκος, την περίοδο του κύματος, και το μαγνητικό πεδίο \mathbf{B} . Γράψτε τις εκφράσεις που περιγράφουν το επίπεδο η/μ κύμα



$$c = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f} = 7.5 \text{ m}$$

$$T = \frac{1}{f} = 2.5 \times 10^{-8} \text{ s}$$

$$B_m = \frac{E_m}{c} = 2.5 \times 10^{-6} \text{ T}$$

$$E = E_m \cos(kx - \omega t) = 750 \cos(0.838x - 8\pi \times 10^7 t) \quad (\text{N/C})$$

$$B = B_m \cos(kx - \omega t) = 2.5 \times 10^{-6} \cos(0.838x - 8\pi \times 10^7 t) \quad (\text{T})$$

$$\omega = 2\pi f = 8\pi \times 10^7 \text{ rad/s}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 0.838 \text{ m}^{-1}$$



Ενέργεια Η/Μ κυμάτων

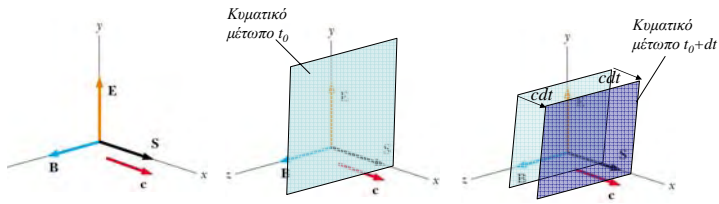
$$\left. \begin{aligned} \text{Πυκνότητα ενέργειας ΗΠ: } u_E &= \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \\ \text{Πυκνότητα ενέργειας ΜΠ: } u_B &= \frac{1}{2\mu_0} B^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow u = u_E + u_B = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

$$\text{Η/Μ κύμα} \Rightarrow \frac{E}{B} = c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}} \Rightarrow B = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} E$$

$$\text{Πυκνότητα ενέργειας Η/Μ κύματος: } u = \frac{B^2}{\mu_0} = \epsilon_0 E^2$$

Παραπομπή: §26.4 & §32.3

Ροή ενέργειας ανά μονάδα χρόνου ανά επιφάνεια



$$dU = udV = \epsilon_0 E^2 (Ac dt)$$

Ροή ενέργειας ανά μονάδα χρόνου, ανά μονάδα επιφάνειας:

$$S = \frac{1}{A} \frac{dU}{dt} = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c} = \frac{c}{\mu_0} B^2$$

Ενέργεια Η/Μ κυμάτων

Η πυκνότητα ενέργειας που σχετίζεται με το ηλεκτρικό πεδίο: $u_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$

Η πυκνότητα ενέργειας που σχετίζεται με το μαγνητικό πεδίο: $u_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2$

Τα E, B ενός η/μ κύματος ($E/B=c$): $u_m = u_e = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$

Η στιγμιαία πυκνότητα ενέργειας που οφείλεται στο ΜΠ ισούται με τη στιγμιαία πυκνότητα ενέργειας που οφείλεται στο ΗΠ!

Η ολική στιγμιαία πυκνότητα ενέργειας είναι: $u = u_m + u_e = \frac{B^2}{\mu_0} = \epsilon_0 E^2$

Η ολική μέση ενέργεια ανά μονάδα όγκου είναι: $\langle u \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 \langle E^2 \rangle = \frac{\langle B^2 \rangle}{\mu_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_m^2 = \frac{1}{2\mu_0} B_m^2$

Η ένταση ενός Η/Μ κύματος ισούται με την μέση πυκνότητα ενέργειας επί c :
 $I = S_{av} = \langle S \rangle = cu_{av}$

Ενέργεια Η/Μ κυμάτων

Τα Η/Μ κύματα μεταφέρουν ορμή και ενέργεια. Ο **ρυθμός ροής ενέργειας** η/μ κύματος ανά επιφάνεια περιγράφεται από το **διάνυσμα Poynting S** που ορίζεται ως:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (\text{W/m}^2)$$

Το μέτρο του $|\mathbf{S}| = S = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c} = \frac{c}{\mu_0} B^2$ περιγράφει τον ρυθμό με τον οποίο η ενέργεια διαρρέει μια μοναδιαία επιφάνεια κάθετη στην κατεύθυνση διάδοσης του κύματος. Το \mathbf{S} έχει την κατεύθυνση διάδοσης του Η/Μ κύματος.

Η μέση τιμή του \mathbf{S} ονομάζεται ένταση (ακτινοβολίας) του η/μ κύματος και είναι

$$I = S_{av} = \langle S \rangle = \frac{E_m B_m}{2\mu_0} = \frac{E_m^2}{2\mu_0 c} = \frac{c}{2\mu_0} B_m^2$$

Εμπέδηση (σύνθετη αντίσταση) του κενού: $\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \mu_0 c = \frac{c}{\epsilon_0} = 377 \Omega$

Ορμή και πίεση ακτινοβολίας

Πυκνότητα ορμής (η/μ πεδίου): $\frac{dp}{dV} = \frac{EB}{\mu_0 c^2} = \frac{S}{c^2}$

Πίεση ακτινοβολίας = Ρυθμός ροής ορμής (ανά μονάδα επιφάνειας)

$$P = \frac{1}{A} \frac{dp}{dt} = \frac{EB}{\mu_0 c} = \frac{S}{c}$$

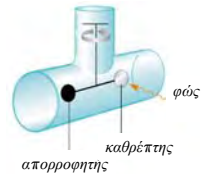
Ολική ορμή με την οποία Η/Μ προσκρούει σε επιφάνεια μέλανο σώματος: $p = \frac{U}{c}$

U : συνολική ενέργεια που φέρει το κύμα στην επιφάνεια

Μέση πίεση ακτινοβολίας: $P = \frac{\langle S \rangle}{c} = \frac{I}{c}$

Μέση πίεση ακτινοβολίας σε μελανό σώμα: $P = \frac{I}{c}$

Μέση πίεση ακτινοβολίας σε τέλει ανακλαστή: $P = \frac{2I}{c}$



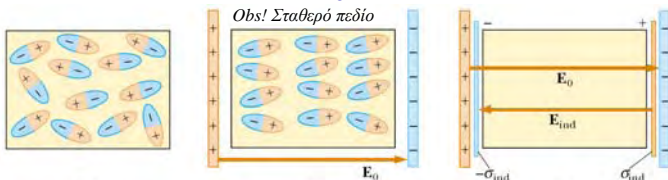
Η/Μ κύματα στην ύλη

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

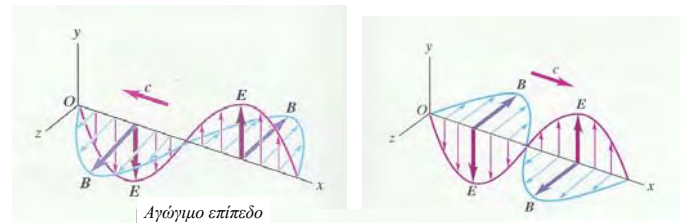
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$v = \sqrt{\frac{1}{\mu \epsilon}} = \sqrt{\frac{1}{K_m \mu_0 K \epsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{K_m K}}$$

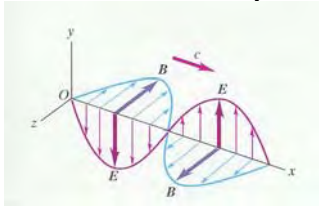
Δείκτης διάθλασης: $n = \frac{c}{v} = \sqrt{K_m K} \approx \sqrt{K} > 1$



Στάσιμα Η/Μ κύματα

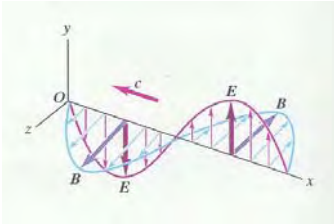


Στάσιμα Η/Μ κύματα



$$E_1 = E_m \sin(\omega t - kx)$$

$$B_1 = B_m \sin(\omega t - kx)$$



$$E_2 = -E_m \sin(\omega t + kx)$$

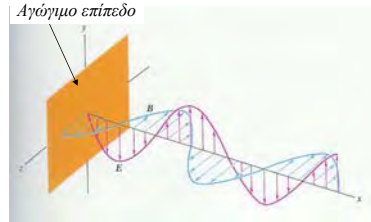
$$B_2 = B_m \sin(\omega t + kx)$$

Στάσιμα Η/Μ κύματα



$$E_1 + E_2 = E_m \sin(\omega t - kx) - E_m \sin(\omega t + kx) = -2E_m \cos \omega t \sin kx$$

$$B_1 + B_2 = B_m \sin(\omega t - kx) + B_m \sin(\omega t + kx) = 2B_m \sin \omega t \cos kx$$



Τα δεσμικά επίπεδα του **E**:

$$\sin kx = 0 \Rightarrow x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, \dots$$

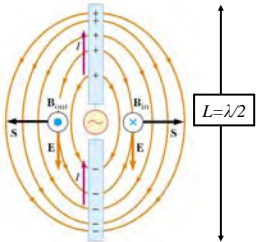
Τα δεσμικά επίπεδα του **B**:

$$\cos kx = 0 \Rightarrow x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \dots$$

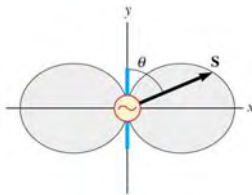
Εισάγοντας δεύτερο αγώγιμο επίπεδο σε απόσταση L από το πρώτο και σε θέση δεσμικού επιπέδου του E, για να σχηματιστεί στάσιμο κύμα

πρέπει $\lambda_n = \frac{2L}{n}$ με αντίστοιχες συχνότητες $f_n = \frac{c}{\lambda_n} = n \frac{c}{2L}$ ($n=1,2,3,\dots$)

Κεραία ημι-κύματος (διπολική κεραία)



- Μηδενικό μαγνητικό πεδίο στον άξονα της κεραίας
- Διαφορά φάσης 90° μεταξύ των συνιστωσών του **E** και **B** που οφείλονται στον διαχωρισμό ηλ. φορτίων και στο ρεύμα αγωγιμότητας αντίστοιχα. Η ένταση τους είναι ανάλογη με $\sim 1/r^3$
- Τα επαγόμενα η/μ πεδία βρίσκονται σε φάση και η ένταση τους είναι ανάλογη με $\sim 1/r$



Το φάσμα των Η/Μ κυμάτων

