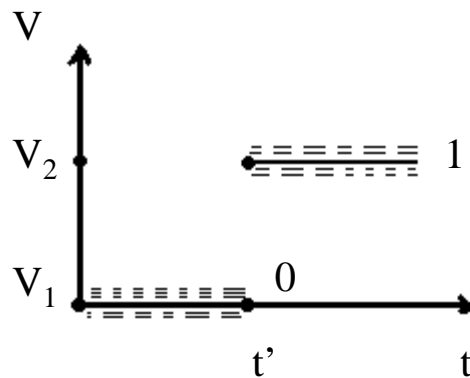


ΕΙΣΑΓΩΓΗ

A) Ηλεκτρονικά κυκλώματα

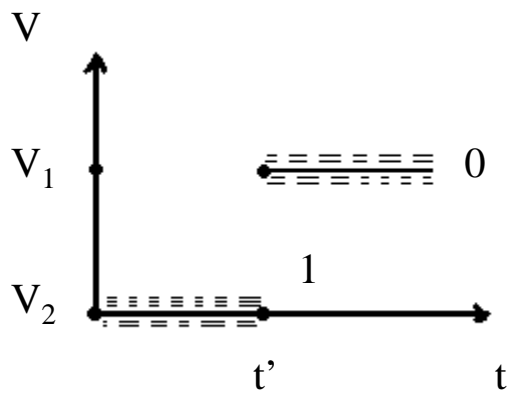
- Αναλογικά κυκλώματα
- Ψηφιακά κυκλώματα (δίτιμα)



Θετική λογική:

0 V_1 με $V_1 = 0$ Volts

1 V_2 με $|V_2| \neq 0$ Volts



Αρνητική λογική:

0 $\hat{=}$ V_1 με $|V_1| \neq 0$ Volts

1 $\hat{=}$ V_2 με $V_2 = 0$ Volts

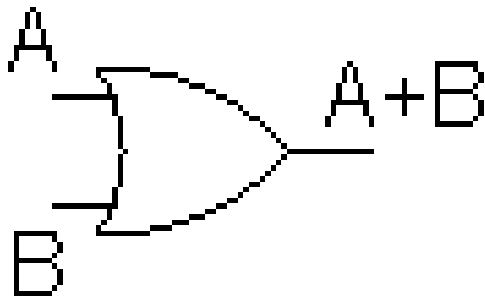
B) Ψηφιακά κυκλώματα

- Συνδιαστικά κυκλώματα
- Ακολουθιακά κυκλώματα

Λογικές Πύλες

Τα λογικά ηλεκτρονικά κυκλώματα, με τα οποία μπορούμε να εκτελέσουμε τις βασικές πράξεις καλούνται λογικές πύλες και παίρνουν το όνομα τους από τη λογική πράξη που εκτελούν.

Η πύλη OR

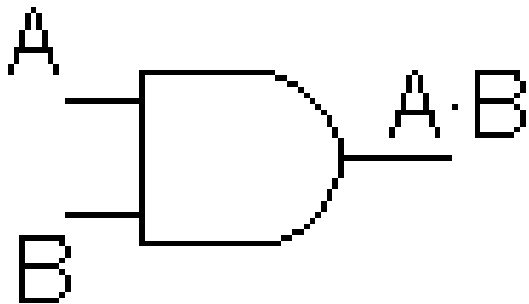


Αν τουλάχιστον μία από τις εισόδους της είναι 1, η έξοδος είναι επίσης 1. Αλλιώς, η έξοδος είναι 0.

Πίνακας Αληθείας OR

A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Η πύλη AND

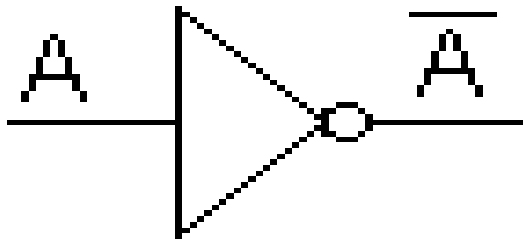


Η πύλη AND δίνει έξοδο 1 μόνο όταν όλες οι είσοδοι της είναι 1.

Πίνακας Αληθείας AND

A	B	A·B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Η πύλη NOT

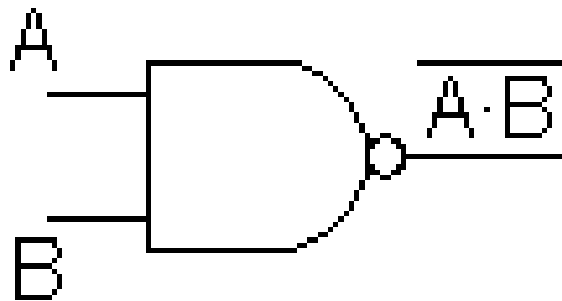


Η πύλη NOT αντιστρέφει την είσοδο της.

Πίνακας Αληθείας NOT

A	\bar{A}
0	1
1	0

Η πύλη NAND



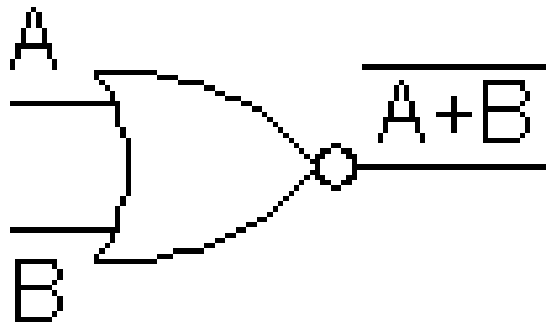
(**AND** + **NOT**)

Πίνακας Αληθείας NAND

A	B	$\overline{A \cdot B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Η πύλη NOR

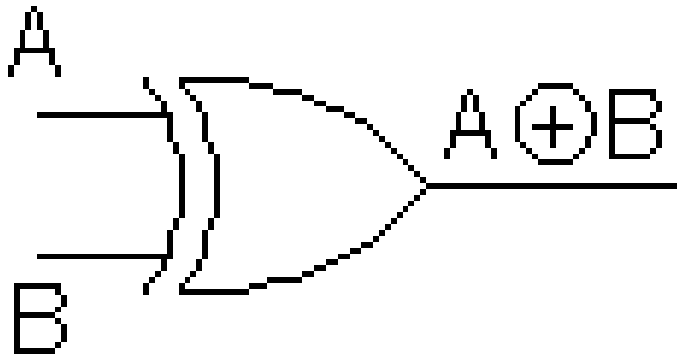
Πίνακας Αληθείας NOR



(**OR + NOT**)

A	B	$\overline{A + B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Η πύλη Exclusive OR (XOR)



Πίνακας Αληθείας XOR

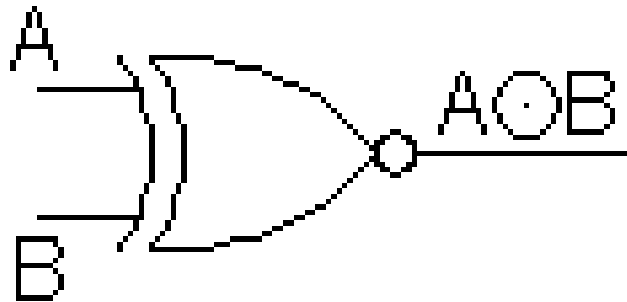
A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Η πύλη XOR δίνει έξοδο 1 όταν οι είσοδοι της είναι άνισες.

Από τον πίνακα προκύπτει:

$$A \oplus B = A\bar{B} + \bar{A}B$$

Η πύλη Exclusive NOR (XNOR)



Η πύλη XNOR δίνει έξοδο 1 όταν οι είσοδοι της είναι ίσες.

A	B	A⊙B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Ισχύει ότι:

$$A \odot B = \overline{A \oplus B}$$

ΚΑΙ

$$A \oplus B = \overline{A \odot B}$$

Δίτιμη Άλγεβρα Boole

Είναι το μαθηματικό εργαλείο με το οποίο χειριζόμαστε τα Ψηφιακά κυκλώματα.

Η δίτιμη άλγεβρα Boole - Shannon είναι ένα μαθηματικό σύστημα που ορίζεται στο σύνολο $B=\{0,1\}$ μαζί με δύο δυαδικούς τελεστές $+$ και \cdot , και ικανοποιεί τα αξιώματα του Huntington.

Αξιώματα της άλγεβρας Boole

1. α) Κλειστή ως προς τον τελεστή +
β) Κλειστή ως προς τον τελεστή ·
2. α) Ουδέτερο στοιχείο το 0 ως προς την πρόσθεση: $x+0=0+x=x$
β) Ουδέτερο στοιχείο το 1 ως προς τον πολλαπλασιασμό: $x \cdot 1=1 \cdot x=x$
3. α) Αντιμεταθετικότητα ως προς +: $x+y = y+x$
β) Αντιμεταθετικότητα ως προς · : $x \cdot y = y \cdot x$
4. Επιμεριστικότητα του · ως προς + αλλά και αντίστροφα:
$$x \cdot (y+z)=(x \cdot y)+(x \cdot z)$$
$$x+(y \cdot z)=(x+y) \cdot (x+z)$$

5. Για κάθε στοιχείο $x \in B$, υπάρχει ένα στοιχείο $\bar{x} \in B$ (που ονομάζεται συμπλήρωμα του x), τέτοιο ώστε:
- a) $\bar{x} + x = 1$ b) $\bar{x} \cdot x = 0$
6. Υπάρχουν τουλάχιστον 2 στοιχεία $x, y \in B$ που να είναι $x \neq y$

Θεωρήματα της άλγεβρας Boole

1. a) $x \cdot x = x$, b) $x + x = x$
2. a) $1 + x = 1$, b) $0 \cdot x = 0$
3. a) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, b) $x + (y + z) = (x + y) + z$
(προσεταιριστική ιδιότητα)
4. $x(x + y) = x$
5. $x + xy = x$
6. $x + \overline{xy} = x + y$
7. Θεώρημα De Morgan: a) $\overline{\overline{x + y}} = \overline{\overline{x}} \cdot \overline{\overline{y}}$
b) $\overline{\overline{x \cdot y}} = \overline{\overline{x}} + \overline{\overline{y}}$
8. $\overline{\overline{x}} = x$

Προτεραιότητα των πράξεων

Η προτεραιότητα των πράξεων στην άλγεβρα Boole έχει ως εξής:

1. Παρένθεση
2. Ανάστροφο
3. Πολλαπλασιασμός
4. Πρόσθεση

Παραδείγματα - Ασκήσεις

1) Απόδειξη του θεωρήματος 8.a με πίνακα αληθείας

x	y	x+y	$\overline{x+y}$	\overline{x}	\overline{y}	$\overline{x \cdot y}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

2) Παράδειγμα απλοποίησης

$$\begin{aligned}(x + y)(x + \bar{y})(\bar{x} + z) &= (xx + x\bar{y} + yx + y\bar{y})(\bar{x} + z) = \\ &= (x + x\bar{y} + xy)(\bar{x} + z) = (x + x(\bar{y} + y))(\bar{x} + z) = \\ &= (x + x)(\bar{x} + z) = x(\bar{x} + z) = x\bar{x} + xz = xz\end{aligned}$$

3) Να απλοποιηθεί η συνάρτηση

$$\begin{aligned}
 F &= \left[\overline{\overline{A + B + A + B}} \right] + \left[\overline{(\overline{AB}) \cdot (\overline{A\overline{B}})} \right] = \\
 &= \left[\overline{(\overline{A + B}) \cdot (\overline{A + B})} \right] + \left[\overline{(\overline{AB}) + \overline{A\overline{B}}} \right] = \\
 &= (\overline{A + B})(A + \overline{B}) + \overline{AB} + A\overline{B} = \\
 &= A\overline{A} + \overline{A}\overline{B} + AB + B\overline{B} + \overline{A}B + A\overline{B} = \\
 &= \overline{A}\overline{B} + AB + \overline{A}B + A\overline{B} = \\
 &= \overline{A}(\overline{B} + B) + A(B + \overline{B}) = \\
 &= \overline{A} + A = 1
 \end{aligned}$$

Δυσικότητα της άλγεβρας BOOLE

Αν σε μία ισότητα εναλλάξω τις πράξεις + και ·, και τα ουδέτερα στοιχεία 0,1 η νέα ισότητα που θα προκύψει ισχύει.

Παραδείγματα:

$$\text{a) } \overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

$$\text{b) } \overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$$

$$\text{a) } x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

$$\text{b) } x + (y + z) = (x + y) + z$$

Κανονική μορφή συνάρτησης

X	Y	Z	A(X,Y,Z)	Ελάχιστοι Όροι	Μέγιστοι Όροι
0	0	0	0	$\bar{X}.\bar{Y}.\bar{Z}$	$X + Y + Z$
0	0	1	0	$\bar{X}.\bar{Y}.Z$	$X + Y + \bar{Z}$
0	1	0	1	$\bar{X}.Y.\bar{Z}$	$X + \bar{Y} + Z$
0	1	1	1	$\bar{X}.Y.Z$	$X + \bar{Y} + \bar{Z}$
1	0	0	0	$X.\bar{Y}.\bar{Z}$	$\bar{X} + Y + Z$
1	0	1	0	$X.\bar{Y}.Z$	$\bar{X} + Y + \bar{Z}$
1	1	0	1	$X.Y.\bar{Z}$	$\bar{X} + \bar{Y} + Z$
1	1	1	0	$X.Y.Z$	$\bar{X} + \bar{Y} + \bar{Z}$

α) Η κανονική μορφή της συνάρτησης προκύπτει σαν το άθροισμα των ελαχίστων όρων που αντιστοιχούν στις μονάδες της συνάρτησης.

$$A(X, Y, Z) = \bar{X}.Y.\bar{Z} + \bar{X}.Y.Z + X.Y.\bar{Z}$$

β) Το συμπλήρωμα της συνάρτησης είναι το άθροισμα των ελαχίστων όρων που αντιστοιχούν στα μηδέν της συνάρτησης

$$\overline{A(X, Y, Z)} = \bar{X}.\bar{Y}.\bar{Z} + \bar{X}.\bar{Y}.Z + X.\bar{Y}.\bar{Z} + X.\bar{Y}.Z + X.Y.\bar{Z} \Rightarrow$$

$$A(X, Y, Z) = \overline{\bar{X}.\bar{Y}.\bar{Z} + \bar{X}.\bar{Y}.Z + X.\bar{Y}.\bar{Z} + X.\bar{Y}.Z + X.Y.\bar{Z}}$$

$$A(X, Y, Z) = \left(\overline{\bar{X}.\bar{Y}.\bar{Z}} \right) \left(\overline{\bar{X}.\bar{Y}.Z} \right) \left(\overline{X.\bar{Y}.\bar{Z}} \right) \left(\overline{X.\bar{Y}.Z} \right) \left(\overline{X.Y.\bar{Z}} \right)$$

$$A(X, Y, Z) = (X + Y + Z).(X + Y + \bar{Z}).(\bar{X} + Y + Z).(\bar{X} + Y + \bar{Z}).(\bar{X} + \bar{Y} + \bar{Z})$$

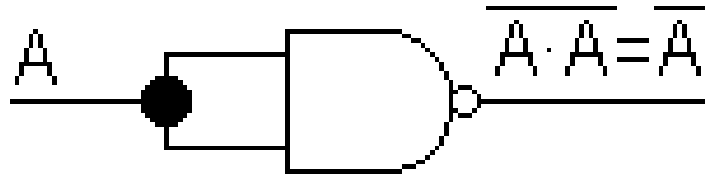
δηλαδή η κανονική μορφή της συνάρτησης προκύπτει σαν γινόμενο των μεγίστων όρων που αντιστοιχούν στα μηδενικά της συνάρτησης.

Σχεδίαση των πυλών AND, OR, NOT με πύλες NAND, NOR

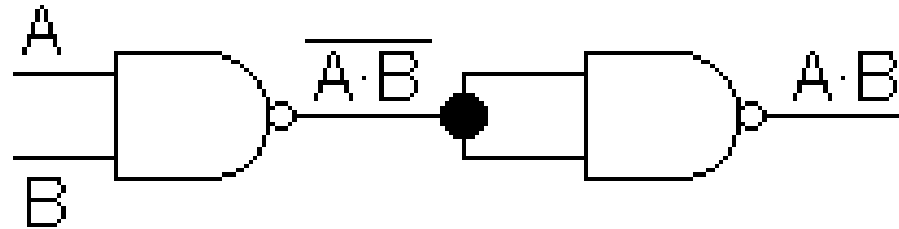
Οι πύλες NAND και NOR
κατασκευάζονται ευκολότερα, γι'
αυτό τις προτιμούμε στην κατασκευή
κυκλωμάτων.

Οι βασικές πύλες με NAND

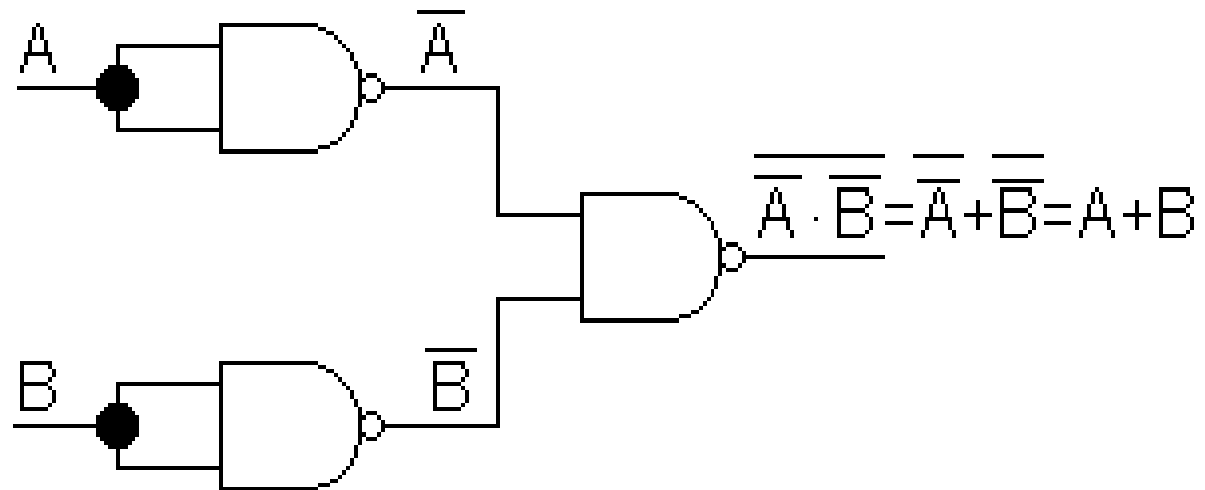
1) Η NOT



2) Η AND

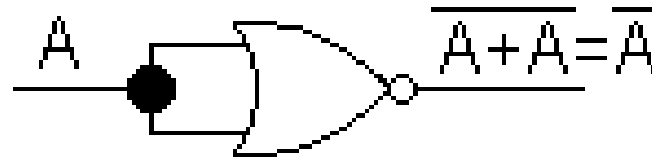


3) Η OR

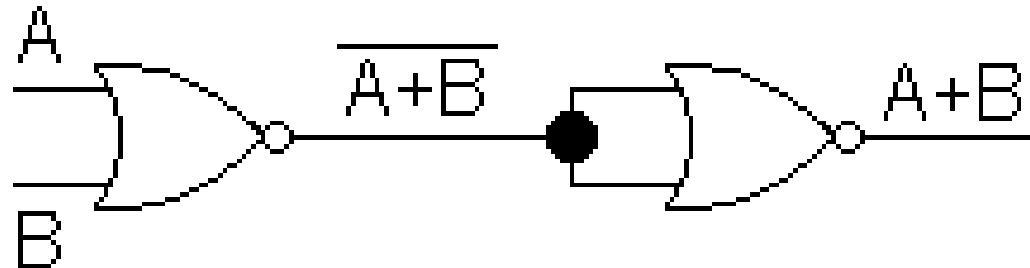


Οι βασικές πύλες με NOR

1) Η NOT



2) Η OR



3) Η AND

