

Συστήματα Αρίθμησης

- Στην καθημερινή μας ζωή χρησιμοποιούμε το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης. Στο σύστημα αυτό χρησιμοποιούμε δέκα διαφορετικά σύμβολα τα : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ,7 8, 9.
- Για τον αριθμό 312 θα χρειαστούμε τρία ψηφία, όπου το τρίτο ψηφίο αναπαριστά τις εκατοντάδες (10^2) το μεσαίο τις δεκάδες (10^1) και το δεξιότερο τις μονάδες (10^0). Το ψηφίο που γράφεται δεξιότερα είναι το **λιγότερο σημαντικό ψηφίο (LSB)** και το ψηφίο που γράφεται αριστερότερα είναι το **περισσότερο σημαντικό ψηφίο (MSB)**.
- Ο Η/Υ εσωτερικά αναπαριστά όλες τις πληροφορίες σε ακολουθίες δυαδικών καταστάσεων (0, 1). Η δυαδική λειτουργία του Η/Υ επιβάλλεται από τη φυσική λειτουργία του τρανζίστορ.

ΔΥΑΔΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

- Η λύση έρχεται με τη χρησιμοποίηση του **δυναδικού συστήματος αρίθμησης**. Τα σύμβολα που χρησιμοποιούνται σε αυτό το σύστημα αρίθμησης είναι το 0 και 1 και λέγονται δυναδικά ψηφία (bit, binary digit).
- Σε ένα αριθμό με δυο ψηφία 11 το δεξιότερο ψηφίο θα μετράει τις μονάδες (2^0) και το άλλο θα μετράει δυάδες (2^1).
- Εάν ο αριθμός ήταν τετραψήφιος 1001 το δεξιότερο ψηφίο θα μέτραγε μονάδες (2^0) και τα επόμενα θα αναπαριστούσαν διαδοχικά δυάδες (2^1), τετράδες (2^2) και οκτάδες (2^3).
- Στο δυναδικό σύστημα χρειαζόμαστε μεγαλύτερο πλήθος ψηφίων για να αναπαραστήσουμε ένα αριθμό από ότι με το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης ($15_{10}=1111_2$).

- Μετατροπή από το δυαδικό σύστημα αρίθμησης 11001110_2 στο δεκαδικό. Η αντιστοιχία του κάθε ψηφίου είναι ως εξής:

2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	1	0	0	1	1	1	0

$$11001110_2 = 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 206_{10}$$

- Μετατροπή από το δυαδικό σύστημα αρίθμησης 11110000_2 στο δεκαδικό. Η αντιστοιχία του κάθε ψηφίου είναι ως εξής:

2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	1	1	1	0	0	0	0

$$11110000_2 = 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 240_{10}$$

- Ο μεγαλύτερος αριθμός που μπορεί να γραφεί με οκτώ δυαδικά ψηφία είναι ο 11111111 που όταν μετατραπεί σε δεκαδικό σύστημα είναι ο 255.
- Η αντίστροφη διαδικασία δηλαδή η μετατροπή αριθμού από το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης στο δυαδικό βασίζεται σε διαδοχικές διαιρέσεις με τη βάση του δυαδικού συστήματος δηλαδή το 2.

	Πηλίκο	Υπόλοιπο
60 / 2 =	30	0
30 / 2 =	15	0
15 / 2 =	7	1
7 / 2 =	3	1
3 / 2 =	1	1
1 / 2 =	0	1

$$60_{10} = 111100_2$$

Παρατηρούμε ότι οι **διαδοχικές διαιρέσεις** γίνονται χρησιμοποιώντας το **πηλίκο της προηγούμενης διαίρεσης**. Οι διαιρέσεις σταματούν όταν το πηλίκο ισούται με μηδέν.

Η **αναπαράσταση** του αριθμού σε δυαδική μορφή γίνεται με τα ψηφία του **υπολοίπου**. Το ψηφίο που προέκυψε από τη τελευταία διαίρεση αποτελεί το **MSB** και το ψηφίο από την πρώτη διαίρεση το **LSB**.

- Ο μεγαλύτερος αριθμός που περιέχεται σε n δυαδικά ψηφία είναι ο $2^n - 1$.
- Χρησιμοποιούνται ειδικά ονόματα για τους αριθμούς που έχουν 4, 8 και 16 δυαδικά ψηφία. Συγκεκριμένα μια σειρά από 4 bits ονομάζεται **nibble**, μια σειρά από 8 bits ονομάζεται **byte** και μια σειρά από 16 bits ονομάζεται **word**.

Πράξεις Δυαδικών Αριθμών

- Στην πρόσθεση δυο αριθμών προσθέσουμε τα ψηφία ισοδύναμου βάρους λαμβάνοντας υπόψη τη μεταφορά του κρατουμένου. Επί παραδείγματι:

A) 10 +01 ----- 11	B) 1101 +0101 ----- 10010
---------------------------------------	--

Από τη πρόσθεση δύο δυαδικών αριθμών μπορεί να προκύψει αριθμός με μεγαλύτερο πλήθος bits αλλά μόνο **κατά ένα**.

- Η ίδια λογική υπάρχει και στον πολλαπλασιασμό. Όταν το ψηφίο του πολλαπλασιαστή (δεύτερος αριθμός) είναι 0 το μερικό γινόμενο είναι 0 ενώ όταν είναι 1 το μερικό γινόμενο είναι ο πολλαπλασιαστέος. Επί παραδείγματι:

1010
X1101

1010
0000
1010
1010

10000010

Το πλήθος των bits του γινομένου είναι το πολύ ίσο με το άθροισμα του πλήθους των bits του πολλαπλασιαστέου συν το πλήθος των bits του πολλαπλασιαστή.

ΔΕΚΑΕΞΑΔΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

- Σ' αυτό υπάρχουν 16 σύμβολα για την αναπαράσταση των αριθμών.

Δεκαεξαδικό Σύστημα	Δυαδικό Σύστημα	Δεκαεξαδικό Σύστημα	Δυαδικό Σύστημα
0	0 0 0 0	<i>A (10)</i>	1 0 1 0
1	0 0 0 1	<i>B (11)</i>	1 0 1 1
2	0 0 1 0	<i>C (12)</i>	1 1 0 0
3	0 0 1 1	<i>D (13)</i>	1 1 0 1
4	0 1 0 0	<i>E (14)</i>	1 1 1 0
5	0 1 0 1	<i>F (15)</i>	1 1 1 1
6	0 1 1 0		
7	0 1 1 1		
8	1 0 0 0		
9	1 0 0 1		

- Μετατροπή από το δεκαεξαδικό σύστημα στο δεκαδικό του αριθμού 3F8. Το ψηφίο 8 αναφέρεται στις μονάδες (16^0), το ψηφίο F στις δέκα εξάδες (16^1) και το 3 στις διακόσια πενήντα εξάδες (16^2). Έτσι είναι:

$$3F8_{16} = 3 \cdot 16^2 + F \cdot 16^1 + 8 \cdot 16^0 = 768 + 240 + 8 = 1016_{10}$$

- Μετατροπή από το δεκαεξαδικό σύστημα στο δεκαδικό του αριθμού 278. Το ψηφίο 8 αναφέρεται στις μονάδες (16^0), το ψηφίο 7 στις δέκα εξάδες (16^1) και το 2 στις διακόσια πενήντα εξάδες (16^2). Έτσι είναι:

$$278_{16} = 2 \cdot 16^2 + 7 \cdot 16^1 + 8 \cdot 16^0 = 512 + 112 + 8 = 632_{10}$$

- Εάν θέλουμε να δηλώσουμε ότι ο αριθμός 278 ανήκει στο δεκαεξαδικό σύστημα αρίθμησης το γράφουμε **278H** ή **0x278** (συμβολισμός της γλώσσας προγραμματισμού C++).
- Για την μετατροπή ενός αριθμού (700) από το δεκαδικό στο δεκαεξαδικό σύστημα αρίθμησης ακολουθούμε την μεθοδολογία των διαδοχικών διαιρέσεων με το 16:

	Πηλίκο	Υπόλοιπο (10)	Υπόλοιπο (16)
700 / 16 =	43	12	C
43 / 16 =	2	11	B
2 / 16 =	0	2	2

Ο αριθμός στο δεκαεξαδικό σύστημα γράφεται **2BC**.

- Για την μετατροπή του αριθμού 1453 από το δεκαδικό στο δεκαεξαδικό σύστημα ακολουθούμε την ίδια μεθοδολογία:

	Πηλίκο	Υπόλοιπο (10)	Υπόλοιπο (16)
1453 / 16 =	90	13	D
90 / 16 =	5	10	A
5 / 16 =	0	5	5

Ο αριθμός στο δεκαεξαδικό σύστημα γράφεται **5AD**.

Ο αριθμός προκύπτει από τα ψηφία του υπολοίπου όπου το υπόλοιπο από την τελευταία διαίρεση αποτελεί το πλέον σημαντικό ψηφίο.

- Για την μετατροπή αριθμών από το δεκαεξαδικό σύστημα στο δυαδικό κάθε ψηφίο του δεκαεξαδικού μπορεί να γραφεί με τέσσερα ψηφία του δυαδικού συστήματος.
- Ο αριθμός 78H για να γραφεί στο δυαδικό σύστημα χρειάζεται 8 ψηφία. Ο αριθμός 7 γράφεται σαν 0111 και ο αριθμός 8 σαν 1000. Επομένως συνολικά θα είναι:

78H = 0111 1000

- Ο αριθμός 3BCH χρειάζεται 12 δυαδικά ψηφία (3 X 4 ψηφία ανά δεκαεξαδικό ψηφίο) και είναι:

3BCH = 0011 1011 1100

- Για την μετατροπή αριθμών από το δυαδικό σύστημα αρίθμησης στο δεκαεξαδικό χωρίζουμε τον δυαδικό αριθμό σε nibbles.

Η κατάτμηση αρχίζει από το LSB και αν ο δυαδικός αριθμός δεν έχει πλήθος ψηφίων ακέραιο πολλαπλάσιο του 4 προσθέτουμε τα αναγκαία μηδενικά στην αρχή του.

- Ο αριθμός 1100110 διαχωρίζεται ως εξής:

$$\mathbf{1100110 = 0110\ 0110 = 66H}$$

- Αντίστοιχα ο αριθμός 1110101101 διαχωρίζεται ως:

$$\mathbf{1110101101 = 0011\ 1010\ 1101 = 3ADH.}$$