Οριακά Θεωρήματα

Θεώρημα Chebyshev

Αν X τμ με κατανομή f(x), τότε για την συνάρτηση $u(X) \geq 0$ και την σταθερά c>0 ισχύει ότι

$$P\left(u(X) \geq c\right) \leq \frac{E\left(u(X)\right)}{c}$$

και

$$P\left(u(X) < c\right) \geq 1 - \frac{E\left(u(X)\right)}{c}$$

$$P\left(u(X) \geq c\right) \leq \frac{E\left(u(X)\right)}{c}$$

και

$$P\left(u(X) < c\right) \geq 1 - \frac{E\left(u(X)\right)}{c}$$

Απόδειξη

$$\mathrm{E}\left(u(X)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} u(X)\, f(x)\, dx =$$

$$\int_{-\infty}^{u(X)<c} u(X)\, f(x)\, dx + \int_{u(X)\geq c}^{\infty} u(X)\, f(x)\, dx \geq$$

$$\int_{u(X)\geq c}^{\infty} u(X)\, f(x)\, dx \geq \int_{u(X)\geq c}^{\infty} c f(x)\, dx = cP\left(u(X) \geq c\right)$$

άρα

$$P\left(u(X) \geq c\right) \leq \frac{E(X)}{c}$$

Με αντίστοιχο τρόπο αποδεικνύεται και η άλλη πρόταση του θεωρήματος

- **Ανισότητα Markov**

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

- **Ανισότητα Chebyshev**

$$P\left[|X-\mu| \geq k\sigma\right] \leq \frac{1}{k^2}$$

$$P\left[|X-\mu| < k\sigma\right] \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Απόδειξη: Αρκεί να θέσω στο Θεώρημα Chebyshev

$u(X)=(X-E(X))^2=(X-\mu)^2$ και $c=k^2\sigma^2$ τότε

$$\left.\begin{aligned} &P\left[(X-\mu)^2\geq k^2\sigma^2\right]\leq\frac{E(X-\mu)^2}{k^2\sigma^2}=\frac{1}{k^2}\\ &P\left[(X-\mu)^2<k^2\sigma^2\right]\geq 1-\frac{1}{k^2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &P\left[|X-\mu|\geq k\sigma\right]\leq\frac{1}{k^2}\\ &P\left[|X-\mu|<k\sigma\right]\geq 1-\frac{1}{k^2}\end{aligned}\right\}$$

Παράδειγμα

Έστω $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ και k=2 τότε

$$P(|X-\mu|<k\sigma)=P(-k\sigma<X-\mu<k\sigma)=$$

$$P\left(-\frac{k\sigma}{\sigma}<\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{k\sigma}{\sigma}\right)=P(-k<Z<k)=$$

$$\Phi(k)-\Phi(-k)=\Phi(2)-\Phi(-2)=0.9546$$

με την ανισότητα Chebyshev

$P(|X-\mu|<k\sigma)\geq 1-\frac{1}{k^2}$ άρα

$$P(|X-\mu|<2\sigma)\geq 0.75$$

Ασθενής Νόμος Μεγάλων Αριθμών

Αν $X_1,X_2,\ldots,X_n$ τδ από πληθυσμό με μέση τιμή **μ** και διακύμανση $\boldsymbol{\sigma^2}$ τότε όταν το μέγεθος του δείγματος τείνει στο άπειρο το όριο της μέσης τιμής $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ του δείγματος τείνει στην μέση τιμή του πληθυσμού

<u>Μαθηματικός ορισμός</u>

Έστω $\bar{X}$ ο μέσος όρος ενός δείγματος μεγέθους n από ένα πληθυσμό με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f() με μέση τιμή **μ** και διακύμανση $\boldsymbol{\sigma^2}$**.** Τότε για δύο αριθμούς ε>0 και 0<δ<1, και όταν $n>\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\delta$

$$P(-\varepsilon<\bar{X}-\mu<\varepsilon)\geq 1-\delta$$