Από-Κοινού Κατανομές

Κατανομές

Συχνά ενδιαφερόμαστε να υπολογίσουμε πιθανότητες που αφορούν από κοινού 2 ή παραπάνω τυχαίες μεταβλητές. Ορίζουμε σαν Από-Κοινού Αθροιστική Κατανομή της X και Y την $F(a,b)=P(X\leq a,Y\leq b) \quad -\infty\leq a,b\leq\infty$

Η αθροιστική κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X μπορεί να βρεθεί από την από-κοινού κατανομή ως: $F_X(a)=P(X\leq a)=F(a,\infty)$. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να βρούμε και την αθροιστική κατανομή της Y

Στην περίπτωση που η X και η Y είναι διακριτές τμ, η από-κοινού συνάρτηση πιθανότητας ορίζεται σαν $P(X=x,Y=y)$, ενώ στην περίπτωση που είναι συνεχείς τμ, η από-κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ορίζεται $f(X,Y)$.

Από την από-κοινού κατανομή δύο μεταβλητών $f(X,Y)$ μπορώ να υπολογίσω την κατανομή της κάθε μίας αθροίζοντας ή ολοκληρώνοντας τις τιμές της άλλης

$$P_X(X=x)=\sum_y P(X=x,Y=y) \quad X,Y\ διακριτές$$
$$f_X(X)=\int f(X,Y)dx \quad X,Y\ συνεχείς$$

Αναμενόμενη Τιμή

Ορίζω σαν αναμενόμενη τιμή της X και Y την

$$E(X,Y)=\begin{cases}\sum_x\sum_y xyP(X=x,Y=y) & X,Y\ διακριτές\\ \iint xyf(X,Y)dxdy & X,Y\ συνεχείς\end{cases}$$

Σαν αναμενόμενη τιμή μιας συνάρτησης των X,Y ορίζω την

$$E(X,Y)=\begin{cases}\sum_x\sum_y g(x,y)P(X=x,Y=y) & X,Y\ διακριτές\\ \iint g(x,y)f(X,Y)dxdy & X,Y\ συνεχείς\end{cases}$$

Πρόταση: $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

Απόδειξη: Ορίζω $g(X,Y)=X+Y$ άρα

$$
\begin{aligned}
&E\big(g(X,Y)\big)=\iint (x+y)\, f(X,Y)\,dxdx=\\
&\iint xf(X,Y)\,dxdx+\iint yf(X,Y)\,dxdx=\\
&\int x\Big(\int f(X,Y)\,dy\Big)dx+\int y\Big(\int f(X,Y)\,dx\Big)dy=\\
&\int xf(X)\,dx+\int yf(Y)\,dy=E(X)+E(Y)
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα: Αποδείξτε ότι η αναμενόμενη τιμή της Διωνυμικής Κατανομής είναι E(X)=np

Λύση: Γνωρίζω ότι η τμ X που ακολουθεί την Διωνυμική Κατανομή είναι το άθροισμα n τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν την Bernoulli, άρα $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$. Κάθε Bernoulli τυχαία μεταβλητή παίρνει τιμές

$$
X_i=\begin{cases} 1, \text{ με πιθανότητα p} \\ 0, \text{ με πιθανότητα 1-p} \end{cases}
$$

Άρα η αναμενόμενη τιμή κάθε Bernoulli τυχαίας μεταβλητής είναι $E(X_i)=1\cdot p+0\cdot(1-p)=p$

Κατά συνέπεια η αναμενόμενη τιμή της τυχαίας μεταβλη΄της που ακολουθεί την Διωνυμική είναι :

$$
\begin{aligned}
&E(X)=E(X_1+X_2+\cdots+X_n)\\
&=E(X_1)+E(X_2)+\ldots+E(X_n)\\
&=p+p+\cdots+p=np
\end{aligned}
$$

Ανεξάρτητες Τυχαίες Μεταβλητές

Οι τμ X και Y λέγονται ανεξάρτητες αν για κάθε a,b$\in\Re$ ισχύει

$$
P(X\le a, Y\le b)=P(X\le a)P(Y\le b)
$$

Σε όρους από-κοινού συνάρτησης κατανομής $F(a,b)=F_X(a)F_Y(b)$

Πρόταση: Αν X και Y ανεξάρτητες τμ, τότε $E(X \cdot Y) = E(X)E(Y)$

Απόδειξη:

$$E(X \cdot Y) = \iint x \cdot y \cdot f(x,y)\,dxdy$$

Όμως X και Y ανεξάρτητες άρα $f(x,y) = f(x)f(y)$, άρα

$$\begin{aligned} E(X \cdot Y) &= \iint x \cdot y \cdot f(x) \cdot f(y)\,dxdy \\ &= \int xf(x)\left[\int yf(y)\,dy\right]dx = \int xf(x)E(Y)\,dx \\ &= E(Y)\int xf(x)\,dx = E(Y)E(X) \end{aligned}$$

Η πρόταση ισχύει και για συναρτήσεις των τυχαίων μεταβλητών X και Y, άρα $E(g(X) \cdot h(Y)) = E(g(X))E(h(Y))$, όταν X και Y ανεξάρτητες.

Συνδιακύμανση

Η συνδιακύμανση δύο τυχαίων μεταβλητών X και Y ορίζεται ως:

$$Cov(X,Y) = E\left[(X - E(X))(Y - E(Y))\right]$$

Πρόταση: Αποδείξτε ότι $Cov(X,Y) = E(X \cdot Y) - \left[E(X)E(Y)\right]$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E\left[(X - E(X))(Y - E(Y))\right] = E\left[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\right] \\ &= E(XY - X\mu_Y - Y\mu_X + \mu_X\mu_Y) \\ &= E(XY) - \mu_Y E(X) - \mu_X E(Y) + \mu_X\mu_Y \\ &= E(XY) - \mu_X\mu_Y \end{aligned}$$

Ιδιότητες Συνδιακύμανσης

1. $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$
2. $Cov(X,X) = V(X)$
3. $Cov(dX,Y) = dCov(X,Y),\ d \in \Re$
4. $Cov((X+Z),Y) = Cov(X,Y) + Cov(Z,Y)$

Συνδιακύμανση Αθροίσματος Τυχαίων Μεταβλητών

$$Cov\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} Cov\left(X_i, Y_j\right)$$

Πρόταση: Αποδείξτε ότι $V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V\left(X_i\right) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{\forall j<i} Cov\left(X_i, X_j\right)$

Απόδειξη:

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = Cov\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Cov\left(X_i, X_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} Cov\left(X_i, X_i\right) + \sum_{i\neq j}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Cov\left(X_i, X_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} V\left(X_i\right) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{\forall j<i} Cov\left(X_i, X_j\right)$$